

2D-Modellierung der Konvektion in einem ellipsoidischen Erdmantel mit der Finite-Elemente-Methode

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium

vorgelegt dem Rat der Chemisch-Geowissenschaftlichen Fakultät der
Friedrich-Schiller-Universität Jena

von Diplom-Mathematikerin Birgit Fechtner
geboren am 28. Juni 1969 in Neunkirchen-Seelscheid

Gutachter

1. Prof. Dr. U. Walzer
2. Prof. Dr. G. Jentzsch

Tag der Disputation: 28.6.2000

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Geophysikalische Grundlagen	2
2.1	Erhaltungsgleichungen	4
2.2	Basiswechsel	5
2.3	Randbedingungen und Anfangswerte	7
2.4	Das Schwerfeld der Erde	12
3	Numerische Methoden	14
3.1	Die Finite-Elemente-Methode	14
3.2	Variationsformulierung	18
3.3	Netzgenerierung für verschiedene Gebiete	23
3.4	Das Programmpaket <i>VECFEM</i>	25
3.5	Programme zur grafischen Auswertung	26
4	Ergebnisse	28
4.1	Rechteckgebiet	28
4.2	Kreisring	33

4.2.1	Einfluß der Temperaturanfängsstörung	34
4.2.2	Variation der Radien	47
4.2.3	Änderung der Rayleigh-Zahl	49
4.3	Ellipsenring	51
4.3.1	Auswirkungen der Temperaturanfängsstörung	52
4.3.2	Einfluß der Abplattung	58
4.3.3	Ellipsenringe verschiedener Schichtdicken	61
4.4	Erdartiger Ellipsenring	61
4.4.1	Zeitliche Entwicklung der Konvektion	63
4.4.2	Auswirkungen der Temperaturanfängsstörung	65
4.4.3	Gittervergleich	69
4.4.4	Änderung der Rayleigh-Zahl	70
4.4.5	Schwerfeldeinfluß	74
4.4.6	Tiefenabhängige Viskosität	75
4.4.7	660-km-Diskontinuität	78
5	Zusammenfassung	81
	Abbildungsverzeichnis	83
	Tabellenverzeichnis	88
	Literaturverzeichnis	90

Kapitel 1

Einleitung

Thermische Konvektion im Erdmantel ist der wesentliche Antriebsmechanismus der Bewegung der Lithosphärenplatten. Die Frage nach dem Mechanismus der Konvektion läßt sich nicht durch direkte Beobachtungen klären. Man nähert sich dem Problem durch Modellbildung, wobei diese dann näherungsweise als gelungen anzusehen ist, wenn sie möglichst genaue Aussagen über die der Beobachtung zugänglichen Daten zu treffen vermag. In dieser Arbeit wird die Frage gestellt, wie sich die Abplattung der Erde auf die Konvektion im Erdmantel auswirkt. Hierzu wird der ellipsoidische Erdmantel als zweidimensionaler Schnitt durch die Drehachse der Erde dargestellt, so daß die großen Halbachsen des zweidimensionalen Ellipsenringes in der Äquatorebene liegen. Wegen der sehr großen Prandtl-Zahl werden Scheinkräfte wie z. B. die Fliehkraft vernachlässigt. Untersucht werden die Einflüsse der Geometrie, der Temperaturanfängsstörung, des Schwerfelds, der 660km-Phasengrenze und einer tiefenabhängigen Viskosität. Durch Vereinfachte Modellannahmen und durch Variation der Parameter nähert man sich dem Verständnis des physikalischen Mechanismus. Obwohl die Abplattung der Erde mit 0.33% (Kertz, 1969) sehr gering ist, wird mit diesem Modell gezeigt, daß die Berücksichtigung der Abplattung der Erde einen nicht zu vernachlässigenden Einfluß sowohl quantitativer wie auch qualitativer Art auf die Konvektion im Erdmantel hat.

Kapitel 2

Geophysikalische Grundlagen

Festkörperkonvektion wird durch die Erhaltungssätze der Physik beschrieben. Kriechgeschwindigkeiten und Temperaturen werden als Funktion des Ortsvektors und der Zeit bestimmt. Für das Kriechen ist insbesondere die Rheologie des Erdmantels wichtig. Es wird eine temperatur- und druckabhängige Olivin-Rheologie angenommen, da Olivin der Hauptbestandteil der Asthenosphäre ist (Schmeling und Bussod, 1996). Die Anwesenheit volatiler Stoffe und partieller Schmelzen beeinflusst ebenfalls die Fließfähigkeit des Mantelmaterials (Walzer und Hendel, 1999; Gründer, 1999), wird aber in dieser Arbeit nicht berücksichtigt.

Eine übliche Näherung für die Mantelkonvektion ist die Oberbeck-Boussinesq-Approximation, d. h. thermisch bedingte Änderungen der Dichte werden nur im Auftriebsterm berücksichtigt. Eine weitere Vereinfachung ergibt sich dadurch, daß die Prandtl-Zahl wegen der hohen Viskosität des Mantels einen Wert von etwa 10^{23} erreicht (Schmalzl, 1996). Ihr Kehrwert verschwindet daher näherungsweise, wodurch sich eine Vereinfachung der Navier-Stokes-Gleichung ergibt.

Tabelle 2.1: Symbolverzeichnis

Symbol	Bedeutung	Wert	Einheit
α	thermischer Ausdehnungskoeffizient	$1.4 \cdot 10^{-5}$	K^{-1}
c_p	spezifische Wärme	10^3	$J kg^{-1} K^{-1}$
d	Schichtdicke	variabel	m
δ_{ij}	Kronecker-Symbol	$\begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$	
ε	Streckungsfaktor	$0 \leq \varepsilon \leq 1$	dimensionslos
ξ	Periode der Temperaturanfangsstörung	variabel	dimensionslos
f	Abplattung der Erde	$1/298$	dimensionslos
\vec{g}	Schwerebeschleunigung	variabel	$m s^{-2}$
η	dynamische Viskosität	variabel	$Pa s$
η_0	Skalierungsviskosität	$2 \cdot 10^{22}$	$Pa s$
k	Wärmeleitfähigkeit	variabel	$W m^{-1} K^{-1}$
κ	Temperaturleitfähigkeit	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$m^2 s^{-1}$
\vec{n}	Normalenvektor		
p	thermodynamischer Druck	variabel	Pa
ρ	Dichte	variabel	$kg m^{-3}$
ρ_0	Dichte bei Nulldruck	$3.984 \cdot 10^3$	$kg m^{-3}$
t	Zeit	variabel	s
$\vec{\tau}$	Tangentenvektor, zeigt im Uhrzeigersinn		
\vec{v}	Geschwindigkeitsfeld	variabel	$m s^{-1}$
v_{rms}	räumlich gemittelte Geschwindigkeit	variabel	dimensionslos
\vec{x}	Ortsvektor		m
$A1$	Große Halbachse der Kern-Mantel-Fläche	3471.0	km
$B1$	Kleine Halbachse der Kern-Mantel-Fläche	3459.4	km
$A2$	Große Halbachse der Erdoberfläche	6378.2	km
$B2$	Kleine Halbachse der Erdoberfläche	6358.8	km
H	spezifische Wärmeleistung	variabel	$W kg^{-1}$
Q	Wärmeleistungsdichte	variabel	$W m^{-3}$
T	Temperatur	variabel	K
T_0	Oberflächentemperatur	288	K
ΔT	Temperaturdifferenz	4000	K

2.1 Erhaltungsgleichungen

Für die theoretisch-physikalischen Herleitungen geodynamischer Konvektionsmodelle sei auf die bekannte Literatur (Schmeling, 1991; Gresho, 1991; Schubert, 1992; Bittner, 1995) verwiesen. Aus der Massenerhaltung

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right] \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

folgt für inkompressible Materie

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 . \quad (2.1)$$

Unter Berücksichtigung dieser Kontinuitätsgleichung folgt aus dem Impulssatz die Navier-Stokes-Gleichung:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right] \vec{e}_k . \quad (2.2)$$

Aus dem ersten Hauptsatz der Wärmelehre ergibt sich (Walzer und Hendel, 1997a) durch Elimination der inneren Energie

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + Q + \alpha T \frac{dp}{dt} + 2 W_D . \quad (2.3)$$

Das Dissipationspotential W_D beschreibt die Wärmequellen infolge innerer Reibung und ist für kleine Geschwindigkeiten vernachlässigbar. Die Wärmeleitfähigkeit k ist von der Dichte abhängig: $k = \kappa \rho c_p$. Eine Übersicht der verwendeten Größen zeigt Tabelle 2.1.

Für laminare Strömungen viskoser, inkompressibler Flüssigkeiten wird folgende kinetische Zustandsgleichung angenommen, wobei der Druckeinfluß vernachlässigt wird:

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha (T - T_0)] \quad (2.4)$$

Die dimensionsbehafteten Gleichungen (2.1), (2.2), (2.3) und (2.4) werden durch dimensionslose Größen ersetzt, wie es in der Arbeit von Schmeling (1991) ausführ-

lich behandelt wird. Schließlich ergeben die Kontinuitätsgleichung (2.1), die Strömungsgleichung (2.2) und die Wärmetransportgleichung (2.3) das gesuchte Differentialgleichungssystem.

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \vec{e}_i + Ra T \frac{\vec{g}}{|\vec{g}|}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T = \nabla^2 T + H \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Die wichtigsten physikalischen Eigenschaften der Strömung werden durch die dimensionslose Rayleigh-Zahl $Ra = \frac{\rho_0 \alpha g \Delta T d^3}{\eta_0 \kappa}$ und die dimensionslose Prandtl-Zahl $Pr = \frac{\eta_0}{\rho_0 \kappa}$ repräsentiert. Die Rayleigh-Zahl beschreibt das Verhältnis der thermischen Auftriebskräfte zu den viskosen Kräften, die Prandtl-Zahl das Verhältnis zwischen Impuls- und Wärmeausbreitung. Aufgrund einer näherungsweise unendlich großen Prandtl-Zahl verschwindet der linke Term in der Navier-Stokes-Gleichung von (2.5).

2.2 Basiswechsel

Da die Mantelkonvektion in einem zweidimensionalen, ellipsoidischen Gebiet untersucht wird, ist ein geeigneter Basiswechsel notwendig. Folgende lokale Basisvektoren werden eingeführt:

$$\vec{e}_1^* := \frac{b^2 x_1 \vec{e}_1 + a^2 x_2 \vec{e}_2}{\sqrt{a^4 x_2^2 + b^4 x_1^2}} \quad (2.6)$$

$$\vec{e}_2^* := \frac{a^2 x_2 \vec{e}_1 - b^2 x_1 \vec{e}_2}{\sqrt{a^4 x_2^2 + b^4 x_1^2}} \quad (2.7)$$

Die Einheitsvektoren \vec{e}_1 und \vec{e}_2 bilden die kanonische Basis $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ von \mathbb{R}^2 . Die neue Basis $B^* = \{\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*\}$ besteht aus orthonormalen Vektoren, die in jedem Punkt (x_1, x_2) des Gebietes ein lokales, kartesisches Koordinatensystem bilden.

Betrachtet man eine Ellipse mit den Halbachsen a und b , dann beschreiben diese Basisvektoren die Normalen und die Tangenten an diese Ellipse. \vec{e}_1^* zeigt immer orthogonal nach außen und \vec{e}_2^* tangential im Uhrzeigersinn.

Beim Übergang von der Basis B zur Basis B^* ändern sich selbstverständlich die Koordinaten eines Vektors $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Aufgrund (2.6) und (2.7) ist die Koordinatentransformation durch folgende Matrix eindeutig bestimmt:

$$A = \frac{1}{\sqrt{a^4 x_2^2 + b^4 x_1^2}} \begin{pmatrix} b^2 x_1 & a^2 x_2 \\ a^2 x_2 & -b^2 x_1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Zwischen den Einheitsvektoren besteht der Zusammenhang:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1^* \\ \vec{e}_2^* \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix}$$

Daher gilt für die Koordinaten x_i und x_i^* des Vektors $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 = x_1^* \vec{e}_1^* + x_2^* \vec{e}_2^*$ die Umrechnungsformel (Bronstein, 1987):

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = (A^{-1})^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Es werden in der Literatur Koordinatentransformationen z. B. in Kugelkoordinaten oder Zylinderkoordinaten durchgeführt (Landau und Lifschitz, 1966; Breuer et al., 1997). Die dort angegebenen Skalenfaktoren berechnen sich hier zu $h_{x_1^*} = 1$ und $h_{x_2^*} = 1$. Somit schreibt sich der Gradient bezüglich der Basis B^* :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1^*} \vec{e}_1^* + \frac{\partial}{\partial x_2^*} \vec{e}_2^*$$

Die Basisvektoren \vec{e}_1^* und \vec{e}_2^* sind unabhängig von den Koordinaten x_1^* und x_2^* , so daß die Ableitungen dieser Vektoren nach x_1^* und x_2^* verschwinden. Diese Ergebnisse vereinfachen die Berechnungen der Vektordifferentialoperatoren. Letztendlich kann das Differentialgleichungssystem wie gewohnt betrachtet werden. Die Bezeichnung „*“ lasse ich in der vorliegenden Arbeit weg, mit dem Hinweis, daß die Orthonormalbasis $B^* = \{\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*\}$ allen Berechnungen zugrundeliegt.

Im Programm sind für das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = v_1^* \vec{e}_1^* + v_2^* \vec{e}_2^*$ nach (2.9) folgende Umrechnungen einzugeben:

$$v_1^* = \frac{b^2 x_1 v_1 + a^2 x_2 v_2}{\sqrt{a^4 x_2^2 + b^4 x_1^2}} \quad (2.10)$$

$$v_2^* = \frac{a^2 x_2 v_1 - b^2 x_1 v_2}{\sqrt{a^4 x_2^2 + b^4 x_1^2}} \quad (2.11)$$

Somit besteht der Geschwindigkeitsvektor aus den zwei Komponenten v_1^* senkrecht zum Rand und v_2^* parallel zum Rand des ellipsenförmigen Gebietes. Normalenvektor \vec{n} und Tangentenvektor \vec{t} haben überall folgende Gestalt:

$$\vec{n} = \vec{e}_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \vec{e}_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Da das Programm zur Berechnung der Mantelkonvektion die Koordinaten als Ergebnis liefert, müssen die Geschwindigkeitskomponenten nach (2.10) und (2.11) wieder zurücktransformiert werden. Dazu ist ein C-Programm *CONVERT.C* entwickelt worden, welches als Eingabe ein Datenfile und die Größenangaben der Halbachsen benötigt. Die damit berechneten Geschwindigkeitskomponenten stellt ein Grafikprogramm als Vektorfeld dar.

2.3 Randbedingungen und Anfangswerte

Um das Differentialgleichungssystem (2.5) numerisch lösen zu können, müssen Randbedingungen und Anfangswerte gegeben sein. Da diese einen großen Einfluß haben, müssen die physikalischen Beobachtungen numerisch exakt formuliert werden.

Randbedingungen für die Geschwindigkeiten

Bei Konvektionsmodellierungen im Erdmantel setzt man Scherspannungsfreiheit an den Rändern des Gebietes voraus. Daher genügt es, die Gleitbedingung (oder *free slip*) hier aufzuführen. Weitere Arten von Randbedingungen werden z. B. von Griebel et al. (1995) für den Spezialfall eines Kastens diskutiert und physikalisch erläutert. Für ein beliebiges Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist für alle Punkte (x_1, x_2) des Randes $\Gamma := \partial\Omega$ eine allgemeine Definition der Gleitbedingung notwendig. Sie

lautet:

$$\vec{n}(x_1, x_2) \cdot \vec{v}(x_1, x_2) = 0 \quad (2.13)$$

$$\vec{t}^T(x_1, x_2) \cdot \sigma \vec{n}(x_1, x_2) = 0 \quad (2.14)$$

mit $\sigma_{ij} = 2\eta\dot{\varepsilon}_{ij} - p\delta_{ij}$

und $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i}\right)$

Sie besagt, daß keine Materie durch die Erdoberfläche und die Kern-Mantel-Grenze fließt und es an diesen Rändern keine Reibungsverluste gibt.

Es ist zu beachten, daß dem zweidimensionalen Raum die Basis $B^* = \{\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*\}$ zugrunde liegt. Da für den Normalenvektor \vec{n} und den Tangentenvektor \vec{t} die Formeln (2.12) gelten, folgt aus den obigen Gleichungen (2.13) und (2.14):

$$v_1^* = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial v_2^*}{\partial x_1^*} = 0 \quad (2.16)$$

Man erkennt, daß der Basiswechsel eine vereinfachte Formulierung der Randbedingungen (2.13) und (2.14) bewirkt. Diese lassen sich numerisch als Dirichlet-Randbedingung (2.15) und Neumann-Randbedingung (2.16) im vorliegenden Programm einsetzen. Jarvis (1993) benutzt eine Koordinatentransformation des Differentialgleichungssystems in Zylinderkoordinaten und muß anschließend neue Randbedingungen für Kreisringe aufstellen.

Für den Spezialfall eines zweidimensionalen *Kastenmodells* existiert an jedem der vier Ränder ein lokales Koordinatensystem bezüglich der Basis B^* . Es gelten also die Formeln (2.13) bis (2.16). Betrachtet man als Beispiel den oberen Rand des Kastens, dann liegt der Koordinatentransformation (2.8) die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

zugrunde. Für die Randbedingungen läßt sich daraus schließen:

$$v_1^* = v_2 = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial v_2^*}{\partial x_1^*} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0 \quad (2.19)$$

Bezüglich der kanonischen Basis $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ sind diese Randbedingungen in geodynamischen Konvektionsrechnungen (Schmeling, 1991; Walzer und Hendel, 1997a) unter den Bezeichnungen $v_1(x_1, x_2) = u(x, z)$ und $v_2(x_1, x_2) = w(x, z)$ bekannt. Aus (2.13) und (2.14) läßt sich somit die Gleitbedingung für das Kastenmodell herleiten, welche besagt, daß sowohl die Geschwindigkeitskomponente in Normalenrichtung, als auch die Ableitung in Normalenrichtung der tangentialen Geschwindigkeitskomponente gleich Null ist.

Randbedingungen für die Temperatur

Die Temperatur der Strömung wird im vorliegenden Modell an der Oberfläche durch Kühlen ($T = T_0$) und an der Grenze zum Kern durch Heizen ($T = T_0 + \Delta T$) vorgeschrieben. Diese Dirichlet-Randbedingungen werden im Falle eines Rechteckgebietes an den künstlichen Seitenrändern durch Neumann-Randbedingungen $-k\partial T/\partial n = q$ ergänzt, um vorzugeben, wieviel Wärme durch die Wände abgeleitet wird. Bei einem Wärmefluß von $q = 0$ heißt diese Randbedingung adiabatisch, und es findet kein Wärmeaustausch über diesen Rand statt.

Temperaturanfangsstörung

Im folgenden wird eine Temperaturanfangsstörung in einem zweidimensionalen Ellipsenring konstruiert. Die Ränder dieses Gebietes seien durch eine innere und eine äußere Ellipse gegeben, welche den Gleichungen genügen:

$$\frac{s^2}{A_1^2} + \frac{t^2}{B_1^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{p^2}{A_2^2} + \frac{q^2}{B_2^2} = 1 \quad (2.20)$$

Dabei beschreibt die Menge aller Punkte (s, t) bzw. (p, q) die innere bzw. äußere Ellipse mit den jeweiligen Halbachsen (A_1, B_1) bzw. (A_2, B_2) .

Die Temperaturanfängsstörung muß kontinuierlich von innen nach außen abnehmen, um den Randbedingungen zu genügen. Diese sind im dimensionslosen Fall durch 1 und 0 gegeben. Gleichzeitig soll in allen Punkten (x_1, x_2) innerhalb des Ellipsenringes eine sin-cos-Störung wirken.

Um jeden Punkt $(x_1, x_2) \in \Omega$ erreichen zu können, wird eine Gerade durch den Ursprung und durch (x_1, x_2) so gelegt, daß sie die innere und äußere Ellipse in (s, t) und (p, q) schneiden. Somit gilt der Strahlensatz:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{t}{s} = \frac{q}{p} \quad (2.21)$$

Die genaue Lage des Punktes (x_1, x_2) wird durch das Verhältnis vom Abstand zwischen diesem Punkt und innerer Ellipse zum Ellipsendurchmesser an dieser Stelle festgelegt. Es wird also ein $0 \leq \varepsilon \leq 1$ gesucht, so daß

$$r = r_1 + \varepsilon(r_2 - r_1) \quad (2.22)$$

gilt, wobei r_1 und r_2 aus (2.20) und (2.21) abzuleiten sind:

$$r_1(x_1, x_2) = A_1 B_1 \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{B_1^2 x_1^2 + A_1^2 x_2^2}} \quad (2.23)$$

$$r_2(x_1, x_2) = A_2 B_2 \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{B_2^2 x_1^2 + A_2^2 x_2^2}} \quad (2.24)$$

Dabei ist r_1 der variable Abstand vom Ursprung zu jedem Punkt auf der inneren Ellipse, r_2 entsprechend für die äußere Ellipse. Um den Faktor ε wird die Strecke $r_2 - r_1$ so weit gestreckt, daß der Punkt (x_1, x_2) im Abstand $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ vom Ursprung erreicht wird. Somit heißt ε *Streckungsfaktor*. Die Formel (2.22) läßt sich leicht verifizieren, indem man für r_1 und r_2 A_1 und A_2 oder auch B_1 und B_2 einsetzt. Der Streckungsfaktor berechnet sich aus (2.22) mit den Formeln für r_1 , r_2 und r zu:

$$\varepsilon = \frac{1 - A_1 B_1 \sqrt{\frac{1}{B_1^2 x_1^2 + A_1^2 x_2^2}}}{A_2 B_2 \sqrt{\frac{1}{B_2^2 x_1^2 + A_2^2 x_2^2}} - A_1 B_1 \sqrt{\frac{1}{B_1^2 x_1^2 + A_1^2 x_2^2}}} \quad (2.25)$$

Für Ellipsen gleicher Exzentrizitäten gilt die Beziehung $A_1 : B_1 = A_2 : B_2$, so daß sich (2.25) folgendermaßen vereinfacht:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\frac{A_1^2 x_2^2}{B_1^2} + x_1^2} - A_1}{A_2 - A_1} \quad (2.26)$$

Mit diesem Streckungsfaktor ε ist die Temperaturanfangsstörung in jedem beliebigen Ellipsenring wie gefordert kontinuierlich verteilt. Die Temperaturwerte zur Zeit $t = 0$ berechnen sich in jedem Punkt $(x_1, x_2) \in \Omega$ folgendermaßen:

$$T(t = 0) = (1 - \varepsilon) + 10^{-3} \cos \left(\xi \arctan \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \right) \sin(\pi \varepsilon) \quad (2.27)$$

ξ bezeichnet die *Periode* der Störung und gibt außerdem die Anzahl der Maxima der cos-Funktion an. Der Wert 10^{-3} hat sich als *Amplitude* dieser Funktion im vorliegenden Programm bewährt. Störfunktion und Streckungsfaktor sind so entwickelt worden, daß zur Zeit $t = 0$ die Anfangswerte auf dem Rand $\partial\Omega$ des Ellipsenringes mit den Randbedingungen $T = T_0$ und $T = T_0 + \Delta T$ übereinstimmen.

Für den Spezialfall eines *Kreisringes* mit den Radien R_1 und R_2 setzt man einfach:

$$R_1 = A_1 = B_1 \quad \text{und} \quad R_2 = A_2 = B_2$$

Für das *Kastenmodell* wird eine bewährte Anfangsstörung (Schmeling, 1991; Walzer und Hendel 1997a) verwendet:

$$T(t = 0) = (1 - x_2) + 10^{-2} \cos \left(\frac{\pi}{L} x_1 \right) \sin(\pi x_2) \quad (2.28)$$

L bezeichne die Länge des Rechteckgebietes, die dimensionslose Höhe sei 1, so daß der Term $(1 - x_2)$ einen kontinuierlichen Temperaturverlauf von 1 am unteren Rand bis 0 am oberen Rand beschreibt. Der cos-sin-Term bewirkt eine Störung der Temperatur im gesamten Gebiet zum Zeitpunkt $t = 0$. Ohne diese Anfangsstörung breitet sich die Temperatur im Kasten nur diffusiv aus, es entsteht keine thermische Konvektion.

2.4 Das Schwerfeld der Erde

Um das Schwerfeld der Erde im vorliegenden Modell berücksichtigen zu können, müssen Schwerelinien orthogonal zu jeder Ellipse einer Ellipsenschar angegeben werden. Es wird ein Ellipsenring betrachtet, der aus Ellipsen gleicher Exzentrizität besteht. In jedem Punkt (x_0, y_0) existiert eine Tangente der Gleichung:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

die sich äquivalent umformen läßt zu:

$$y = \left(1 - \frac{xx_0}{a^2}\right) \cdot \frac{b^2}{y_0}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2} \cdot x + \frac{b^2}{y_0}$$

Die Steigung der Tangente in dem Punkt (x_0, y_0) beträgt also $-\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}$.

Es sei f die gesuchte Funktion, die senkrecht auf allen Ellipsen steht. Sie hat im Punkt x_0 die Steigung $f'(x_0)$. Um die geforderten Bedingungen zu erfüllen, muß folgende Orthogonalitätsrelation gelten:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{x_0 b^2}{f(x_0) a^2} \end{pmatrix} = 0$$

Sie ist äquivalent zu:

$$1 = \frac{x_0 \cdot f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot \frac{b^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{x_0 \cdot f'(x_0)}{f(x_0)}$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung besitzt die Lösungen:

$$f(x) = c \cdot x^{a^2/b^2}, \quad c = \text{const.} \quad (2.29)$$

Die Funktion f stellt für verschiedene Konstanten c diejenigen Linien dar, die orthogonal zu allen Ellipsen verlaufen (siehe Abbildung 2.1). In Bezug auf die

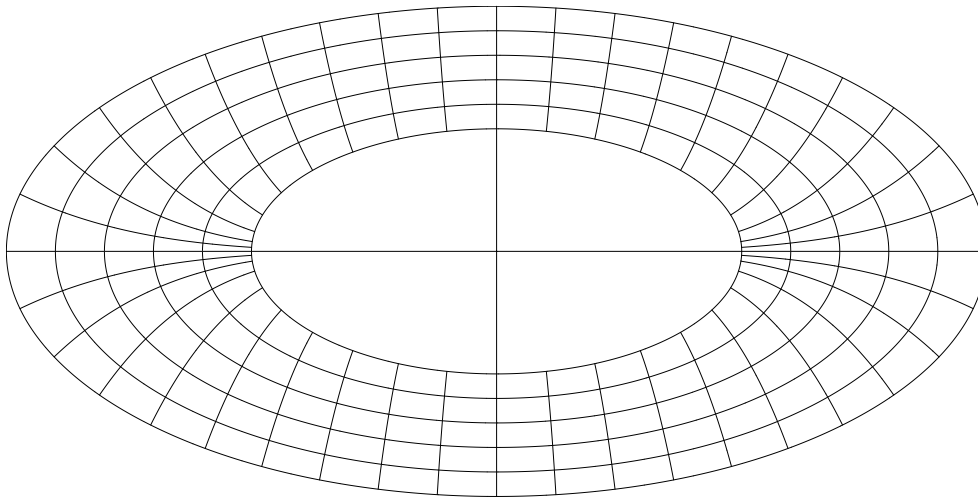


Abbildung 2.1: Schwerelinien eines Ellipsenringes.

Erde beschreibt f die Schwerelinien, die sich aus der Potenzfunktion (2.29) mit Exponent 1.006744 berechnen. Der Schwerevektor steht in jedem Punkt der Erde senkrecht auf der durch diesen Punkt führenden Ellipsoidoberfläche.

Im vorliegenden Programm berechnen sich die Schwerewerte innerhalb der Erde aus den in PREM (Dziewonski und Anderson, 1981) angegebenen Daten, wobei diese an der Erdoberfläche an die Internationale Schwereformel (Kertz, 1969) $g(\beta) = 978,0490 (1 + 0,0052884 \sin^2 \beta - 0,0000059 \sin^2(2\beta)) \text{ Gal}$ als Funktion der geographischen Breite β mit Hilfe des Streckungsfaktors angeglichen werden. Die Koordinaten für die Schwerewerte verlaufen entlang der Schwerelinien (Abbildung 2.1). Dieses Datenfeld wird bei der Berechnung der Rayleigh-Zahl berücksichtigt.

Kapitel 3

Numerische Methoden

Zur Lösung des Differentialgleichungssystems (2.5) wird in dieser Arbeit die Finite-Elemente-Methode als Diskretisierungsverfahren verwendet. Zu den Konvektionsgleichungen wird eine Variationsformulierung aufgestellt, deren Matrixsystem unter Berücksichtigung der physikalischen Bedingungen implementiert wird. Für die ellipsoidische Erde wird ein geeignetes Gitter erzeugt, und zur Visualisierung der Ergebnisse wird ein neues Grafikprogramm eingeführt.

3.1 Die Finite-Elemente-Methode

Die Idee der Finite-Elemente-Methode besteht darin, das gegebene Grundgebiet geeignet in Teilgebiete aufzuteilen, in die sogenannten Elemente. Die Approximation der gesuchten Lösung setzt sich stückweise aus Polynomen zusammen, welche in den Knotenpunkten jedes Elementes interpoliert werden. Es werden diese Ansatzfunktionen in eine zum Differentialgleichungssystem äquivalente Funktionalgleichung eingesetzt, so daß ein System von linearen Gleichungen gelöst werden muß. Als Ergebnis erhält man eine Approximation der gesuchten Lösung in den Knoten des Gebietes.

Um physikalische Prozesse lokal zu modellieren, werden den Knoten eines Elementes physikalische Materialparameter zugeordnet, wie z.B. Dichte, seismische

Geschwindigkeit, Spannungs- und Deformationstensoren. Auf diese Weise analysiert Jahr (1998) die tektonische und isostatische Situation des Harzes. In der vorliegenden Arbeit werden globale Prozesse betrachtet. Die geophysikalischen Eigenschaften der Mantelkonvektion gelten für das gesamte zu untersuchende Gebiet.

Um die Programme zur Netzgenerierung und Diskretisierung der Differentialgleichungen besser verstehen zu können, wird zunächst die numerische Vorgehensweise der Finiten-Elemente-Methode erläutert (Ciarlet, 1978; Braess, 1992).

1. Schritt Das Grundgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ wird in Abhängigkeit der geometrischen und physikalischen Gegebenheiten in Teilgebiete K zerlegt. Abbildung 3.1 zeigt einige Beispiele. Durch diese Triangulation $\mathcal{T}_h = \{K_i\}_i$ entsteht ein diskretisiertes Gebiet $\Omega_h \subset \bar{\Omega}$, welches aus einer endlichen Anzahl von Elementen K besteht:

$$\bar{\Omega}_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$$

wobei h der größte Durchmesser aller Elemente ist.

Bei der Programmierung eines Finite-Elemente-Gitters muß darauf geachtet werden, daß die Elemente dieser Triangulation \mathcal{T}_h folgenden Bedingungen genügen:

$$(T1) \quad K^\circ \neq \emptyset \quad \forall K \in \mathcal{T}_h ,$$

$$(T2) \quad K_i^\circ \cap K_j^\circ = \emptyset \quad \text{für } i \neq j ,$$

$$(T3) \quad \text{für } i \neq j \quad \text{ist } \bar{K}_i \cap \bar{K}_j \quad \text{entweder}$$

(i) leer oder

(ii) eine gemeinsame Seite der Elemente K_i und K_j oder

(iii) eine gemeinsame Ecke der Elemente K_i und K_j .

Die Triangulationen \mathcal{T}_h werden als regulär vorausgesetzt, d.h. es existieren Konstanten c_0 , c_1 und c_2 , so daß $\text{dist}(\partial\Omega_h, \partial\Omega) \leq c_0 h^3$ und jedes Element $K \in \mathcal{T}_h$ einen Kreis mit Radius $c_1 h$ enthält und in einem Kreis vom Radius $c_2 h$ enthalten ist.

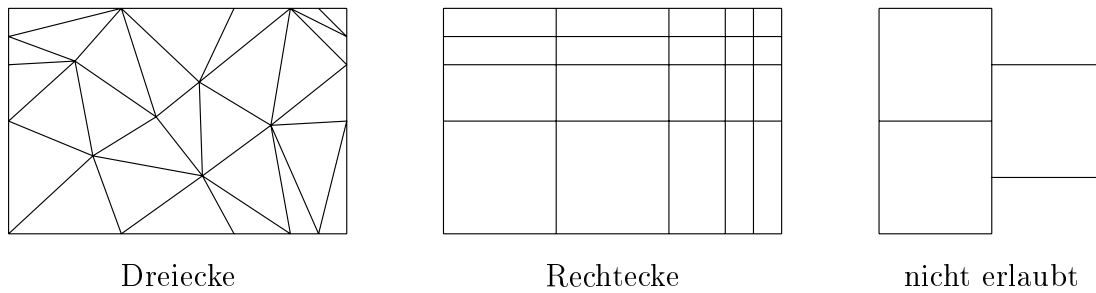


Abbildung 3.1: Triangulation.

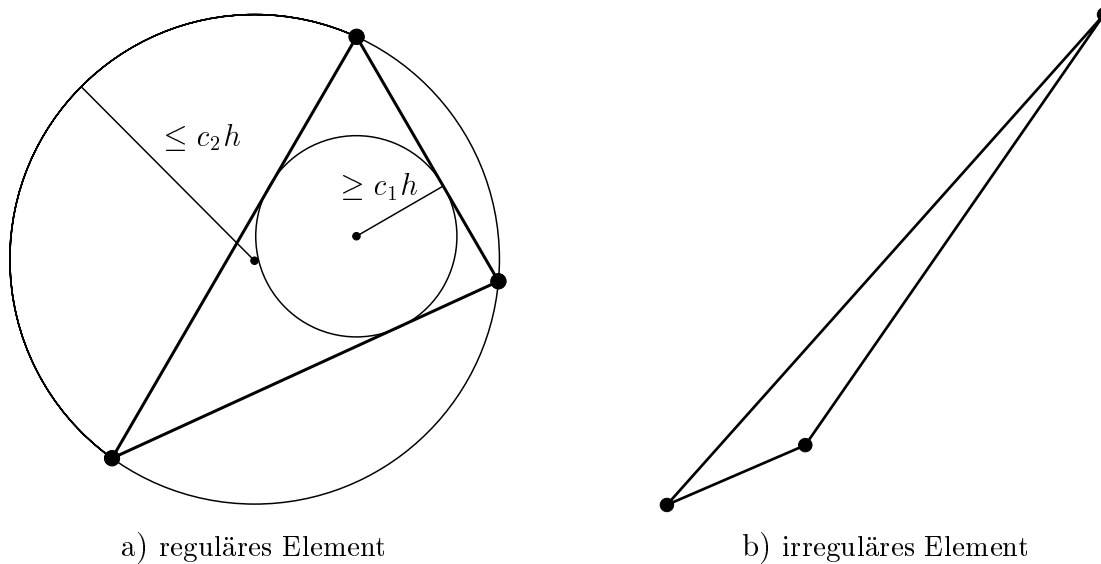


Abbildung 3.2: Regularität von Dreieckselementen.

2. Schritt Es werden für das Gebiet und das physikalische Problem geeignete Ansatzfunktionen gewählt, wobei meist Polynome Verwendung finden. Diese müssen beim Übergang von einem ins nächste Element problemabhängige Stetigkeitsbedingungen erfüllen. Außerdem muß die Menge aller Ansatzfunktionen eine zulässige Funktionsklasse bilden, die für die numerische Diskretisierung endlich dimensional sein muß. Dieser Finite-Elemente-Raum besteht in der vorliegenden Arbeit aus Polynomen zweiten Grades, da diese die gesuchte Lösung besser approximieren als lineare Polynome. Die L^∞ -Fehlerabschätzungen für Finite-Elemente-Approximationen elliptischer Randwertprobleme zweiter Ordnung liefern für den Fall linearer finiter Elemente eine Konvergenzordnung von $O(h^2 |\ln h|)$ (Nitsche, 1976), und bei quadratischen Elementen berechnet sich die Fehlerordnung zu

$O(h^3)$ (Scott, 1976).

3. Schritt Der Raum der quadratischen Polynome besitzt eine Basis, deren Funktionen N_k möglichst „kleine“ Träger haben. N_k ist im Knotenpunkt (x_k, y_k) gleich Eins und verschwindet in den übrigen Knoten:

$$N_k^i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{mit } j = k \\ 0 & \text{mit } j \neq k \end{cases} \quad (3.1)$$

Der obere Index i bezeichnet ein bestimmtes finites Element. Linearkombinationen dieser Basisfunktionen mit den Knotenvariablen als Koeffizienten stellen die Ansatzfunktionen dar. Es werden nur Lagrange-Finite-Elemente benutzt, d. h. es werden keine Ableitungen der Funktionswerte in den Knotenpunkten betrachtet. Für ein zweidimensionales Element mit acht Knotenpunkten (vgl. Abbildung 3.4), wie es in dieser Arbeit verwendet wird, hat die Ansatzfunktion folgende Darstellung:

$$v^i(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^8 v^i N_k^i(x_1, x_2)$$

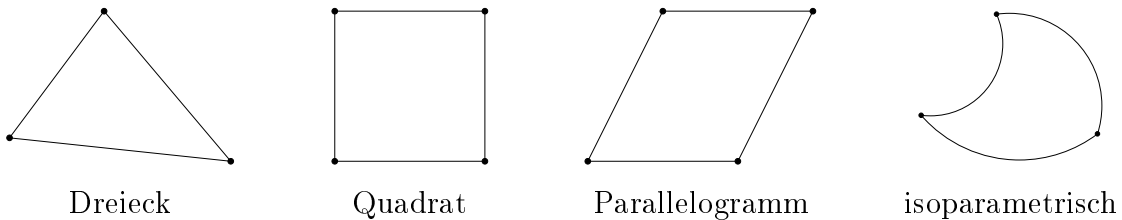


Abbildung 3.3: Knotenpunkte für lineare Ansatzfunktionen in \mathbb{R}^2 .

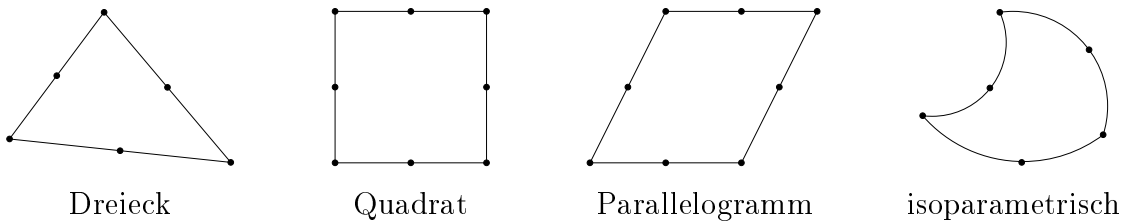


Abbildung 3.4: Knotenpunkte für quadratische Ansatzfunktionen in \mathbb{R}^2 .

4. Schritt Das zu lösende Differentialgleichungssystem wird zu einem Variationsproblem umgeformt, das Integral über Ω als Summe von Integralen über die einzelnen Elemente geschrieben, und die Ansatzfunktionen nach Substitution mit den Basisfunktionen in das Funktional eingesetzt, so daß daraus Elementmatrizen und Elementvektoren gebildet werden können. Schließlich bildet man unter Berücksichtigung der Numerierung der Knoten die Vereinigung über alle Elemente, so daß ein lineares Gleichungssystem entsteht.

$$\mathbf{S}\mathbf{v} + \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

Hier bezeichnet \mathbf{v} den Vektor der Knotenvariablen, \mathbf{S} die symmetrische und in der Regel sogar positiv definite Matrix und \mathbf{d} den Koeffizientenvektor der linearen Terme. Randbedingungen lassen sich hierbei auf einfachste Weise berücksichtigen, indem für die betreffenden Knotenvariablen entsprechende Werte vorgegeben werden, welche letztendlich in den Gebiets- und Randintegralen erscheinen.

Schwarz (1984, 1991) und Zienkiewicz (1984) behandeln den Algorithmus der finiten Elemente ausführlichst. Auch findet man dort geeignete numerische Lösungsverfahren zur Berechnung der Gesamtmatrizen und des Gesamtvektors, wie etwa die Methode der konjugierten Gradienten und das Gesamtschrittverfahren.

3.2 Variationsformulierung

Das die Konvektion beschreibende Differentialgleichungssystem (2.5) ist in der *klassischen Form* angegeben:

$$Lu = g \quad \text{in } \Omega, \quad Bu = \phi \quad \text{auf } \Gamma. \quad (3.3)$$

Hierbei bezeichne L einen elliptischen Differentialoperator und B einen Rand-Differentialoperator. Zu jeder klassischen Formulierung existiert ein äquivalentes Variationsproblem. Diese Aussage läßt sich leicht beweisen (Hackbusch, 1986), wobei man alle Rand- und Anfangsbedingungen, das Gebiet und die Glattheit des Randes berücksichtigen muß.

Ritz-Galerkin-Verfahren

Sei S ein Hilbertraum, dann lautet das *abstrakte Variationsproblem*, auch *Schwache Formulierung* genannt:

$$\text{Suche } u \in S, \text{ so da\ss } \forall \Phi \in S : \quad a(u, \Phi) = (f, \Phi), \quad (3.4)$$

wobei die Bilinearform durch

$$a(u, \Phi) := \int_{\Omega} \nabla u \nabla \Phi \, dx$$

und das L^2 -Skalarprodukt durch

$$(f, \Phi) := \int_{\Omega} f \Phi \, dx$$

gegeben sind.

Da es zu einem physikalischen Problem in der Regel keine exakte Lösung gibt, versucht man, die beste Näherungslösung zu finden. Das gelingt einem nur mit numerischen Hilfsmitteln auf einem endlich-dimensionalen Teilgebiet $S_h \in S$ durch eine approximierende Lösung $u_h \in S_h$. Das heißt, man formuliert ein *diskretes Problem*:

$$\text{Suche } u_h \in S_h, \text{ so da\ss } \forall \Phi_h \in S_h : \quad a_h(u_h, \Phi_h) = (f, \Phi_h), \quad (3.5)$$

wobei

$$a_h(u_h, \Phi_h) := \int_{\Omega_h} \nabla u_h \nabla \Phi_h \, dx$$

die zugehörige Bilinearform bezeichnet.

Das Ritz-Galerkin-Verfahren findet hier Anwendung, so daß sichergestellt ist, daß zu dem diskreten Problem (3.5) genau eine Lösung existiert, die Ritz-Galerkin-Lösung. Diese Aussage beweist Lax-Milgram (Ciarlet, 1978) für stetig elliptische Bilinearformen, wie sie hier gegeben sind.

Um Aussagen über die Qualität der Programmergebnisse machen zu können, muß der Diskretisierungsfehler $\|u - u_h\|_S$ berechnet werden (Ladyzenskaja, 1963).

Er gibt die Abweichung der Näherungslösung u_h des diskreten Problems von der exakten Lösung u an. Bei der Finiten-Elemente-Methode läßt sich dieser Fehler leicht bestimmen, da die Ritz-Galerkin-Lösung u_h direkt mit der exakten Lösung u zu vergleichen ist, im Gegensatz zum Differenzenverfahren, bei dem die Lösung u und die Gitterfunktion u_h in unterschiedlichen Mengen liegen.

Gemischte Finite-Elemente-Methode

Die Variationsformulierung der Navier-Stokes-Gleichung (2.5) lautet:

$$\begin{aligned} \text{Suche } \vec{v} \in S \quad \text{und} \quad p \in L^2(\Omega), \quad \text{so daß:} \\ a(\vec{v}, \Phi) + b(p, \Phi) &= (f, \Phi) \quad \forall \Phi \in S, \\ b(\vec{v}, \Psi) &= 0 \quad \forall \Psi \in L^2(\Omega) \end{aligned}$$

Will man die Ritz-Galerkin-Methode hier anwenden und den Raum S durch einen endlichdimensionalen Unterraum $S_h \subset S$ ersetzen, dann stellt man fest, daß das nicht so einfach realisierbar ist. Die Geschwindigkeit \vec{v} und der Druck p sind nämlich nicht notwendigerweise Elemente desselben Raumes. Daher betrachtet man das direkte Produkt zweier Hilberträume $S \times L^2(\Omega)$ und formuliert die *Gemischte Ritz-Galerkin-Methode*. Werden die endlich dimensionalen Unterräume $S_h \subset S$ und $L^2(\Omega_h) \subset L^2(\Omega)$ aus finiten Elementen gebildet, dann nennt man dieses diskrete Problem *Gemischte Finite-Elemente-Aufgabe*.

$$\begin{aligned} \text{Suche } \vec{v}_h \in S_h \quad \text{und} \quad p_h \in L^2(\Omega_h), \quad \text{so daß:} \\ a(\vec{v}_h, \phi_h) + b(p_h, \phi_h) &= (f, \phi_h) \quad \forall \phi_h \in S_h, \\ b(\vec{v}_h, \psi_h) &= 0 \quad \forall \psi_h \in L^2(\Omega_h) \end{aligned}$$

Sie ist äquivalent zum Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} A_h & B_h \\ B_h^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit den Matrizen und Vektoren

$$\begin{aligned} A_{h,ij} &:= a(b_j^S, b_i^S), \quad B_{h,ik} := b(b_k^{L^2(\Omega)}, b_i^S), \quad f_i := f(b_i^S) \\ (1 \leq i, j \leq N_{S,h}, \quad 1 \leq k \leq N_{L^2(\Omega),h}) \end{aligned}$$

und den geeigneten Basen von S_h und $L^2(\Omega_h)$

$$\{b_i^S, \dots, b_{N_{S,h}}^S\} \quad \text{und} \quad \{b_1^{L^2(\Omega)}, \dots, b_{N_{L^2(\Omega),h}}^{L^2(\Omega)}\}$$

$$N_{S,h} := \dim S_h, \quad N_{L^2(\Omega),h} := \dim L^2(\Omega_h), \quad N_{S,h} \geq N_{L^2(\Omega),h}$$

Die gemischte Finite-Elemente-Methode mußte in das Programm der vorliegenden Arbeit eingebaut werden, da andernfalls singuläre bzw. instabile Gleichungssysteme auftraten. Ein hinreichendes und notwendiges Kriterium für die Lösbarkeit dieses diskreten Problems ist die Brezzi-Bedingung (Brezzi, 1974; Fletcher, 1984; Hackbusch, 1986). Die Stabilität der Diskretisierung ist hiermit gesichert.

Variationsformulierung der Konvektionsgleichungen

Die in Kapitel 2.1 aus den Erhaltungssätzen hergeleiteten Differentialgleichungen bilden zusammen mit den Randbedingungen und Anfangswerten aus Kapitel 2.3 ein einfaches Modell zur Beschreibung der thermischen Konvektion im gesamten Erdmantel. Das Differentialgleichungssystem (2.5) läßt sich im zweidimensionalen Raum bezüglich der Basis B^* (vgl. Kapitel 2.2) folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\eta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(2\eta \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} p &= 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\eta \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(2\eta \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} p - Ra T &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} v_2 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} T - \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} - H &= 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dieses elliptisch parabolische Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung (Fletcher, 1991; Quarteroni & Valli, 1994) besteht aus vier Gleichungen mit vier Unbekannten, den Geschwindigkeitskomponenten v_1 und v_2 , dem Druck p und der Temperatur T . An dieser Stelle ist es in der Literatur üblich (siehe z. B. Chorin, 1968), eine Stromfunktion einzuführen, um die Berechnungen von vier Gleichungen in primitiven Variablen zu umgehen. Der Druck wird eliminiert, und man

erhält zwei Differentialgleichungen vierter Ordnung. Ausgehend von einem Anfangstemperaturfeld wird abwechselnd die Strömungsgleichung für ein bekanntes Temperaturfeld und die Temperaturgleichung für ein bekanntes Geschwindigkeitsfeld berechnet. Bei dieser Vorgehensweise pro Zeitschritt verliert man beim Differenzieren an Genauigkeit, aber der entwicklungs- und programmiertechnische Aufwand ist geringer. Die sogenannte biharmonische Gleichung könnte man theoretisch auch mit der Finiten-Elemente-Methode lösen, aber die Funktionen müßten dabei als genügend glatt vorausgesetzt werden. Bei quadratischen finiten Elementen hieße das, die Funktionen müßten dreimal stetig differenzierbar sein. Und diese Bedingung läßt sich nur für ganz einfache Gebiete mit genügend glattem Rand realisieren, für einen Kreis schon nicht mehr (Girault und Raviart, 1986).

Möchte man die biharmonische Gleichung im dreidimensionalen Raum berechnen, muß $-\nabla \cdot \psi = 0$ als zusätzliche Gleichung eingeführt werden (Grunzburger, 1989). Mathematisch ist das Problem mit der Stromfunktion ψ im Dreidimensionalen noch nicht vollständig analysiert worden, da ψ in diesem Fall einen Vektor bildet.

Entsprechend der Äquivalenz von (3.3) und (3.4) existiert zu dem dimensionslosen Differentialgleichungssystem (3.6) eine Variationsformulierung, die für numerische Berechnungen als diskretes Problem (3.5) betrachtet wird. Die praktische Umrechnung dieser Äquivalenz besteht im Prinzip darin, obige Gleichungen zu integrieren und mit Testfunktionen $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)$ zu multiplizieren. Dieses Produkt liefert eine Summe aus mehreren Integralen, auf die jeweils folgende Greensche Formel angewandt wird. Dabei entstehen Randintegrale, in die die klassischen Randbedingungen eingesetzt werden.

Satz: Sei Ω ein Gebiet mit glattem Rand Γ , $u \in C^1(\overline{\Omega})$ und $v \in C^2(\overline{\Omega})$, dann gilt die Greensche Formel:

$$\int_{\Omega} u \Delta v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \, d\Gamma \quad (3.7)$$

(Erste Greensche Formel nach Green (1828))

$\vec{n}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet die äußere Normalenrichtung in $\vec{x} \in \Gamma$, d. h. \vec{n} ist ein Einheitsvektor senkrecht zur Tangentialhyperebene in \vec{x} und zeigt nach außen.

$\frac{\partial v(\vec{x})}{\partial \vec{n}} := \vec{n} \cdot \nabla v$ ist die Normalenableitung von v in $\vec{x} \in \Gamma$. Mit $u \cdot v$ ist das innere Produkt zweier Vektoren u und v definiert.

Die Variationsformulierung der Konvektionsgleichungen lautet:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left\{ \eta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} \right) + 2\eta \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + 2\eta \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right. \\
& \quad - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} p - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} p - Ra \Phi_2 T - \Phi_3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \\
& \quad \left. + \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_2} \frac{\partial T}{\partial x_2} + \Phi_4 \left(v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + \Phi_4 \frac{\partial T}{\partial t} - \Phi_4 H \right\} dx + \\
& \int_{\partial \Omega} \left\{ -\eta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) (\Phi_1 n_2 + \Phi_2 n_1) - 2\eta \Phi_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} n_1 - 2\eta \Phi_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} n_2 \right. \\
& \quad \left. \Phi_1 p n_1 + \Phi_2 p n_2 - \Phi_4 \left(\frac{\partial T}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2} n_2 \right) \right\} d\Gamma = 0 \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Das hieraus entstehende Matrixsystem wird nun implementiert, wie im 4. Schritt in Kapitel 3.1 erläutert (Gartling und Becker, 1976; Zienkiewicz, 1984). Für alle Zeitschritte werden die Lösungen iterativ berechnet (Hackbusch, 1991).

3.3 Netzgenerierung für verschiedene Gebiete

Ein großer Vorteil der Finite-Elemente-Methode gegenüber anderen Diskretisierungsmethoden ist die Unterteilung eines Gebietes in beliebige Teilgebiete. Es müssen dabei die in Kapitel 3.1 genannten Bedingungen erfüllt sein. Die Elemente der Triangulation können beliebige Formen im Zweidimensionalen und Dreidimensionalen annehmen (vgl. Abbildungen 3.3 und 3.4), also auch aus krummlinigen Rändern bestehen, wie z.B. isoparametrische Elemente (Ciarlet, 1978). Dadurch ist eine optimale Approximation der Ränder des Gebietes gewährleistet.

Ein weiterer Vorteil besteht in der lokalen Gitterverfeinerung, Teilgebiete beliebig oft in weitere Teilgebiete aufzuteilen. Damit erzielt man einerseits eine

Minimierung der Fehlerabweichungen in Problemgebieten, als auch andererseits eine bessere Approximation der Ränder an beliebigen Stellen des Gebietes. In Teilgebieten, in denen Funktionswerte von Knoten zu Knoten große Unterschiede aufweisen, wie z.B. bei der temperatur- und druckabhängigen Viskosität im Erdmantel, ist eine Verfeinerung des Netzes günstig, um eine genauere Lösung zu finden.

In der vorliegenden Arbeit wird das Gitter so konstruiert, daß keine Teilgebiete an den Rändern unberücksichtigt bleiben. Daher liefert das Programm exakte Ergebnisse bis zu den Rändern hin. Dies ist eine wichtige Voraussetzung, um die Konvektion an den Rändern studieren zu können. Würde ein äquidistantes Gitter gewählt, so wiese die Geometrie an den Rändern Fehler auf, die das numerische Verhalten der Auf- und Abstiegszonen dort beeinflussen würden.

Der Programmablauf für die Netzgenerierung ist in folgende Schritte gegliedert:

- (i) Das Grundgebiet wird festgelegt und die Anzahl der Elemente eingelesen.
- (ii) Zu jedem Knotenpunkt werden die zugehörigen Koordinaten bestimmt, indem ein Indexgitter auf das zugrundeliegende Gebiet abgebildet wird.
- (iii) Die Knoten sowohl der quadratischen Elemente als auch der Linienelemente werden numeriert.
- (iv) Dirichlet-Randbedingungen werden definiert.

In Schritt(i) sind die Halbachsen eines Ellipsenringes oder die Radien eines Kreisringes einzugeben. Mit Hilfe einer Transformation (Schritt(ii)) lassen sich auf einfache Weise die Koordinaten der Knoten für jedes finite Element berechnen, sowohl für die zweidimensionalen Elemente (vgl. Abbildung 3.4) als auch für die eindimensionalen Randelemente, die sogenannten Linienelemente. Die Numerierung der Knoten in Schritt(iii) muß geschickt durchgeführt werden, um die Bandbreite der Gesamtmatrix zu minimieren, was letztendlich dazu führt, daß man Rechenaufwand und Speicherplatz sparen kann. Schwarz (1984) gibt hierzu

den Algorithmus von Cuthill-McKee an, der die Bandbreite durch optimale Nummerierung der Knotenvariablen reduziert. In Schritt(*iv*) können Knoten durch vorgegebene Zahlenwerte belegt werden.

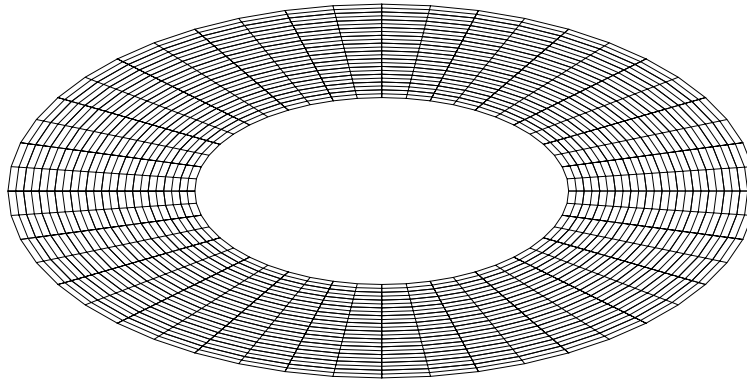


Abbildung 3.5: Gitter für einen Ellipsenring.

Die hier konstruierte Netzgenerierung erlaubt nur Ellipsenringe, bei denen innere und äußere Ellipse gleiche Exzentrizität haben. In Abbildung 3.5 ist das Gitter für einen Ellipsenring dargestellt. Es bedeckt das gesamte Gebiet.

3.4 Das Programmpaket *VECFEM*

Das benutzte Programm *VECFEM* (**VEC**torized **F**inite **E**lement **M**ethod) von Groß (1996) dient zur numerischen Lösung linearer und nichtlinearer Funktionalgleichungen ein-, zwei- und dreidimensionaler Gebiete (Groß und Sternecker, 1991). Als Löser dienen die Newton-Raphson-Methode und verschiedene Arten von CG-Verfahren, z.B. die Biconjugate-Gradient-Methode (BCG). Da bei Konvektionsproblemen Nullen auf der Hauptdiagonalen der Gesamtmatrix auftreten können, hat sich die von Freund und Nachtigal (1991) entwickelte Quasi-Minimal-Residual-Methode (QMR) als optimaler Löser herausgestellt. Durch die Multiplikation des Gleichungssystems mit der Transponierten der Koeffizientenmatrix entsteht eine symmetrische und positiv definite Matrix. Der Nachteil ist eine zusätzliche Matrixmultiplikation, was dem leistungsstarken *VECFEM* jedoch keine Probleme bereitet.

Eine grafische Benutzeroberfläche `xvem` erleichtert die Bedienung von *VECFEM*, verschiedene Optionen auszuwählen, Rand- und Anfangswertprobleme als Variationsformulierung einzugeben und Routinen der *VECFEM* Library aufzurufen. `xvem` benötigt einen Fortran Compiler, Tcl/Tk und ein Programm für mathematische Berechnungen, z.B. `MAPLE`. Zur grafischen Darstellung wäre ein Visualisierungsprogramm empfehlenswert, z.B. `DataExplorer`, `gnuplot` oder `sde` (Kapitel 3.5). Für `DataExplorer` und `gnuplot` enthält `xvem` bereits eine Schnittstelle. Zur Triangulierung verwendet man bekannte Netzgeneratoren, z.B. *I-DEAS*, oder programmiert selber ein Gitter entsprechend Kapitel 3.3.

Anhand eines Ausgabeprotokolls läßt sich die Lösungsprozedur kontrollieren. Für jeden Iterationsschritt wird eine a-posteriori-Fehlerabschätzung ermittelt, um die Stabilität der Daten zu gewährleisten. In Zeitrichtung wird die optimale Schrittweite und Konsistenzordnung selbständig von *VECFEM* gefunden.

3.5 Programme zur grafischen Auswertung

Für die grafische Auswertung wurde ein Programm namens `sde` entwickelt, das sich zur zweidimensionalen Darstellung ein- oder zweidimensionaler Datenfelder auf Finite-Elemente-Netzen eignet. Als Eingabe erfordert dieses Programm ein Datenfile mit der Beschreibung des Finite-Elemente-Netzes sowie die entsprechenden Datenfelder an jedem Punkt des Netzes. Bei Konvektionsmodellierungen liegen die eindimensionalen Datenfelder für die Temperatur und den Druck sowie das zweidimensionale Datenfeld für die Geschwindigkeit vor. Eindimensionale Daten werden durch Farben, zweidimensionale Daten werden durch Vektoren dargestellt. Das Programm `sde` erlaubt die Auswahl einzelner Zeitschritte, verschiedener (kontinuierlicher) Farbspektren, beliebig genauer Auflösungen und frei wählbarer Skalierungen. Als Ausgabe können entweder PostScript oder Encapsulated PostScript Files erzeugt werden. Letztere lassen sich beliebig skalieren und können direkt in L^AT_EX eingebunden werden. Darüberhinaus liefert das Programm `sde` die über das Netz gewichteten Mittelwerte der Datenfelder, z.B. zur Berechnung von v_{rms} . Im Vergleich zu anderen Programmen zur grafischen Auswertung

ist `sde` wesentlich schneller, besser konfigurierbar und erzeugt darüberhinaus wesentlich kleinere Ausgabedateien.

Für die grafische Darstellung von Funktionsverläufen, wie z.B. der v_{rms} -Kurven, wurde das Programm `gnuplot` verwendet, welches frei verfügbar im Internet erhältlich ist. Als Eingabe benötigt dieses Programm lediglich Paare von x_1 - und x_2 -Koordinaten. Als Ausgabe kann ein Encapsulated PostScript File erzeugt werden. Für die Darstellung von Funktionen sind eine Vielzahl unterschiedlicher Parameter beliebig einstellbar.

Kapitel 4

Ergebnisse

4.1 Rechteckgebiet

Die Mantelkonvektion wird in einem abgeschlossenen, zweidimensionalen Rechteckgebiet mit Seitenverhältnis 1 : 1 simuliert, wobei das dimensionslose Differentialgleichungssystem (2.5), die Randbedingungen (2.13), (2.14) und die Temperaturanfangswerte (2.28) das System definieren. Es wird eine konstante Viskosität, eine konstante Schwerebeschleunigung von $|\vec{g}| = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ und Heizung von unten angenommen. In dimensionsloser Form sei im ersten Lauf die Rayleigh-Zahl $Ra = 10^4$ und im zweiten Lauf $Ra = 10^5$ gesetzt.

Für den ersten Lauf zeigt die Abbildung 4.1 das Temperaturfeld und das Geschwindigkeitsfeld als Lösungen des Differentialgleichungssystems der Mantelkonvektion. Es bildet sich genau eine Konvektionszelle, wobei die Anfangsbedingung so gewählt worden ist, daß sie sich links herum dreht. Da in der Differentialgleichung die Geschwindigkeit mit der Temperatur gekoppelt ist, entsteht ein konvektiver Aufstrom an der rechten Kastenwand. Drei Zeitpunkte für die Entwicklung des Temperaturverlaufs werden in Abbildung 4.1 wiedergegeben, wobei der letzte den stationären Zustand darstellt. Dieser ist dadurch charakterisiert, daß sich der Betrag der Geschwindigkeit mit der Zeit nicht ändert.

Für den zweiten Lauf einer erhöhten Rayleigh-Zahl von 10^5 sind das Tempera-

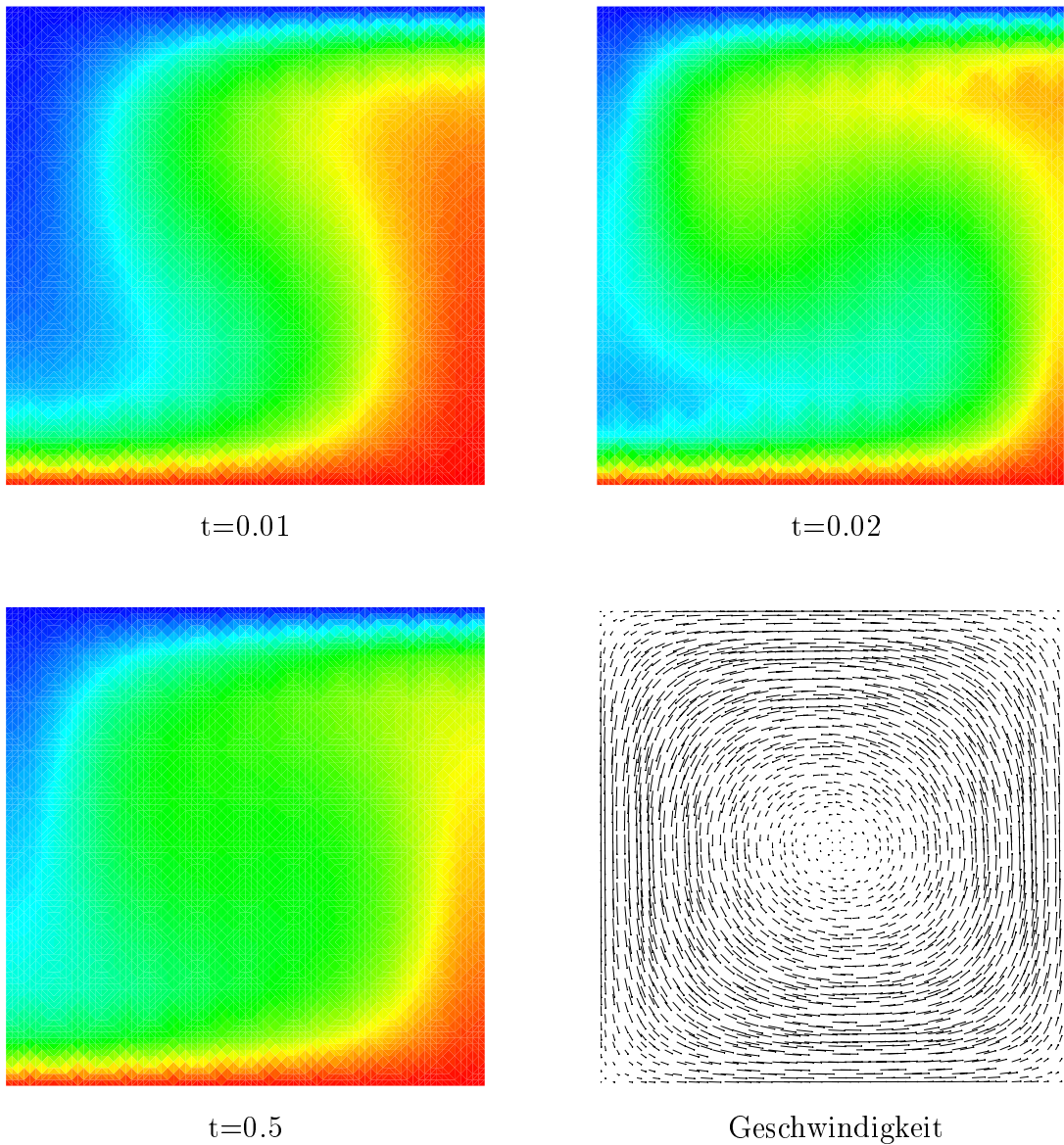


Abbildung 4.1: Zeitliche Entwicklung der Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder für $Ra = 10^4$, dimensionslose Zeit.

turfeld und das Geschwindigkeitsfeld der Konvektion in Abbildung 4.2 grafisch dargestellt. Die Materie ist weniger viskos, und die Geschwindigkeit ist höher als im ersten Lauf, wodurch die Materie weiter an den Rand gedrückt wird, d.h. die Konvektionszelle sieht eckiger aus und besitzt außen viel größere Geschwindigkeitsbeträge als innen. Dieses Verhalten beeinflusst das Temperaturfeld. Die Aufstiegszone ist durch einen schmalen Schlot gekennzeichnet und breitet sich an

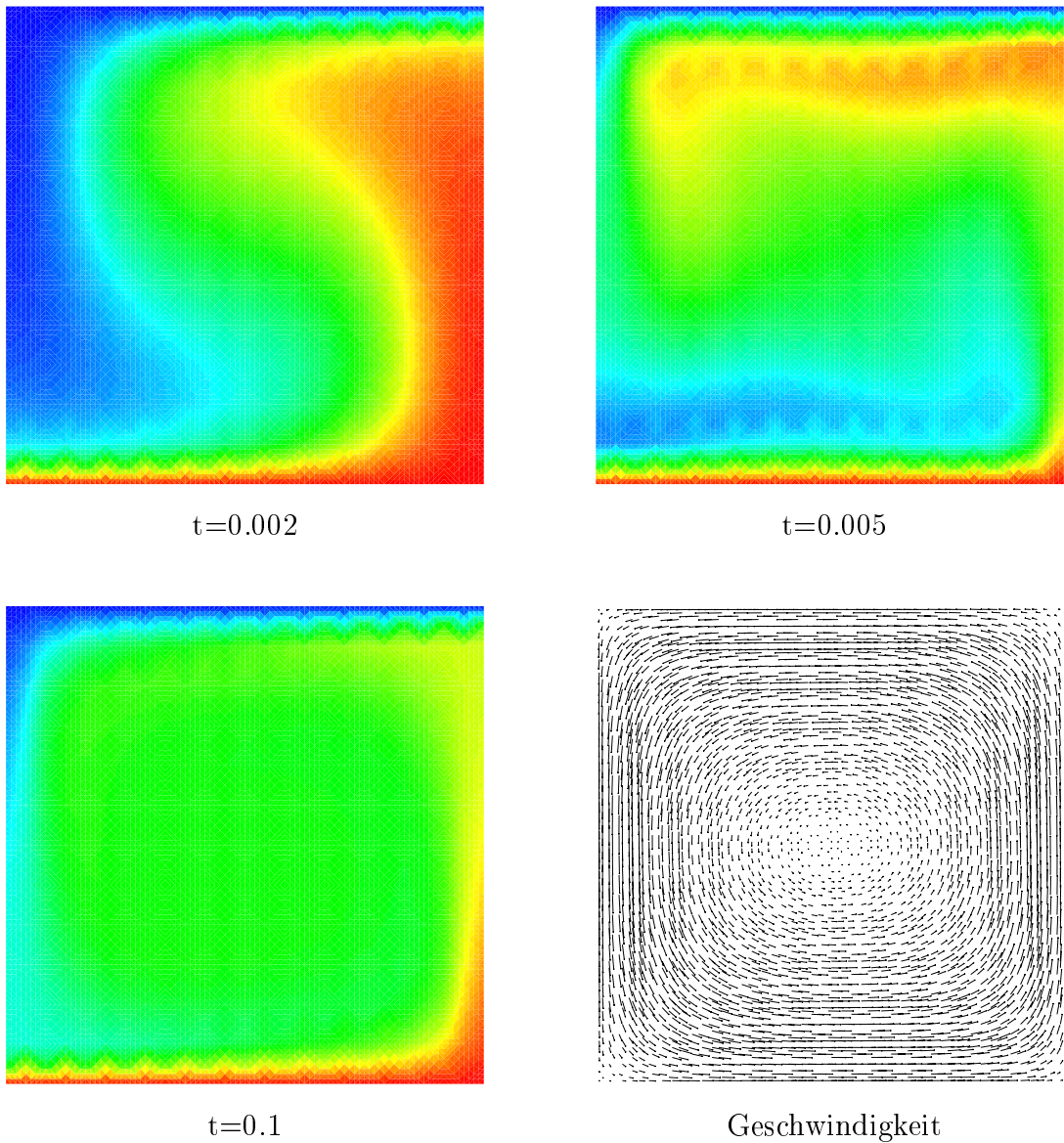


Abbildung 4.2: Zeitliche Entwicklung der Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder für $Ra = 10^5$, dimensionslose Zeit.

der Oberfläche weit aus. Im stationären Zustand lassen sich diese Unterschiede anhand der Abbildungen 4.1 und 4.2 sehr gut erkennen. Vangelov und Jarvis (1994) machen die gleiche Feststellung bei einer Serie von Programmläufen mit den Rayleigh-Zahlen $R = 10^4, 3 \cdot 10^4, 10^5, 10^6$. Sie kommen zu dem Befund, je höher die Rayleigh-Zahl, desto dichter liegen die Isothermen am Rand des Gebietes, obgleich die innere Temperaturdifferenz ungeändert bleibt.

Auswertung und Diskussion

Zum Vergleich der Ergebnisse wird als signifikante Größe die über das gesamte Gebiet Ω räumlich gemittelte Geschwindigkeit v_{rms} benutzt, die wie folgt definiert ist:

$$v_{rms} = \left(\int_{\Omega} (v_1^2 + v_2^2) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

Da die finiten Elemente alle unterschiedliche Größe und Form haben können (vgl. Abbildungen 3.1 und 3.4), muß für die Berechnung des Integrals (4.1) die Geschwindigkeit über die Fläche eines jeden finiten Elementes gemittelt werden, und v_{rms} ergibt sich dann als das Mittel aller dieser Werte. Es gilt:

$$v_{rms} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \int_{E_i} (v_1^2 + v_2^2) dE_i} \quad (4.2)$$

Das Integral $\int_{E_i} (v_1^2 + v_2^2) dE_i$ läßt sich dabei für jedes finite Element E_i einfach mittels geeigneter numerischer Integrationsmethoden bestimmen. Der zeitliche Verlauf der räumlich gemittelten Geschwindigkeit v_{rms} ist für beide Läufe in den Abbildungen 4.3 und 4.4 wiedergegeben. Nach einer kurzen Einschwingphase stellt sich jeweils ein stationärer Zustand der Mantelkonvektion ein. Dabei tritt im zweiten Lauf aufgrund der zehnfach höheren Rayleigh-Zahl ein wesentlich höherer Wert für v_{rms} auf. Da die gleichen Gitter- und Parametervoraussetzungen wie in dem Benchmarkmodell von Blankenbach et al. (1989) gewählt worden sind, ist eine gute Übereinstimmung der v_{rms} -Kurven festzustellen.

Bei dem Benchmarkmodell von Blankenbach et al. (1989) wurde ein Standardproblem der Mantelkonvektion mittels einer Vielzahl unterschiedlicher Implementierungen numerischer Verfahren gelöst, und die Ergebnisse wurden miteinander verglichen. Das am häufigsten bei diesem Benchmarktest benutzte Verfahren war die Finite-Differenzen-Methode; in zwei Implementationen wurde ein Finite-Elemente-Verfahren verwendet. Es zeigt sich, daß die Finite-Elemente-Verfahren den Finite-Differenzen-Methoden hinsichtlich der Genauigkeit und Konvergenzordnung deutlich überlegen sind. So liefert das Finite-Elemente-Verfahren für

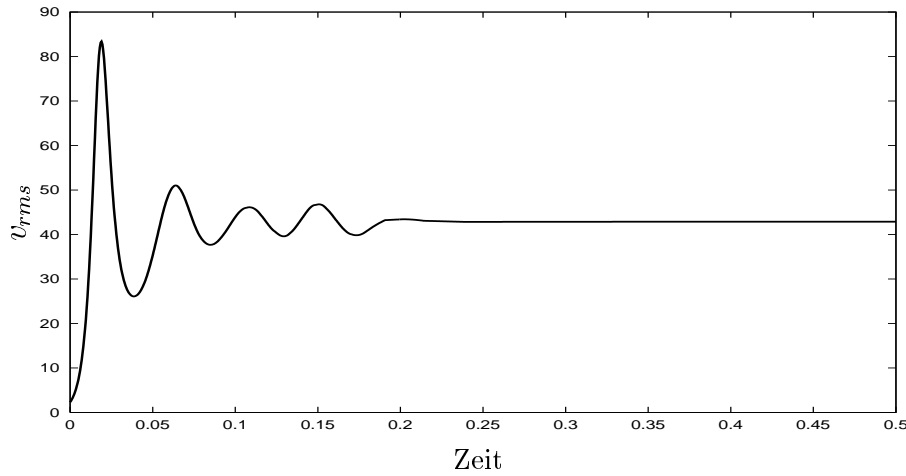


Abbildung 4.3: Zeitliche Entwicklung der dimensionslosen, räumlich gemittelten Geschwindigkeit v_{rms} mit $Ra = 10^4$.

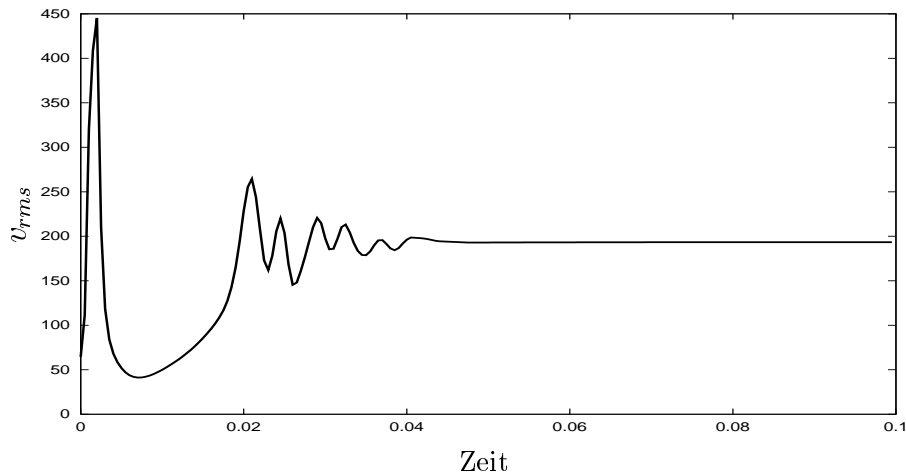


Abbildung 4.4: Zeitliche Entwicklung der dimensionslosen, räumlich gemittelten Geschwindigkeit v_{rms} mit $Ra = 10^5$.

dieses Benchmarkmodell beispielsweise schon auf einem 12×12 -Gitter genauere Ergebnisse als manche Implementationen der Finite-Differenzen-Methode auf einem 96×96 -Gitter.

Bei der Verifizierung der eigenen Ergebnisse werden die räumlich gemittelten Geschwindigkeiten v_{rms} (Gleichung 4.2) den Ergebnissen des Benchmarkmodells gegenübergestellt. Ein Vergleich in Tabelle 4.1 bestätigt eine hervorragende Übereinstimmung. In beiden durchgeführten Läufen war die Abweichung des eigenen

Modellergebnisses vom Wert des Benchmarkmodells geringer als 0.06%.

Tabelle 4.1: Gegenüberstellung der Ergebnisse des Benchmarkmodells (Blankenbach, 1989) und des neuentwickelten Programms. Es werden die Werte für die räumlich gemittelte, dimensionslose Geschwindigkeit v_{rms} dargestellt.

Lauf	Rayleigh-Zahl	Gitter	Modellergebnisse v_{rms}	Benchmark v_{rms}	Abweichung
1a)	10^4	12×12	42.8740	42.879	0.012%
1b)	10^4	24×24	42.8659	42.865	0.002%
2a)	10^5	12×12	193.3294	193.378	0.025%
2b)	10^5	18×18	193.3532	193.237	0.06%

4.2 Kreisring

Durch die Modellierung der Konvektion in einem Kreisring wird der Mechanismus des Erdinneren viel realistischer wiedergegeben als dies in Kastenmodellen möglich ist. Betrachtet man die Erde als Kreisring mit $R_1 = 3465 \text{ km}$ und $R_2 = 6371 \text{ km}$ (Kertz, 1969) sowie die realistischen Eingangsparameter aus Tabelle 2.1, dann liefert das Programm Geschwindigkeiten in der Größenordnung der auf der Erde beobachteten Plattengeschwindigkeiten. Die Modellierung beginnt bei der Evolution der Erde vor $4.55 \cdot 10^9$ Jahren und endet im heutigen Erdzeitalter.

Die numerische Berechnung dieses globalen Konvektionsmodells beruht auf der Lösung des gekoppelten, nichtlinearen partiellen Differentialgleichungssystems (3.6). Die Kopplung besteht darin, daß die Auftriebskräfte in der Strömungsgleichung temperaturabhängig sind und der konvektive Term in der Wärmetransportgleichung von der Geschwindigkeit angetrieben wird. Dieses Zusammenspiel

bewirkt, daß sich die Temperatur mit der Strömung ausbreitet. Die Wärme verteilt sich also nicht nur diffusiv, sondern wird auch vom Geschwindigkeitsfeld transportiert.

4.2.1 Einfluß der Temperaturanfangsstörung

Für die 2D-Modellierung der Konvektion in einem Kreisring werden dieselben Voraussetzungen angenommen wie in dem Rechteckgebiet (Kapitel 4.1), nur die Form des Grundgebietes ändert sich. Es wird die Netzgenerierung aus Kapitel 3.3 zugrunde gelegt und ein Gitter von 48×24 Elementen gewählt. Vergleicht man in Tabelle 4.1 die Ergebnisse der Geschwindigkeiten für unterschiedlich feine Gitter, so liegen die Abweichungen bei 0.019% bzw. 0.012%. Ein Finite-Elemente-Gitter von 48×24 Elementen ist also fein genug, um sehr genaue Ergebnisse zu erzielen. Bei der Finiten-Elemente-Methode besteht jedes Element aus acht Knotenpunkten (vgl. Abbildung 3.4), so daß bei 48×24 Elementen die Funktionswerte in 3552 Gitterpunkten berechnet werden.

Die Ränder des Erdmantels als Grundgebiet bestehen aus der Kern-Mantel-Grenze und der Erdoberfläche. Es müssen keine künstlichen Seitenränder eingeführt werden, so daß großräumige Konvektionszellen entstehen können. Es wird Heizung von unten und Abkühlung von oben vorgeschrieben und außerdem die Viskosität als konstante Größe vorgegeben. Die Rayleigh-Zahl $Ra = \rho_0 \alpha g \Delta T d^3 / \eta_0 \kappa$ variiert mit der Differenz der Radien $R1$ und $R2$ des Kreisringes. Für die Schichtdicke d setzt man den Abstand $d = R2 - R1$ ein (Chandrasekhar, 1961). In dem Fall, daß der innere und der äußere Erdradius auf $R1 = 1$ und $R2 = 2$ skaliert sind, berechnet sich die Rayleigh-Zahl zu $Ra = 10^4$. Nach Griebel et al. (1995) ist die Ausbildung einer natürlichen Konvektion in dem Modell der Rayleigh-Bénard-Strömung unabhängig vom jeweiligen Experiment und betrachteten Fluid nur für Rayleigh-Zahlen $Ra \geq 1108$ möglich. Die zugrundeliegende Temperaturskala in Abbildung 4.5 wurde von 0 bis 1 skaliert, was den Werten 288 K und 4288 K entspricht. Im Erdmantel wird also eine Temperaturdifferenz von 4000 K angenommen. Das vorliegende Programm rechnet mit

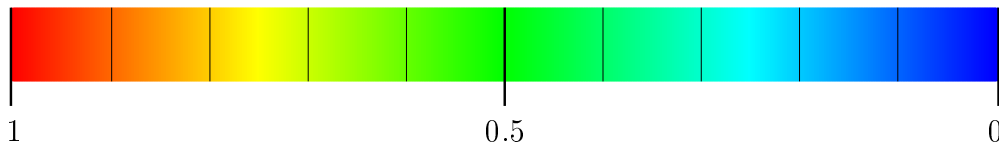


Abbildung 4.5: Temperaturskala für alle nachfolgenden Temperaturfelder. Die dimensionslosen Temperaturen von 0 bis 1 entsprechen den Werten 288 K bis 4288 K.

Zeiten von 0 bis 1 sowie einer Zeitschrittweite von 0.001. Die dimensionslosen Daten lassen sich gut mit den Modellen in der Literatur (Zebib et al., 1980; Jarvis, 1993, 1994) vergleichen. Es werden ähnliche Ergebnisse für die Geschwindigkeit erwartet, wie sie im Kastenmodell (Kapitel 4.1) diskutiert worden sind.

Variation der Periode der Temperaturanfängsstörung

Die Temperaturanfängsstörung (2.27) beschreibt den Zustand der Temperaturverteilung vor $4.55 \cdot 10^9$ Jahren. Es kann angenommen werden, daß diese numerische Störung auf der Erde zum Beispiel durch die D'' -Schicht hervorgerufen wird (Stacey und Loper, 1983; Kellogg und King, 1993). Der geringe Wert der Amplitude von 10^{-3} bewirkt eine Temperaturstörung von maximal 4 K gegenüber dem kontinuierlichen Temperaturverlauf. Im Kastenmodell lag eine zehnmal größere Temperaturstörung vor (siehe (2.28)). Zur Untersuchung der Periode ξ der \cos -Funktion (2.27) ist das Programm `sde` hilfreich. Die Abbildung 4.6 skizziert den Störterm von (2.27) für die Perioden 2, 3, 4 und 6. Zur Orientierung ist das zugrundeliegende Finite-Elemente-Gitter eingezeichnet. Die Maxima der \cos -Funktion sind rot dargestellt, die Minima blau. Sie weisen eine symmetrische Anordnung auf, da die \cos -Funktion gleichmäßige Schwingungen beschreibt. Es ist zu erkennen, daß die geraden Perioden die Anzahl der Maxima bestimmen. Bei ungeraden Periodenzahlen wie 3, 5, 7 besitzt die Störfunktion bedingt durch die Periodizität der \arctan -Funktion 2, 4, 6 Maxima. Es ist festzustellen, inwieweit diese Maxima die Aufstiegszonen der Konvektion beeinflussen.

Für die **Periode 2** ist in Abbildung 4.7 der dimensionslose zeitliche Verlauf des Temperaturfeldes der Mantelkonvektion dargestellt. Das Geschwindigkeitsfeld in

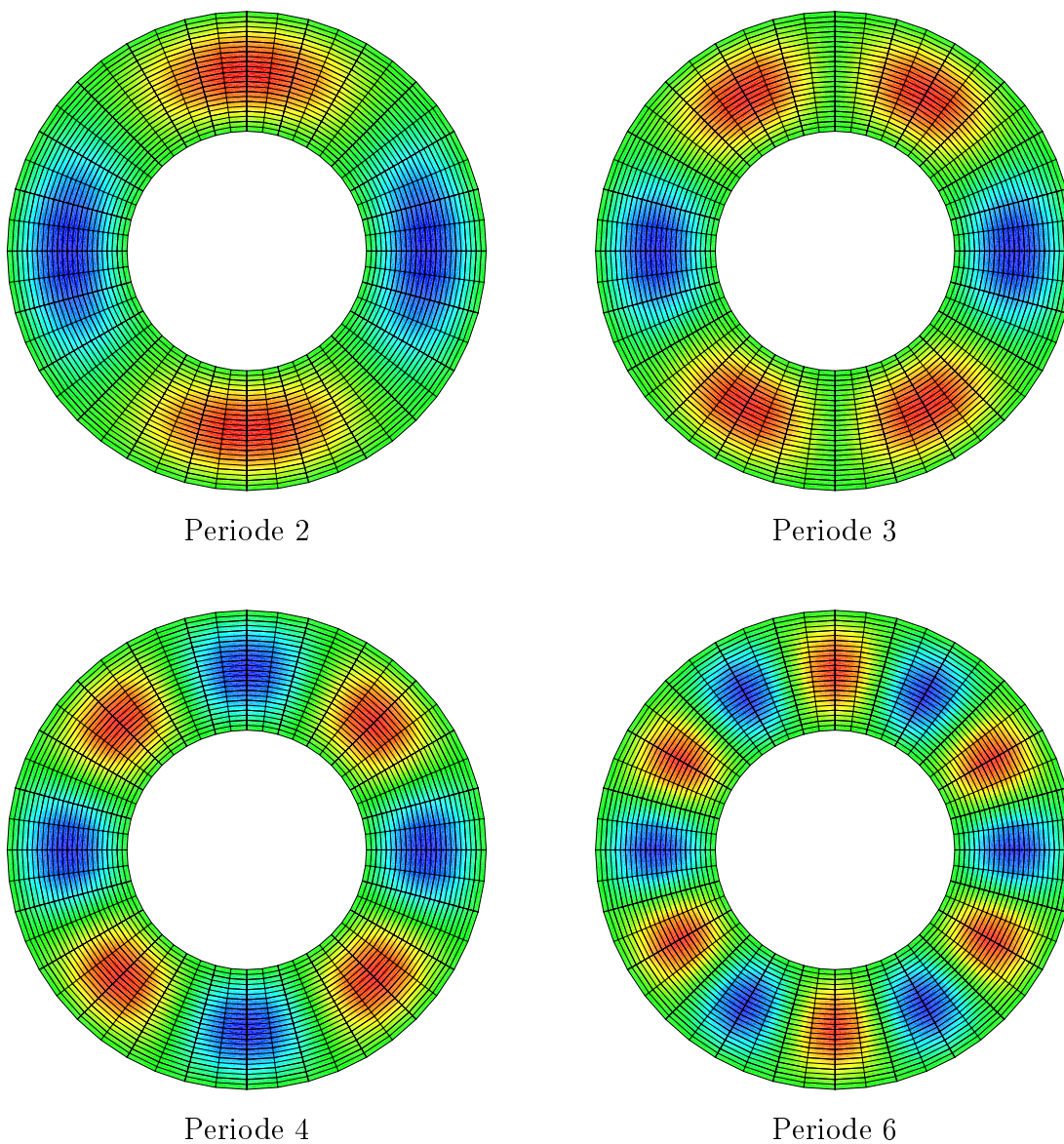


Abbildung 4.6: Maxima (rot) und Minima (blau) der Temperaturanfängsstörung verschiedener Perioden, Kreisring.

Abbildung 4.8 beschreibt den durch die Konvektion vorangetriebenen Materietransport. Man beobachtet, daß über den gesamten Zeitraum vier Konvektionszellen erhalten bleiben. Die Temperaturdarstellung in Abbildung 4.7 zeigt zwei konvektive Aufstiegszonen und zwei kalte Abstrombereiche. Als Anfangsbedingung ist eine kontinuierliche Temperaturverteilung gegeben, nach einer dimensionslosen Zeit von $t = 0.05$ treten erste Störungen auf, die sich bei $t = 0.06$ bereits bis

zur Oberfläche erstrecken, und nach 70 Zeitschritten erkennbare Aufstiegszonen bilden. Vom letzteren Zeitpunkt an treten keine großen Temperaturänderungen auf, es verteilt sich die Wärme lediglich im gesamten Mantel. Ab $t = 0.21$ stellt sich der stationäre Zustand ein.

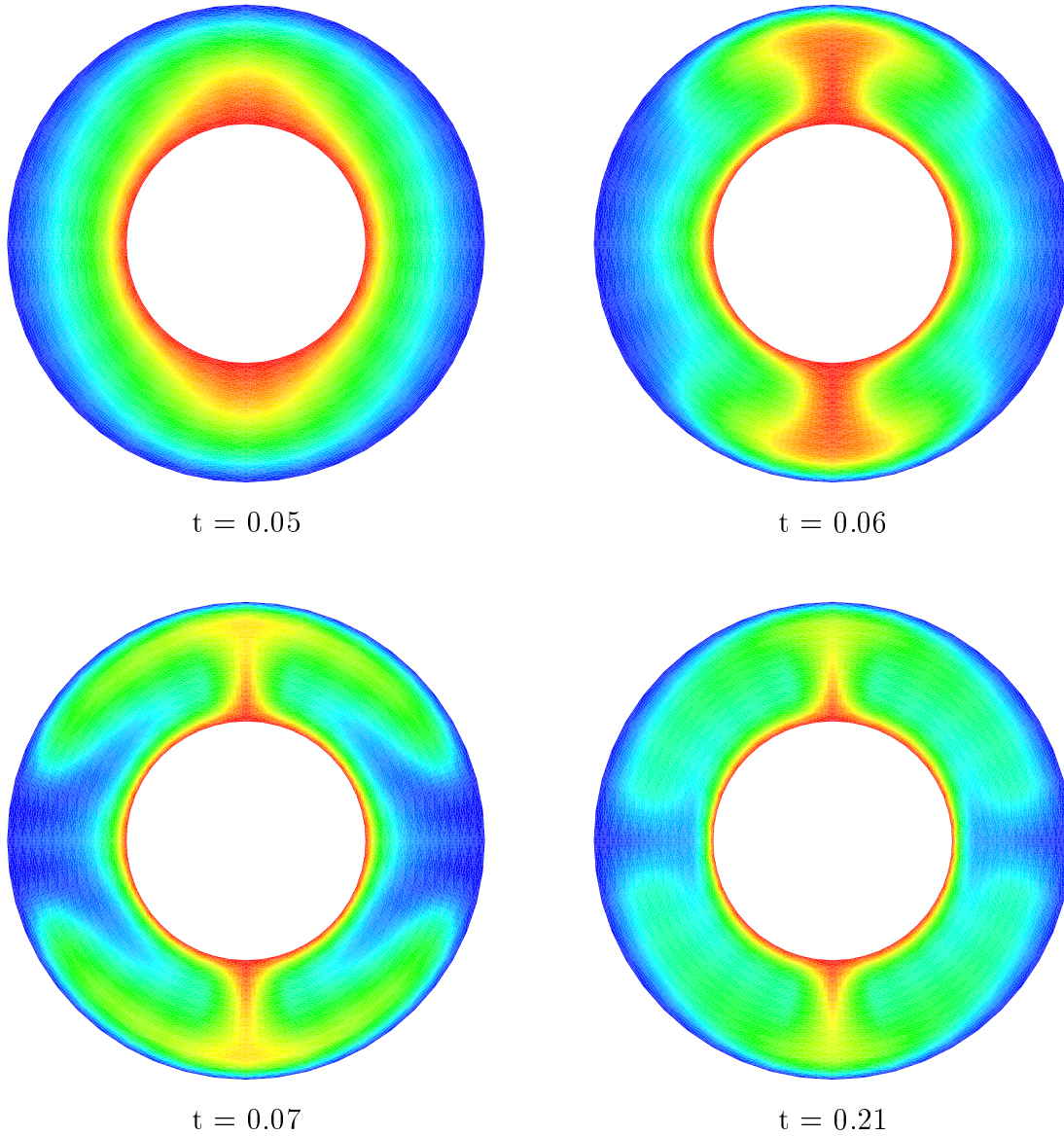


Abbildung 4.7: Temperaturfelder, Kreisring mit $R_1=1$ und $R_2=2$, Periode der Temperaturanfängsstörung: 2, $Ra = 10^4$, dimensionslose Zeit, 48×24 -FEM-Gitter.

Ist die **Periode 4** in der Temperaturanfängsstörung gegeben, entstehen ähnliche

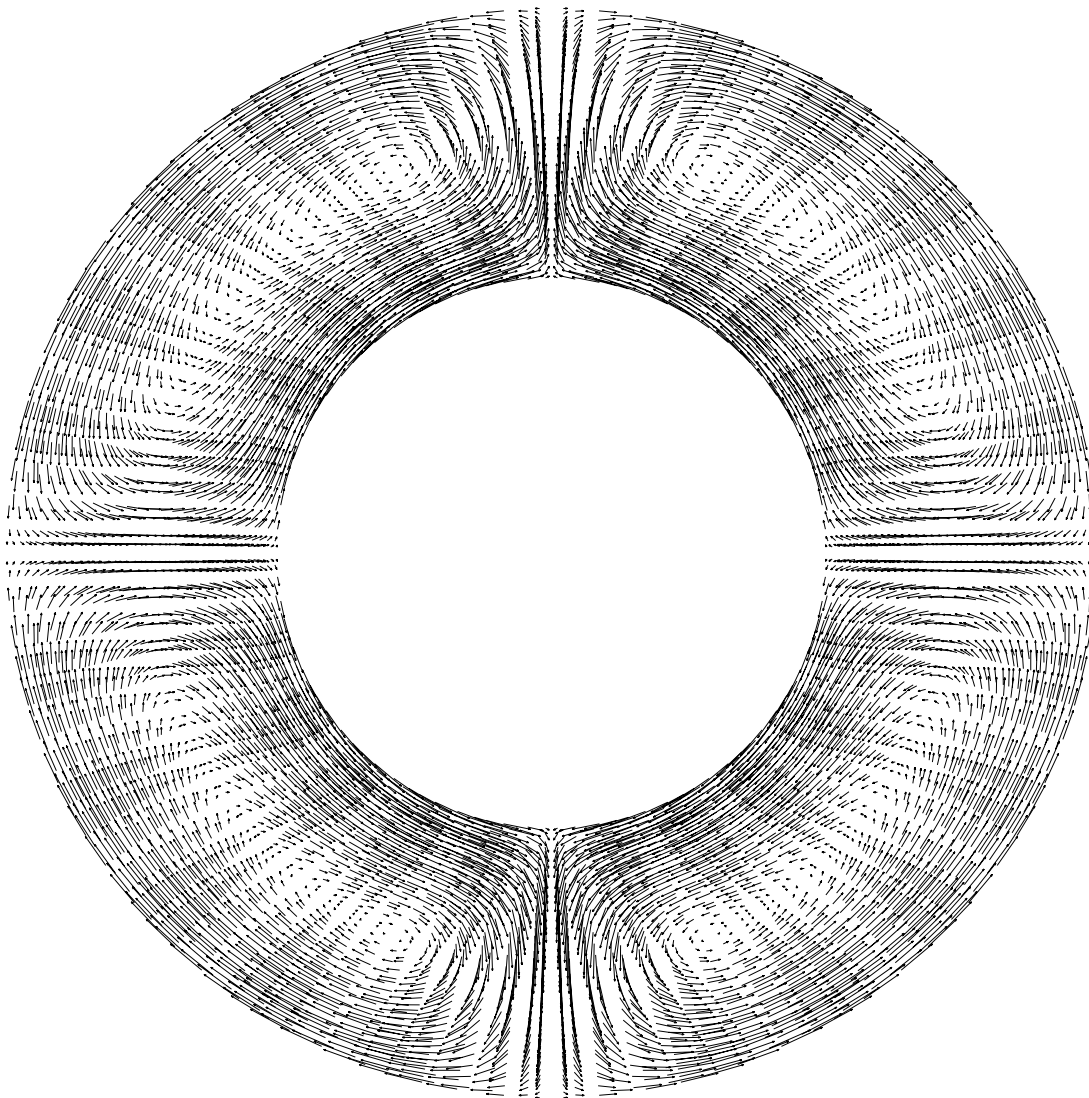


Abbildung 4.8: Geschwindigkeitsfeld, Kreisring mit $R_1=1$ und $R_2=2$, Periode der Temperaturanfängsstörung: 2, $Ra = 10^4$, 48×24 -FEM-Gitter.

Strömungsmuster wie bei der Periode 2. Die Ergebnisse der Konvektionsmodellierung sind in Abbildung 4.9 und in Abbildung 4.10 grafisch dargestellt. Schon zum Zeitpunkt $t = 0.02$ bilden sich vier warme Aufstiegszonen. Das zugehörige Geschwindigkeitsfeld in Abbildung 4.10 besteht aus acht gleichmäßigen Konvektionszellen. Die heiße Materie wird an die Oberfläche transportiert, kühlt sich dort ab und sinkt mit der Strömung wieder in den Mantel. Dieses Phänomen beschreibt das Differentialgleichungssystem durch die Änderung des Tempera-

turgradienten mit der Geschwindigkeit.

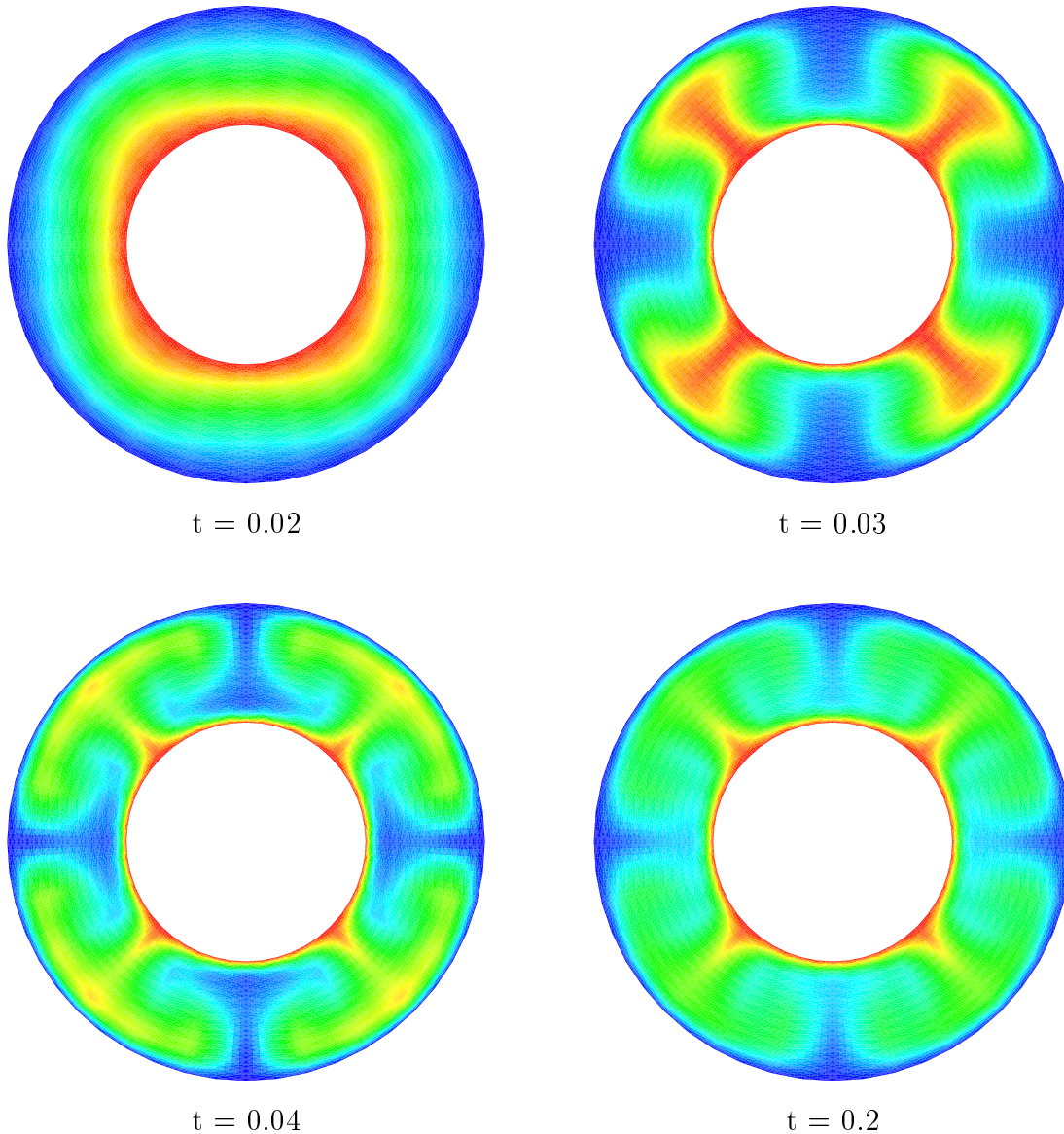


Abbildung 4.9: Temperaturfelder, Kreisring mit $R_1=1$ und $R_2=2$, Periode der Temperaturanfängsstörung: 4, $Ra = 10^4$, dimensionslose Zeit, 48×24 -FEM-Gitter.

Für die **Periode 6** liefert das Finite-Elemente-Programm das in Abbildung 4.11 und in Abbildung 4.12 dargestellte Konvektionsverhalten. Es entstehen sechs gleichmäßige Aufstiegszonen und zwölf Konvektionszellen. Für den Temperaturverlauf sind vier Zeitschritte herausgegriffen worden, wobei der letzte den sta-

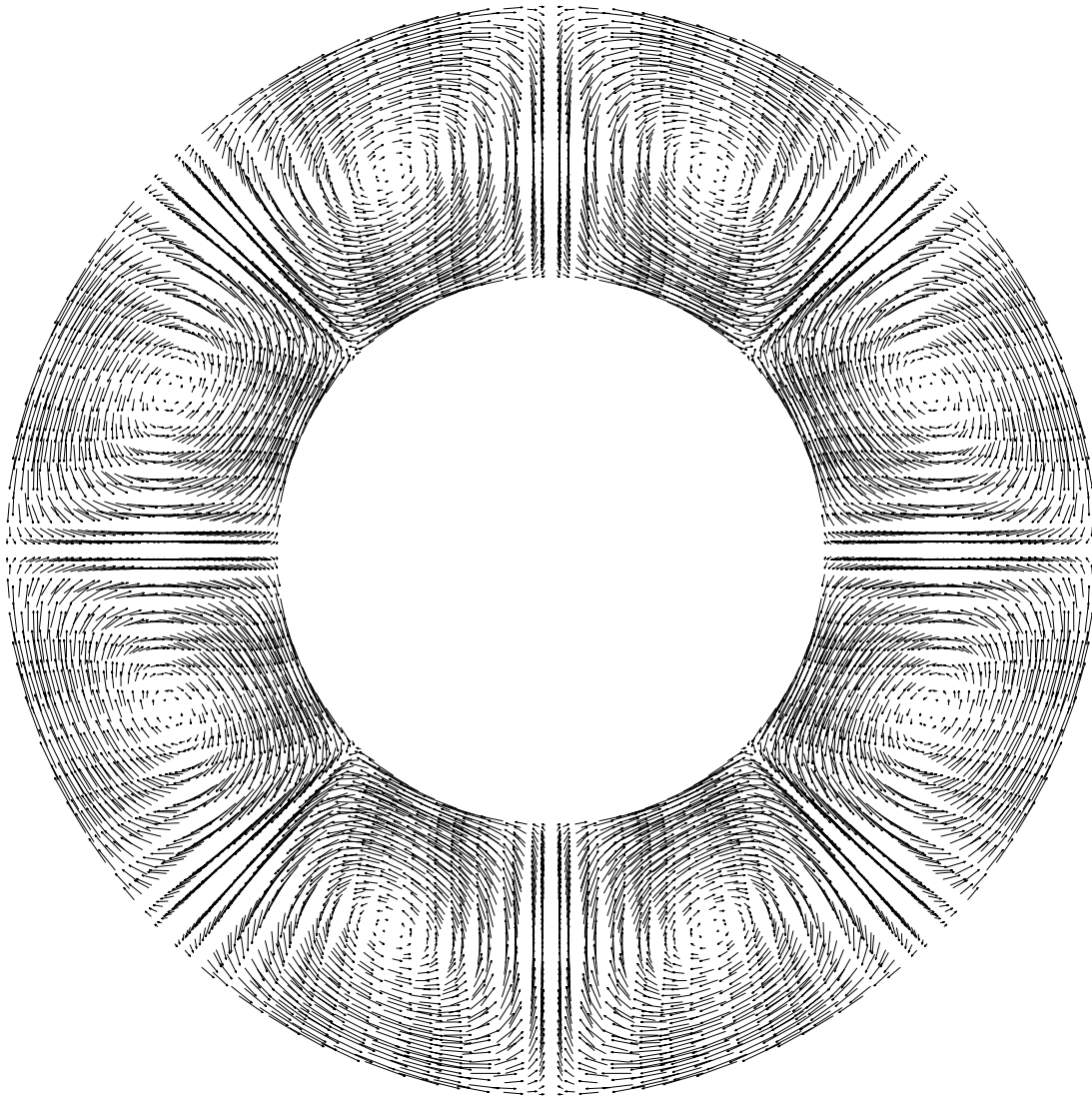


Abbildung 4.10: Geschwindigkeitsfeld, Kreisring mit $R1=1$ und $R2=2$, Periode der Temperaturanfängsstörung: 4, $Ra = 10^4$, 48×24 -FEM-Gitter.

tionären Zustand darstellt. Dieser stellt sich bei $t = 0.18$ ein. Dort endet die Einschwingphase der Geschwindigkeit. Die dimensionslose, räumlich gemittelte Geschwindigkeit v_{rms} sieht für die Konvektion in einem Kreisring genauso aus wie die v_{rms} -Kurve in Abbildung 4.3.

Ein Beispiel für unregelmäßige Konvektionszellen ist die Temperaturanfängsstörung mit der **Periode 3**. Abbildung 4.13 zeigt die zeitliche Entwicklung des Temperaturfeldes. Die ersten Störungen treten zur Zeit $t = 0.07$ auf, also später als bei

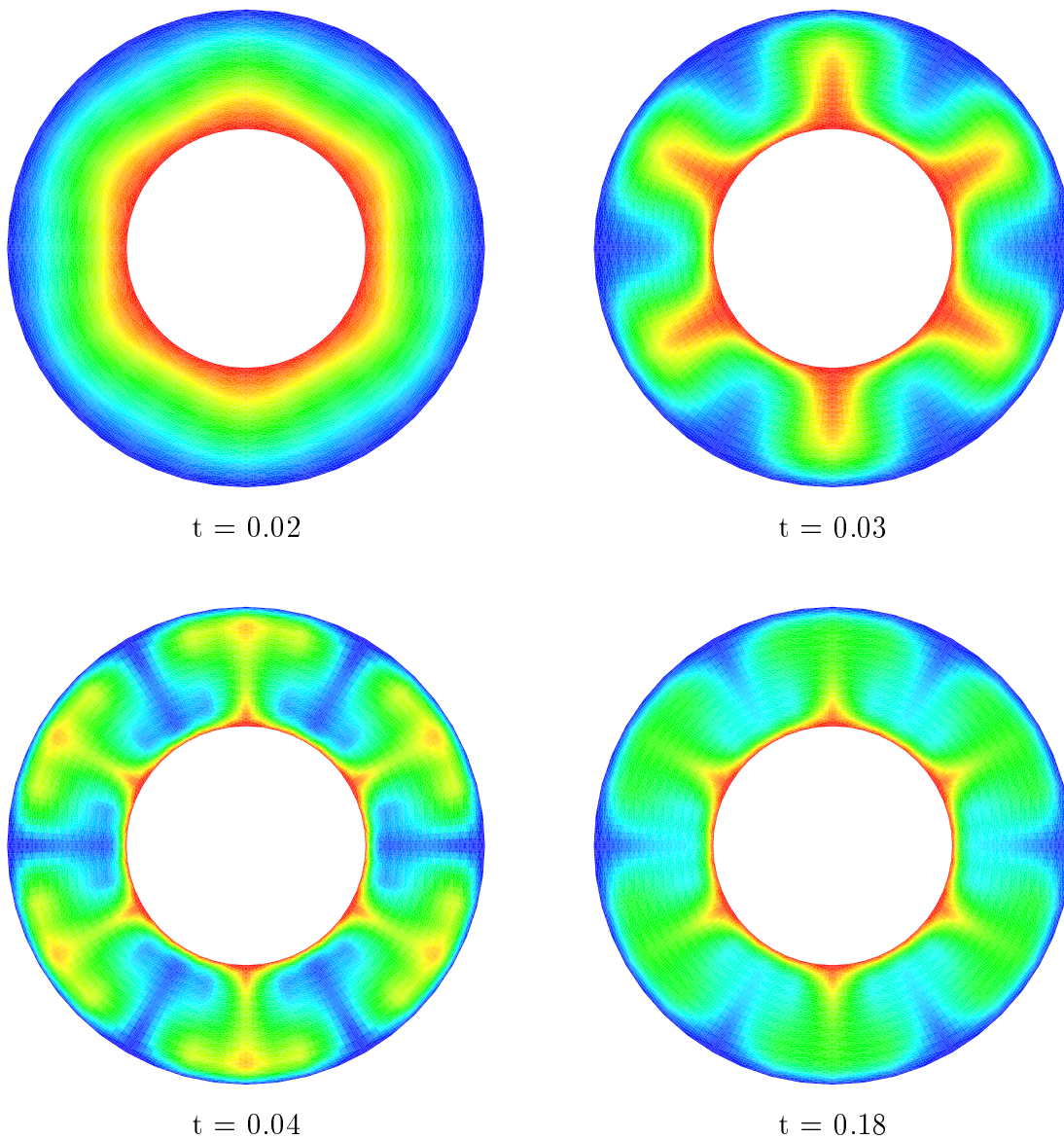


Abbildung 4.11: Temperaturfelder, Kreisring mit $R_1=1$ und $R_2=2$, Periode der Temperaturanfängsstörung: 6, $Ra = 10^4$, dimensionslose Zeit, 48×24 -FEM-Gitter.

den bisherigen Beispielen mit Perioden 2, 4 und 6. In Abbildung 4.14 erkennt man unterschiedlich schnell strömende Konvektionszellen, die die Geschwindigkeit der Wärmeausbreitung beeinflussen. Bei $t = 0.08$ sind die Geschwindigkeiten links unten größer als im übrigen Gebiet. Daher steigt die Wärme in Abbildung 4.13 zur Zeit $t = 0.08$ dort schneller auf. Ein Bild weiter entwickeln sich die aufstei-

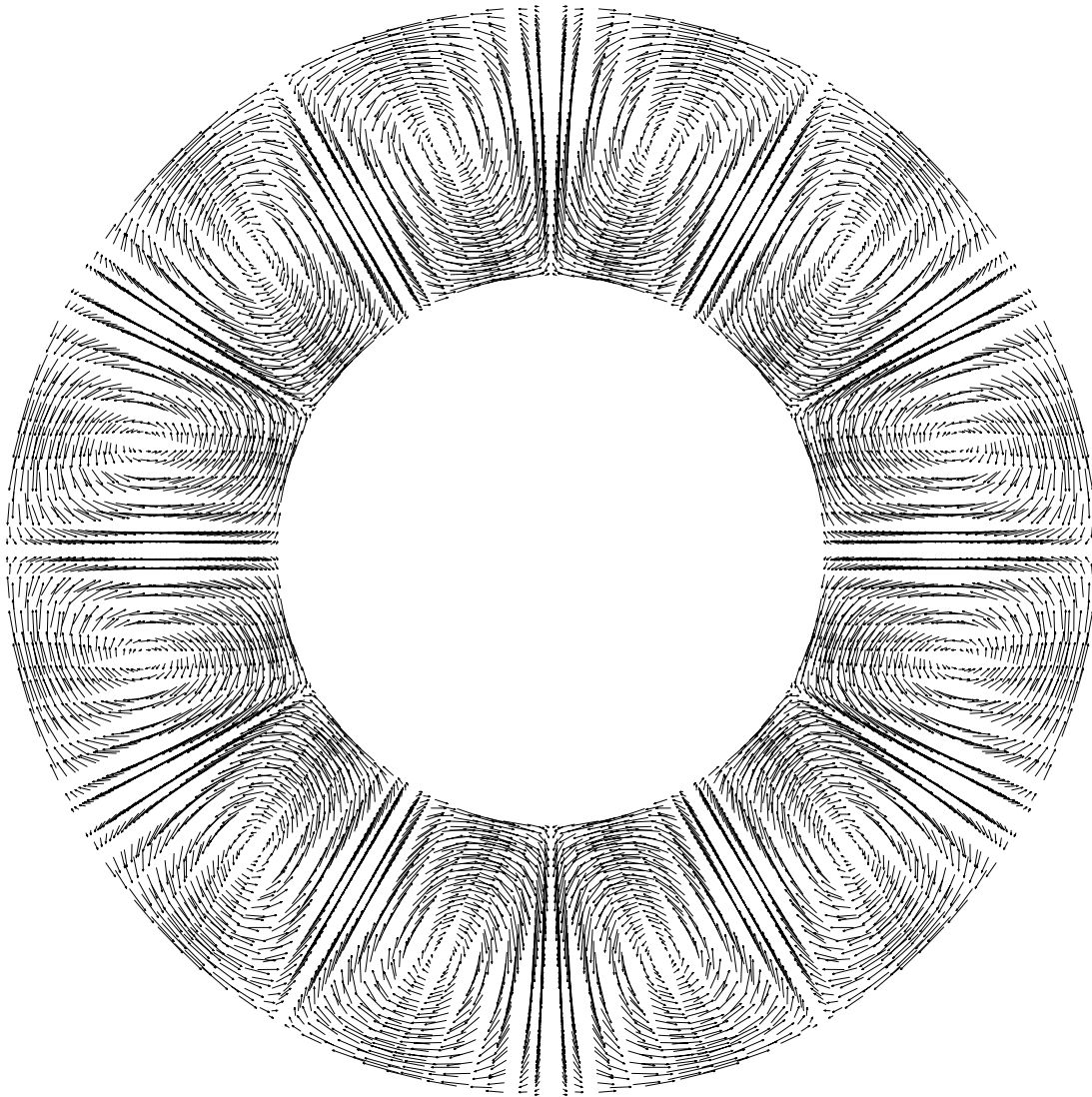


Abbildung 4.12: Geschwindigkeitsfeld, Kreisring mit $R_1=1$ und $R_2=2$, Periode der Temperaturanfängsstörung: 6, $Ra = 10^4$, 48×24 -FEM-Gitter.

genden Diapire rechts oben am schnellsten. Bei $t = 0.3$ hat sich ein Gleichgewicht eingestellt, d. h. die Geschwindigkeiten bleiben konstant. Allerdings besitzen die Konvektionszellen unterschiedliche Größen.

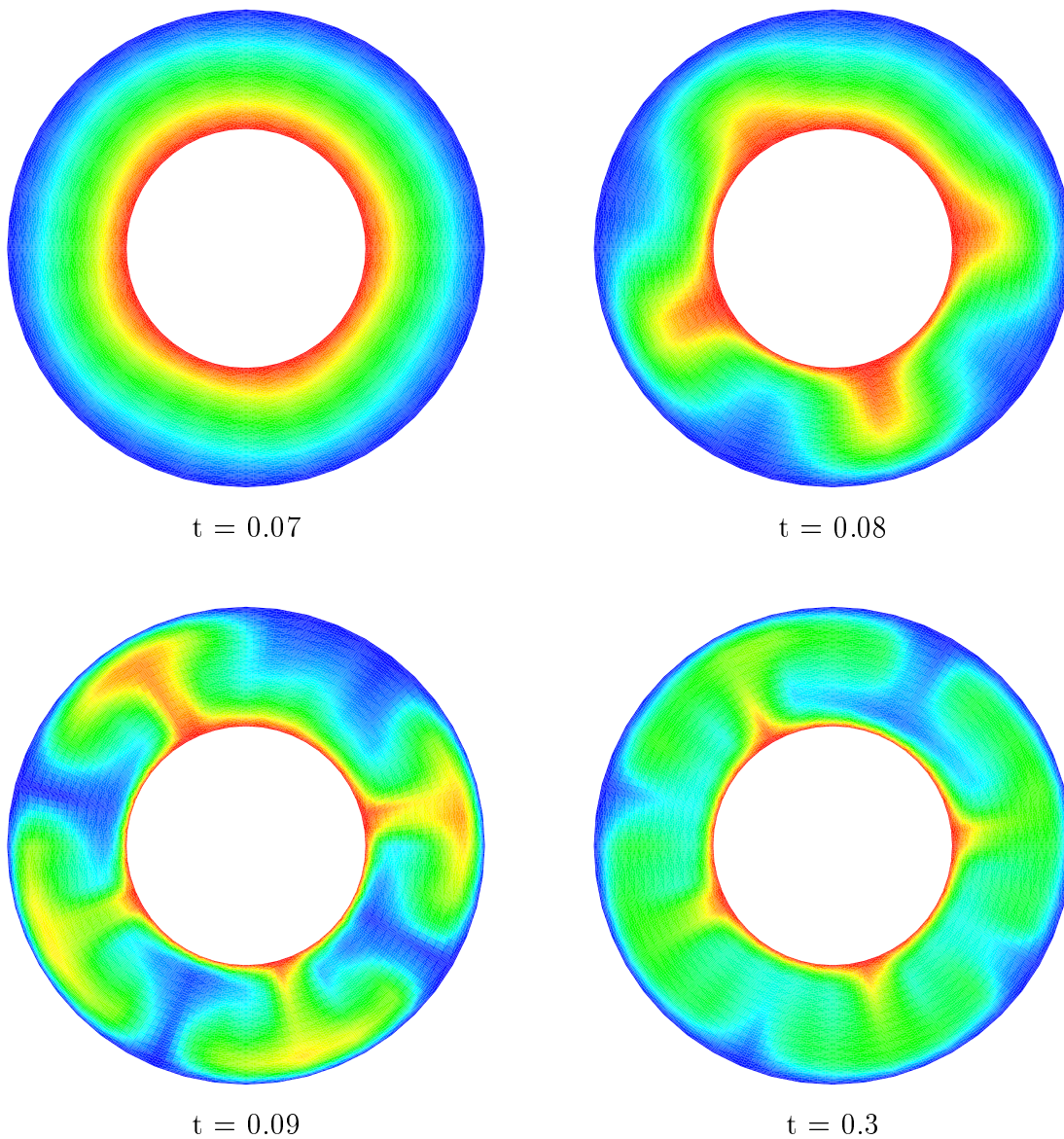


Abbildung 4.13: Temperaturfelder, Kreisring mit $R_1=1$ und $R_2=2$, Periode der Temperaturanfängsstörung: 3, $Ra = 10^4$, dimensionslose Zeit, 48×24 -FEM-Gitter.

Auswertung

Da im vorliegenden Kreismodell die gleichen Modellannahmen wie im Kastenmodell (Kapitel 4.1) gemacht wurden, erhält man vergleichbare Ergebnisse. Wie aus den Differentialgleichungen bereits ersichtlich, stellt sich irgendwann ein stati-

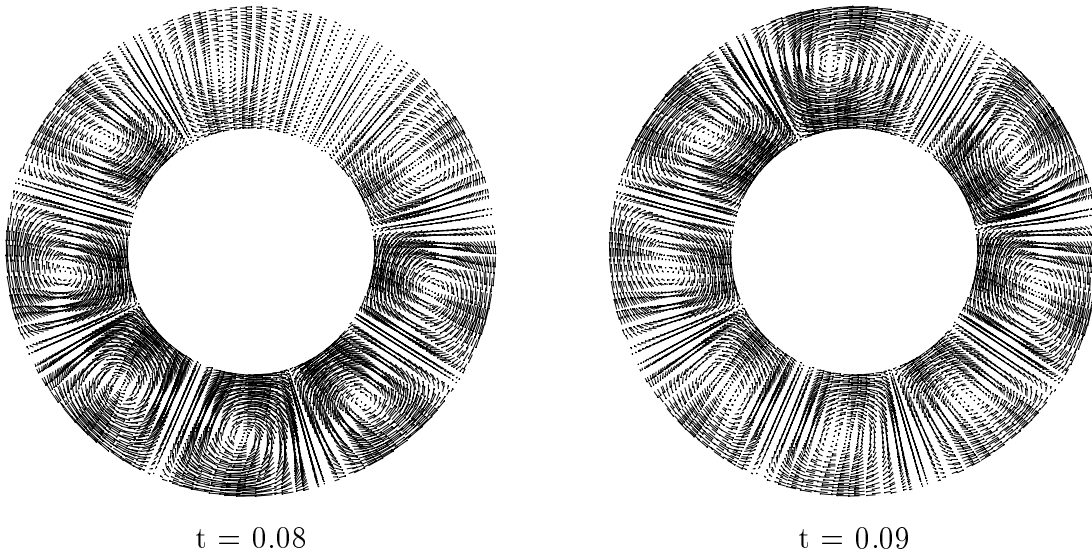


Abbildung 4.14: Geschwindigkeitsfelder, Kreisring mit $R_1=1$ und $R_2=2$, Periode der Temperaturanfängsstörung: 3, $Ra = 10^4$, 48×24 -FEM-Gitter.

onärer Zustand ein, das Strömungsverhalten ändert sich mit der Zeit nicht mehr. Die Temperatur- und Geschwindigkeitsbilder weisen dann in weiteren Zeitschritten keine Veränderungen auf. Dieses Verhalten läßt sich sehr gut an dem asymptotischen Verlauf der v_{rms} -Kurve ablesen. In allen Kreismodellen beschreibt der zeitliche Verlauf der räumlich gemittelten Geschwindigkeit ähnliche Einschwingkurven wie die im Kastenmodell (Abbildung 4.3). Daher wurde hier auf die grafische Darstellung verzichtet.

Die räumlich gemittelte Geschwindigkeit v_{rms} und die maximale Geschwindigkeit v_{max} im stationären Zustand berechnet das Visualisierungsprogramm `sde` nach der Formel (4.2). Die Änderungen dieser dimensionslosen Geschwindigkeiten in der zeitlichen Entwicklung sind ein gutes Maß für die konvektiv wirkenden Kräfte. Für jeden Programmablauf sind diese Ergebnisse in Abhängigkeit der Periodenzahl in Tabelle 4.2 aufgetragen. Die Geschwindigkeitswerte sind etwas größer als die Werte in Tabelle 4.1 bei vergleichbarer Rayleigh-Zahl von $Ra = 10^4$. Nach Umskalierung erhält man reale Geschwindigkeiten zwischen 0.39 cm/a und 0.63 cm/a. Die Tabelle 4.2 zeigt, je größer die Periodenzahl in der Temperaturanfängsstörung gewählt wird, desto kleiner werden die Strömungsgeschwindigkeiten und desto

mehr Konvektionszellen entstehen. Die Materie strömt schneller, je größer der Durchmesser der jeweiligen Zelle ist.

Tabelle 4.2: Dimensionslose Geschwindigkeitswerte in Abhängigkeit der Periode der Temperaturanfängsstörung.

Periode	v_{max} dimensionslos	v_{rms} dimensionslos	Anzahl Konvektionszellen	Abbildungen
$\xi = 2$	73.64	45.32	4	4.7, 4.8
$\xi = 3$	65.01	44.15	8	4.13, 4.14
$\xi = 4$	64.47	44.05	8	4.9, 4.10
$\xi = 6$	52.48	35.91	12	4.11, 4.12
$\xi = 8$	44.82	29.41	16	–

Es besteht also ein Zusammenhang zwischen der Periode der Anfangsstörung und der Anzahl der Konvektionszellen. Eine gerade Periodenzahl gibt die Zahl der Aufstiegszonen wieder. Ein Vergleich der Temperaturbilder (Abbildungen 4.7, 4.9, 4.11) mit der Funktion der Temperaturanfängsstörung (Abbildung 4.6) läßt erkennen, daß die Maxima dieser Funktion die Lage der Aufstiegszonen bestimmen. Würde zur Zeit $t = 0$ vor $4.55 \cdot 10^9$ Jahren keine Temperaturstörung angenommen, würde keine Konvektion entstehen. Für Periode 3 (Abbildung 4.13) weist die Verteilung der Maxima und Minima der Störfunktion (Abbildung 4.6) keine Regelmäßigkeiten auf, so daß sich die Konvektionszellen relativ willkürlich bilden. Das gilt für jede ungerade Periodenzahl.

Diskussion

Der Einfluß der Temperaturanfängsstörung auf das konvektive Verhalten spielt eine größere Rolle als die Rayleigh-Zahl und die Größe des Gebietes. Diese Behauptung stellten zum Beispiel Hansen und Ebel (1988) bei der Untersuchung von

Strömungsmuster in einem Kastenmodell auf. Jarvis (1993) erarbeitete ebenfalls die Abhängigkeit der Anzahl der Konvektionszellen von der Anfangsbedingung bei der Untersuchung von geometrischen Effekten in sphärischen, zweidimensionalen Modellen der Mantelkonvektion. Die Temperaturbilder in Kreisringen sind in seiner Veröffentlichung identisch mit den Abbildungen 4.7 und 4.9. Jarvis (1993) und Vangelov & Jarvis (1994) analysieren vor allem den Einfluß der Bogenlänge und der Krümmung von Kreissegmenten auf das Strömungsmuster der Konvektionszellen. Kellogg und King (1997) untersuchen ebenfalls in Kreissegmenten die Struktur der aufsteigenden Diapire, allerdings in Abhängigkeit von Viskositätsgesetzen.

Die Konvektion in der Arbeit von Kellogg und King (1997) erreicht nach $1.5 \cdot 10^8$ Jahren einen stationären Zustand. Setzt man als Alter der Erde $4.55 \cdot 10^9$ Jahre an, so bedeutet dies, daß der stationäre Zustand bei einem Alter von $4.55 \cdot 10^9 - 1.5 \cdot 10^8 = 4.4 \cdot 10^9$ Jahren erreicht wird. In der vorliegenden Arbeit ist die Einschwingphase nach einer dimensionslosen Zeit von etwa $t = 0.2$ beendet, was bei einer Schrittweite von $dt = 0.001$ bzw. 10^6 Jahren einem Alter von $4.35 \cdot 10^9$ Jahren entspricht. Es ist also eine sehr gute Übereinstimmung festzustellen.

Die Konvektionsmodelle in der Literatur sind häufig in dimensionslosen Variablen gerechnet worden und lassen sich daher gut mit den eigenen Voraussetzungen und Ergebnissen vergleichen. Die Rayleigh-Zahl liegt in der oben genannten Literatur im Bereich von 10^5 , so daß die dort dargestellten Auf- und Abstiegsszonen von der Struktur her mit den eigenen übereinstimmen. Schubert (1992) rechnet im Kasten mit $Ra = 1.5 \cdot 10^5$ und im Kreis bzw. in der Kugel mit $Ra = 1.6 \cdot 10^6$. Diese erhöhte Rayleigh-Zahl und die Annahme von Kompressibilität und innerer Heizung führen zu anderen Ergebnissen als die in der genannten Literatur. Bei konstanter Viskosität von $5.6 \cdot 10^{22}$ Pa s ergeben sich maximale konvektive Geschwindigkeiten von 30 cm/a. Wie in der vorliegenden Arbeit stellt Schubert (1992) die Geschwindigkeit als Vektorfeld dar und nicht als Strömungsfeld.

Larsen und Yuen (1997) berechnen eine maximale Geschwindigkeit von 3 cm/a im stationären Zustand für die Konvektion im oberen Mantel. Dabei ist $Ra = 10^6$, und konstante Viskosität wird vorausgesetzt. Erheblich höhere Geschwindigkeiten

werden unter Berücksichtigung einer temperaturabhängigen Viskosität oder einer Nicht-Newton-Rheologie erreicht. Larsen und Yuen (1997) entwickeln eine eigene Theorie der Anfangsbedingung, daß der Anfangszustand durch kalte, sinkende Abstrombereiche gestört wird.

4.2.2 Variation der Radien

Um die Abhängigkeit der Konvektionsströme von der Dicke des Kreisringes zu untersuchen, wird nur der Radius des äußeren Kreises variiert, alle weiteren Parameter bleiben ungeändert. Das Gitter besteht aus 48×24 Elementen, die üblichen Randbedingungen werden gesetzt, und die Temperaturanfangsstörung sei in allen Läufen mit der Periode 6 gegeben. Die Rayleigh-Zahl berechnet sich für jeden Kreisring abhängig von seiner Dicke neu. Die Temperaturfelder in Abbildung 4.15 geben den stationären Zustand wieder. Der Verlauf der zeitlichen Entwicklung von Geschwindigkeit und Temperatur aller vier Läufe entspricht im wesentlichen dem in Abbildung 4.11 erläuterten Lauf. Man erkennt, daß die Aufstiegsbereiche einen schmaleren Schlot bilden und sich an der Oberfläche weiter ausdehnen, je größer die Dicke des Kreisringes ist. Auch setzt die Konvektion zeitlich eher ein, wenn der äußere Radius größer ist.

Auswertung

Als Ergebnis liefert das Programm die maximale Geschwindigkeit v_{max} des stationären Zustandes und die räumlich gemittelte Geschwindigkeit v_{rms} . Tabelle 4.3 liefert die Erkenntnis, je größer der Radius, desto größer die Geschwindigkeiten. Die Strömung ist umso schneller, je größer die Konvektionszellen sind.

Die anfangs herrschende kontinuierliche Temperaturverteilung wird zeitlich gesehen eher gestört, wenn der Radius größer ist, da die höhere Geschwindigkeit den Materialtransport schneller vorantreibt als in kleineren Konvektionszellen.

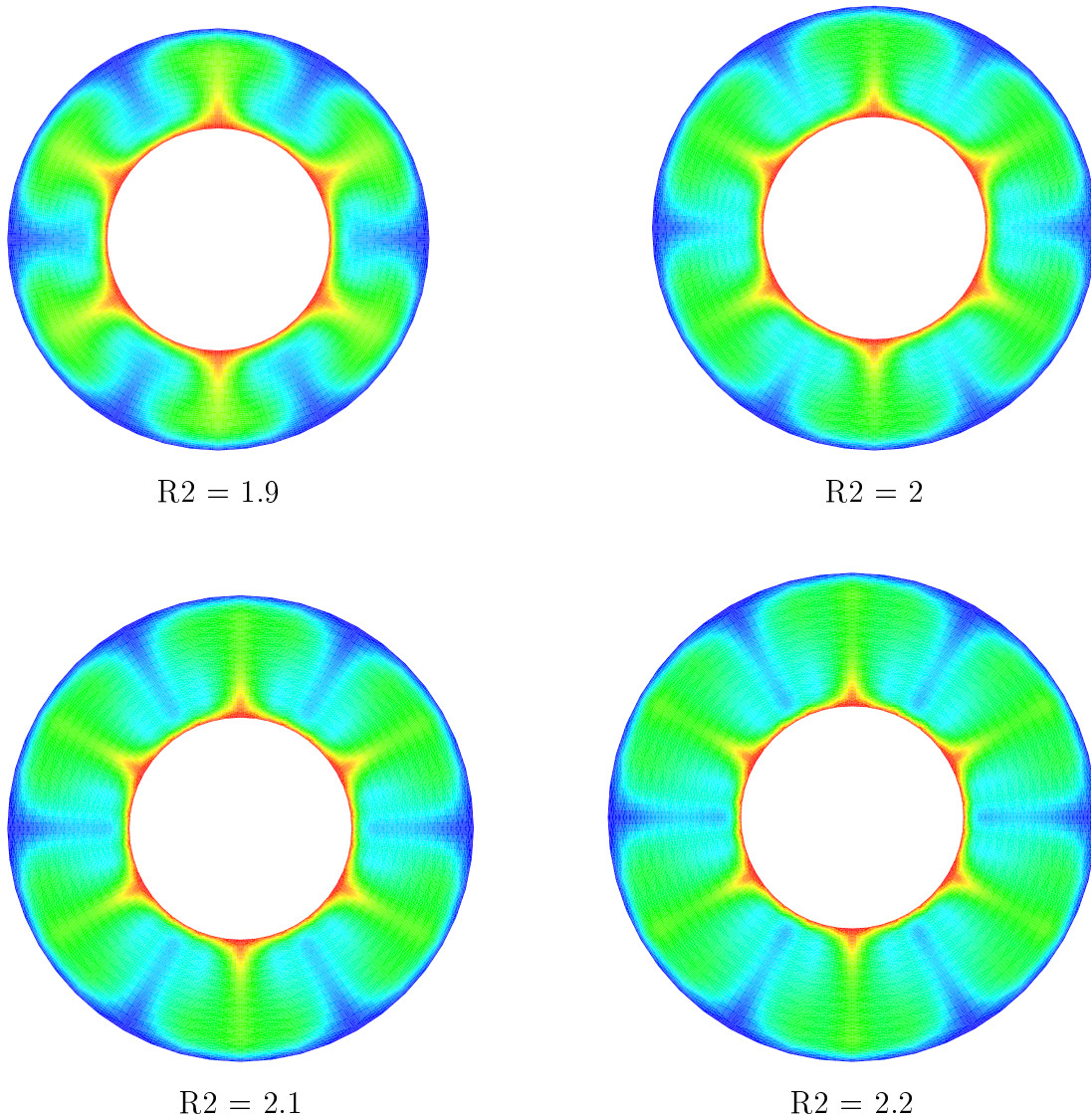


Abbildung 4.15: Temperaturfelder im stationären Zustand, Kreisringe verschiedener Außenradien, Innenradius $R_1=1$, Periode der Temperaturanfängsstörung: 6, $Ra = (\rho_0 \alpha g \Delta T (R_2 - R_1)^3) / (\eta_0 \kappa)$, 48×24 -FEM-Gitter.

In dem Kreisring mit $R_1 = 1$, $R_2 = 1.9$ (Abbildung 4.15) erreichen die warmen Aufstiegszonen die Oberfläche, breiten sich dort aber kaum aus. Vergrößert man den äußeren Radius, bilden sich pilzförmig aufsteigende Diapire, deren Schlotte schmaler werden, je größer die Strömungsgeschwindigkeit wird.

Tabelle 4.3: Geschwindigkeitsvergleich für Kreisringe unterschiedlicher Radien.

Innerer Radius	Äußerer Radius	v_{max}	v_{rms}
1	1.9	44.82	31.57
1	2.0	52.48	35.91
1	2.1	78.04	53.21
1	2.2	97.99	66.79

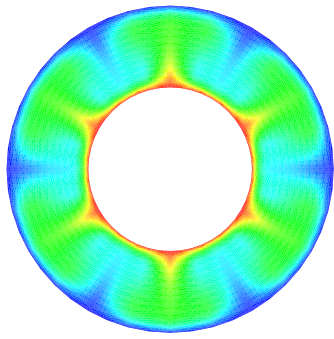
Kreisringe verschiedener Radien, aber konstanter Ringdicke

Die Differenz zwischen äußerem und innerem Radius sei im dimensionslosen Fall 1, so daß beide Kreisringe in Abbildung 4.16 mit derselben Rayleigh-Zahl berechnet worden sind. Die Konvektionsströme in dem kleineren Kreisring erreichen im stationären Zustand Geschwindigkeitswerte von $v_{rms} = 35.91$ und in dem größeren Kreisring von $v_{rms} = 50.65$. Hiermit wird die Aussage bestätigt, daß die Geschwindigkeit zunimmt, je größer der Durchmesser der jeweiligen Konvektionszellen ist.

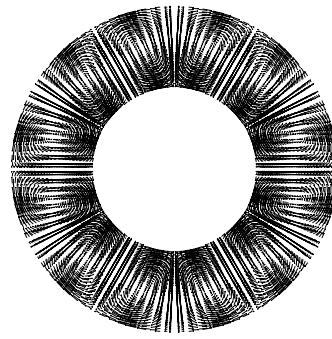
Es gilt letztendlich, daß die Änderung der Radien einen größeren Einfluß auf den Betrag der Geschwindigkeit hat als die Rayleigh-Zahl als Funktion der Schichtdicke.

4.2.3 Änderung der Rayleigh-Zahl

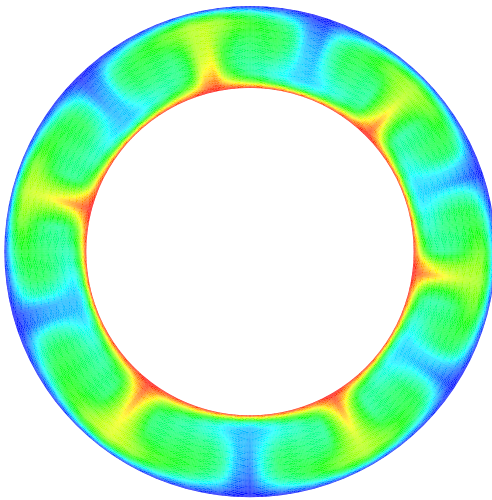
Die Rayleigh-Zahl wird konstant auf $Ra = 10^5$ gesetzt, die übrigen Modellparameter entsprechen dem Lauf in Abbildung 4.11. Vier Zeitpunkte des Temperaturfeldes sind in Abbildung 4.17 dargestellt. Das Geschwindigkeitsfeld entspricht der Abbildung 4.12, allerdings sind die Vektoren länger und haben im stationären Zustand Beträge von $v_{rms} = 90.29$ und $v_{max} = 165.26$. Die hohen Geschwindigkeiten sind mit schnellem Temperaturanstieg in den äußeren Bereichen verbunden. Schon bei $t = 0.005$ beginnt die Konvektion. In kurzer Zeit haben sich warme Aufstiegszonen und kalte Abstrombereiche gebildet. Sie sind mit der Konvek-



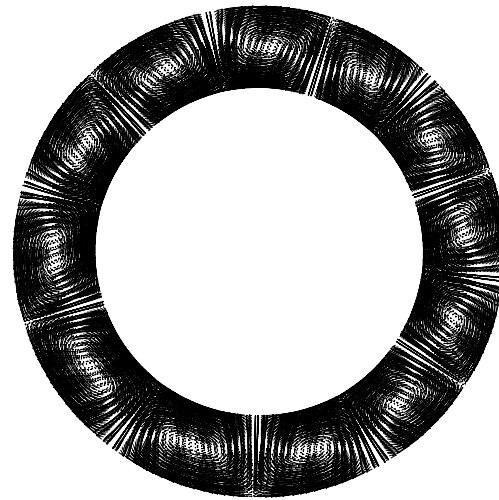
$$R1 = 1, R2 = 2$$



$$R1 = 1, R2 = 2$$



$$R1 = 2, R2 = 3$$



$$R1 = 2, R2 = 3$$

Abbildung 4.16: Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder im stationären Zustand, Kreisringe verschiedener Innen- und Außenradien, aber konstanter Ringdicke, Periode der Temperaturanfängsstörung: 6, $Ra = 10^4$, 48×24 -FEM-Gitter.

tion im Rechteckgebiet (Abbildung 4.2) vergleichbar. Dort beginnt der stationäre Zustand bei $t = 0.05$ (Abbildung 4.4). Das trifft genauso auf den Lauf in Abbildung 4.17 zu. Bei einer Rayleigh-Zahl von $Ra = 10^4$ lag dieser Zeitpunkt bei etwa $t = 0.2$. Eine Erhöhung der Rayleigh-Zahl um den Faktor 10 hat eine zweieinhalbfach größere Geschwindigkeit zur Folge. Eine Änderung der Rayleigh-Zahl und damit der Strömungsgeschwindigkeit hat keinen Einfluß auf die Auswirkungen der Temperaturanfängsstörung.

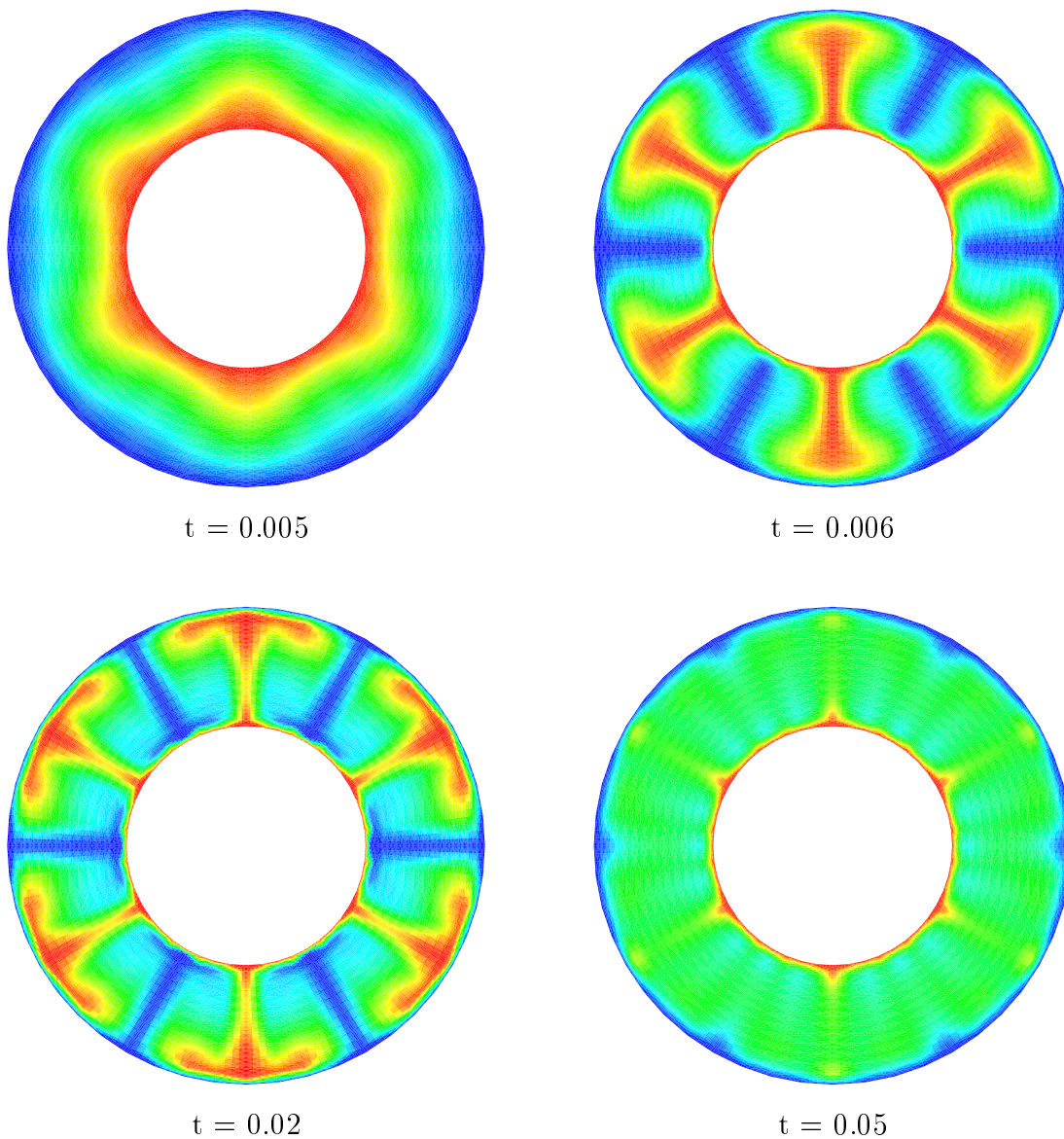


Abbildung 4.17: Temperaturfelder, Kreisring mit $R_1=1$ und $R_2=2$, Periode der Temperaturanfängsstörung: 6, $Ra = 10^5$, 48×24 -FEM-Gitter.

4.3 Ellipsenring

Die Untersuchung des Konvektionsverhaltens in Ellipsenringen zeigt, daß keine Temperaturanfängsstörung notwendig ist, um Konvektion entstehen zu lassen. Das ist von Interesse, da in bisherigen Konvektionsmodellen, wie Kasten und Kreisring, sich nur dann Aufstiegszonen bilden, wenn die Temperatur über die

Ränder oder in der Anfangsbedingung gestört wird. Bei Ellipsenringen sorgt hingegen bereits die Geometrie für die Brechung der Symmetrie.

Der charakteristische Parameter ist die Abplattung, welche bislang in Konvektionsmodellen noch nicht untersucht worden ist. Die Abplattung einer Ellipse ist $f = (A - B)/A$, wobei A die große, B die kleine Halbachse ist. Die Rechnungen in diesem Kapitel sind für Ellipsenringe allgemein gültig, erdartige Ellipsenringe werden in Kapitel 4.4 behandelt.

Die Schichtdicke d eines zweidimensionalen Ellipsenringes ist nicht konstant. Daher muß die Rayleigh-Zahl $Ra = (\rho_0 \alpha g \Delta T d^3)/(\eta_0 \kappa)$ in jedem Punkt (x_1, x_2) neu berechnet werden. Aus den allgemein gültigen Formeln (2.23) und (2.24) für die Ellipsendurchmesser r_1 und r_2 berechnet sich die Schichtdicke $d(x_1, x_2) = r_2(x_1, x_2) - r_1(x_1, x_2)$ folgendermaßen:

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \left(\frac{A_2 B_2}{\sqrt{B_2^2 x_1^2 + A_2^2 x_2^2}} - \frac{A_1 B_1}{\sqrt{B_1^2 x_1^2 + A_1^2 x_2^2}} \right) \quad (4.3)$$

4.3.1 Auswirkungen der Temperaturanfangsstörung

Die zeitliche Entwicklung der Konvektion in einer Ellipse der Abplattung $f = 0.5$ ist in Abbildung 4.18 und 4.19 dargestellt. Modelliert wurde auf einem 48×24 -Finite-Elemente-Gitter (Abbildung 3.5) mit den Randbedingungen (2.13) und (2.14) für die Geschwindigkeiten, $T = T_0$ und $T = T_0 + \Delta T$ für die Temperatur außen und innen. Die Anfangsbedingung der Temperatur ist durch den kontinuierlichen Verlauf $T(t=0) = 1 - \varepsilon$ gegeben. Die Rechnungen werden also ohne den Störterm der Formel (2.27) durchgeführt.

Von Anfang an bilden sich vier Konvektionszellen entlang den großen Halbachsen (Abbildung 4.19). Der durch die Strömung verursachte Materialtransport bewirkt bereits bei $t = 0.005$ einen Temperaturanstieg (Abbildung 4.18). Es bilden sich warme Aufstiegszonen als große pilzförmige Strukturen entlang den großen Halbachsen. Entlang der kleinen Halbachsen ist am Anfang keine Strömung zu erkennen, aber mit der Zeit bilden sich dort jeweils zwei Konvektionszellen (Abbildung 4.19). Hiermit ist ein Temperaturanstieg an den kleinen Halbachsen ver-

bunden. Die Wärme steigt dort jedoch aufgrund der niedrigen Geschwindigkeiten kaum bis an die Oberfläche. Das letzte Bild in Abbildung 4.18 zeigt den stationären Zustand, der nach einer Einschwingphase bei $t = 0.15$ beginnt.

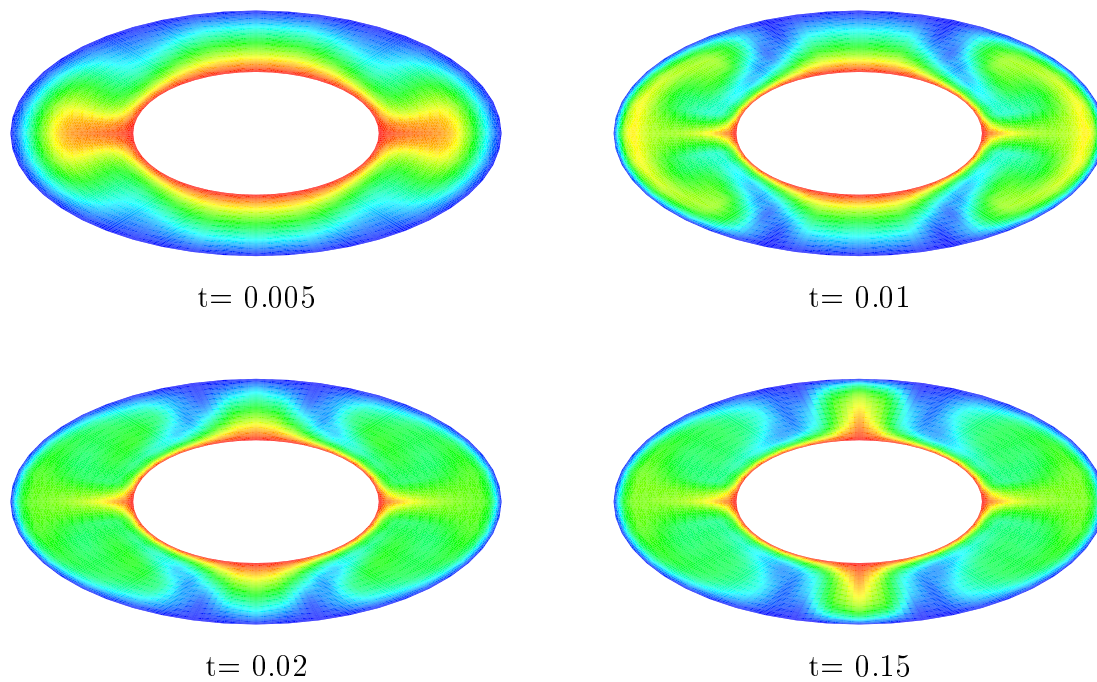


Abbildung 4.18: Temperaturfelder, Ellipsenring mit $A_1=1$, $B_1=0.5$, $A_2=2$, $B_2=1$, Abplattung: 0.5, keine Temperaturanfangsstörung, dimensionslose Zeit, 48×24 -FEM-Gitter.

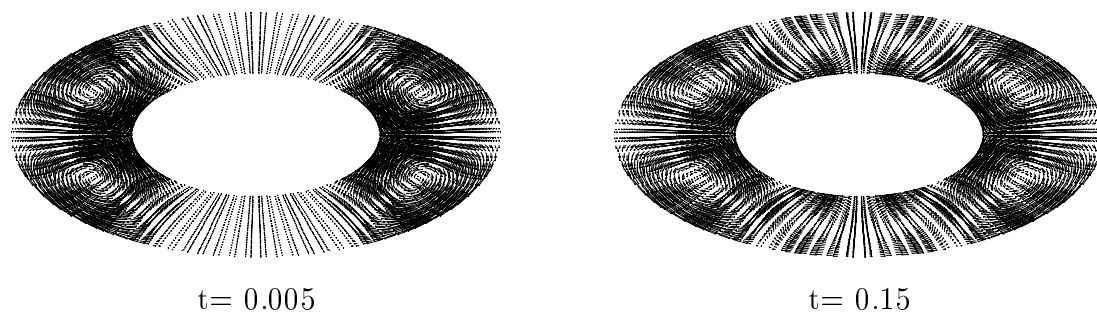


Abbildung 4.19: Geschwindigkeitsfelder, Ellipsenring mit $A_1=1$, $B_1=0.5$, $A_2=2$, $B_2=1$, Abplattung: 0.5, keine Temperaturanfangsstörung, dimensionslose Zeit, 48×24 -FEM-Gitter.

Auswertung

Der in den Abbildungen 4.18 und 4.19 dargestellte Lauf wird mit den Perioden 2, 4 und 6 der Temperaturanfängsstörung durchgeführt. Es entstehen genau dieselben Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder wie im ungestörten Fall. Die zugehörigen v_{rms} -Kurven zeigen den gleichen Verlauf und stimmen mit den bisherigen überein (vergleiche Abbildung 4.3). Die maximale Geschwindigkeit v_{max} im stationären Zustand sowie die räumlich gemittelte Geschwindigkeit v_{rms} besitzen in allen Läufen ziemlich genau den gleichen Betrag. Tabelle 4.4 liefert eine Übersicht der Ergebnisse.

Tabelle 4.4: Vergleich der Geschwindigkeiten in Abhängigkeit der Periode der Temperaturanfängsstörung, Ellipsenring mit $A1 = 1$, $B1 = 0.5$, $A2 = 2$, $B2 = 1$, Abplattung: 0.5.

Periode	v_{max} dimensionslos	v_{rms} dimensionslos
ungestört	169.339	88.640
$\xi = 2$	170.438	89.187
$\xi = 4$	169.331	88.633
$\xi = 6$	170.443	89.213

Zur Untersuchung weiterer Läufe wird die Abplattung $f = 0.1$ gewählt ($A1 = 1$, $B1 = 0.9$, $A2 = 2$, $B2 = 1.8$). Für unterschiedliche Perioden der Temperaturanfängsstörung erhält man jeweils die Werte $v_{max} = 194.73$ und $v_{rms} = 118.85$. Im Vergleich zu den Ellipsenringen der Abplattung 0.5 sind diese Geschwindigkeiten größer, da die Konvektionszellen größere Durchmesser haben. Die Geschwindigkeiten werden aber auch von der Rayleigh-Zahl beeinflusst. Den Läufen in Tabelle 4.4 liegt eine Rayleigh-Zahl der Größenordnung $1.25 \cdot 10^3 \leq Ra \leq 10^4$ zugrunde. Für den Ellipsenring geringerer Abplattung berechnet sich die Rayleigh-Zahl zu

$7.29 \cdot 10^3 \leq Ra \leq 10^4$. Dies liegt an der größeren Schichtdicke entlang der kleinen Halbachsen im Vergleich zum Ellipsenring mit $f = 0.5$.

Tabelle 4.4 zeigt also, daß das Konvektionsverhalten in Ellipsenringen unabhängig von der Temperaturanfangsstörung ist. Es ist eine natürliche Störung gegeben. Man beobachtet in Ellipsenringen, daß sich immer zwei große Aufstiegszonen entlang den großen Halbachsen und zwei kleine entlang den kleinen Halbachsen bilden.

Wann zeigen sich Auswirkungen der Temperaturanfangsstörung?

Die Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder zeigen in allen Programmläufen ähnliche Strukturen, wie sie in den Abbildungen 4.18 und 4.19 dargestellt sind. Betrachtet man sich die Störfunktion in Abbildung 4.20 mit der Periode $\xi = 4$ als Beispiel, lassen sich keine Zusammenhänge zum Konvektionsverhalten feststellen. In Kapitel 4.2.1 wurde für Kreisringe gezeigt, daß die Maxima der Temperaturanfangsstörung (Abbildung 4.6) die Lage der Aufstiegszonen bestimmen. Das ist hier nicht der Fall. Als Beispiel liegen die Minima der \cos -Funktion mit Periode 4 auf den Hauptachsen des Ellipsenringes (Abbildung 4.20) und lassen keine Abstrombereiche entstehen, im Gegenteil, hier entstehen die Aufstiegszonen. Die natürliche Störung in Ellipsenringen ist also stärker als die vorgegebene Temperaturanfangsstörung.

In einem fast kreisförmigen Ellipsenring der Abplattung 0.01 gelingt es, bei geeigneter Wahl der Störfunktion deren Auswirkungen zu erkennen. Es wurde eine \cos -Funktion der Periode 6 gewählt, wobei das Vorzeichen der Amplitude vertauscht worden ist (Abbildung 4.20). Es ist zu beachten, daß die Maxima die Gitterpunkte des Finite-Elemente-Netzes genau treffen, um als extreme Funktionswerte erfaßt zu werden. Das Programm liefert das in den Abbildungen 4.21 und 4.22 dargestellte Konvektionsverhalten. Wie in allen Ellipsenringen existiert am Anfang eine natürliche Konvektionsströmung, bestehend aus vier Geschwindigkeitszellen. In Abbildung 4.21 ist bei $t = 0.05$ eine Temperaturerhöhung zu erkennen, die durch die Anfangsstörung gegeben ist. Die Wärme steigt genau

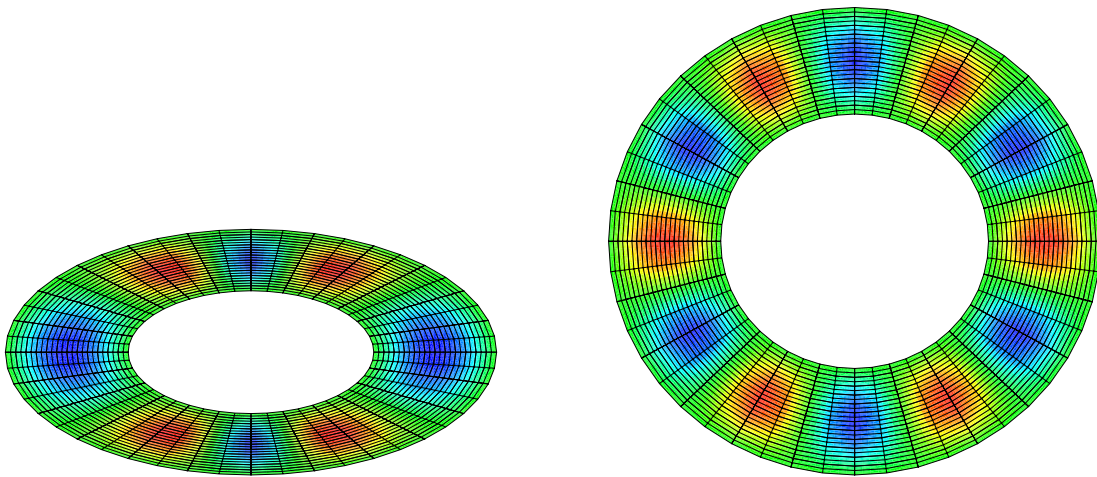


Abbildung 4.20: Maxima (rot) und Minima (blau) der Temperaturanfängsstörung der Perioden 4 und 6, Amplituden $+10^{-3}$ und -10^{-3} , Ellipsenringe mit Abplattung 0.5 und 0.01, 48×24 -FEM-Gitter.

an den Orten auf, an denen die Störfunktion in Abbildung 4.20 ihre Maxima besitzt. Die beiden Aufstiegszonen entlang den großen Halbachsen sind stärker ausgebildet als die übrigen vier, was durch die natürliche Störung hervorgerufen wird. Die vorgegebenen Temperaturerhöhungen bewirken eine Teilung der Konvektionszellen (Zeitpunkt 0.08 in Abbildung 4.22). Sie sind allerdings nicht stark genug, so daß sich ab $t = 0.11$ die Zellen wieder schließen. Das ursprüngliche Geschwindigkeitsfeld stellt sich wieder ein, welches den Wärmetransport reguliert. Die vier kleinen Aufstiegszonen bilden sich daraufhin zurück, und die Aufstiegszonen entlang den großen Halbachsen verstärken sich (Abbildung 4.21). Sowohl das Geschwindigkeitsfeld als auch das Temperaturfeld erreichen bei $t = 0.37$ den stationären Zustand. Die Einschwingphase hat aufgrund der künstlich vorgegebenen Störung relativ lange gedauert.

Es zeigt sich eine Dominanz der natürlichen Störung in Ellipsenringen. Die Temperaturanfängsstörung beeinflusst höchstens den Anfangszustand. Bei der Untersuchung eines erdartigen Ellipsenringes in Kapitel 4.4.1 wird man allerdings feststellen, daß bei fast kreisförmigen Gebieten bzw. Ellipsenringen sehr geringer Abplattung die Temperaturanfängsstörung das Konvektionsverhalten geringfügig

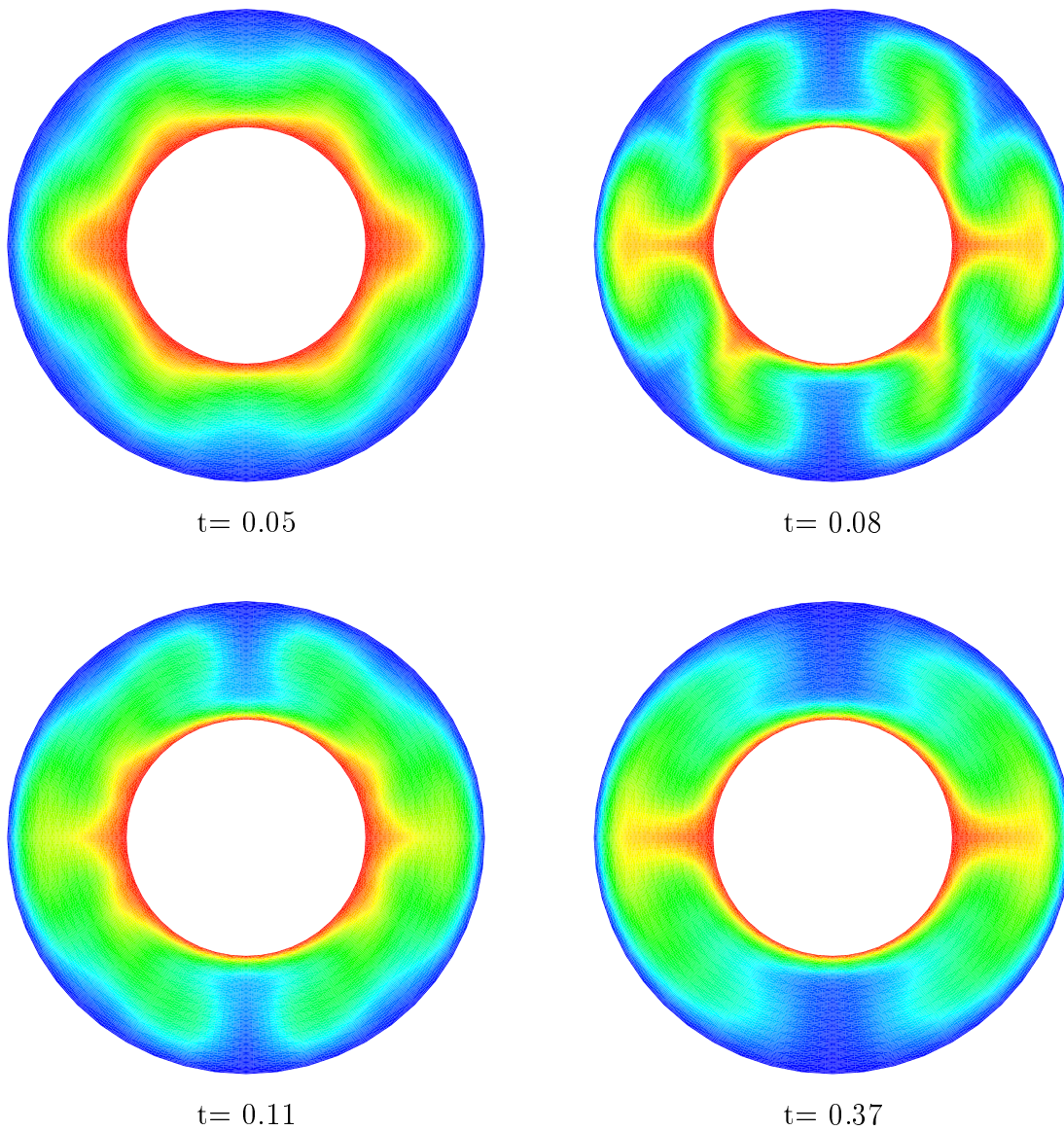


Abbildung 4.21: Temperaturfelder, Ellipsenring mit $A_1=1$, $B_1=0.99$, $A_2=2$, $B_2=1.98$, Abplattung: 0.01, Periode der Temperaturanfängsstörung: 6, Amplitude: -10^{-3} , dimensionslose Zeit, 48×24 -FEM-Gitter.

beeinflusst.

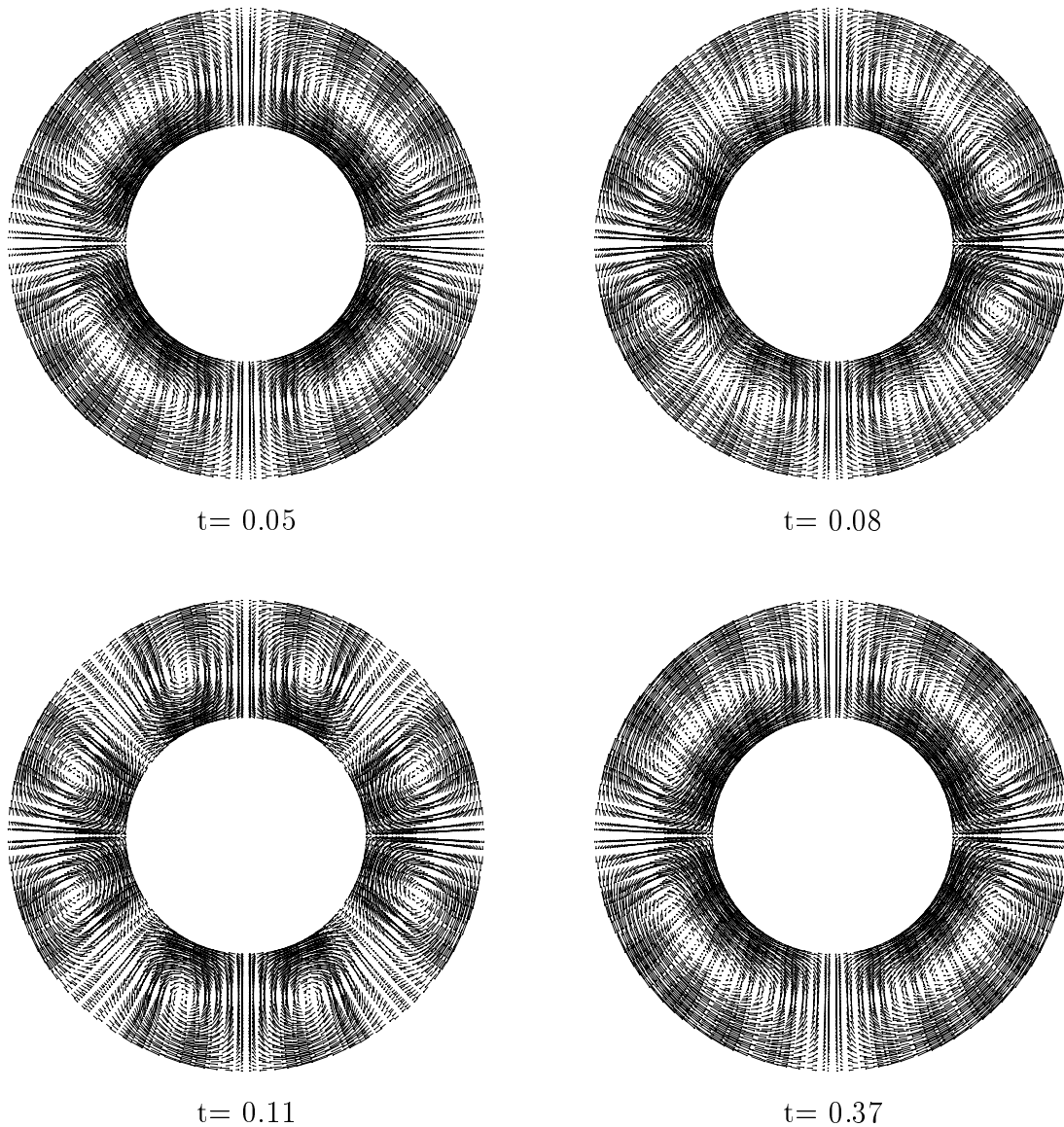


Abbildung 4.22: Geschwindigkeitsfelder, Ellipsenring mit $A_1=1$, $B_1=0.99$, $A_2=2$, $B_2=1.98$, Abplattung: 0.01, Periode der Temperaturanfängsstörung: 6, Amplitude: -10^{-3} , dimensionslose Zeit, 48×24 -FEM-Gitter.

4.3.2 Einfluß der Abplattung

Um das Konvektionsverhalten und die Geschwindigkeiten in Abhängigkeit der Abplattung untersuchen zu können, werden in allen Läufen die großen Halbachsen des Innen- und Außenringes der Ellipse konstant gehalten und nur die kleinen

Halbachsen variiert. Es wird keine Temperaturanfangsstörung gesetzt und die Ergebnisse im stationären Zustand verglichen. Die Rayleigh-Zahl variiert mit der Schichtdicke gemäß (4.3). Abbildung 4.23 zeigt drei Ellipsenringe unterschiedlicher Abplattung. Je kleiner die Abplattung ist, desto besser breitet sich die Wärme entlang den kleinen Halbachsen zur Oberfläche hin aus. Im dritten Bild ist der Ellipsenring zu schmal, als daß Aufstiegszonen entstehen könnten. Das zugehörige Geschwindigkeitsfeld zeigt wie üblich vier Konvektionszellen.

Die Tabelle 4.5 enthält den Zusammenhang zwischen Strömungsgeschwindigkeit und Abplattung von Ellipsenringen. Alle durchgeführten Läufe zeigen das in Ellipsenringen typische Konvektionsverhalten. Vergleicht man die im stationären Zustand berechneten Geschwindigkeiten v_{max} und v_{rms} , liefert Tabelle 4.5 die Erkenntnis, daß mit abnehmender Abplattung die Strömung schneller wird.

Tabelle 4.5: Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit von der Abplattung bei Ellipsenringen jeweils gleicher großer Halbachsen für Innen- und Außenringe, keine Temperaturanfangsstörung.

Abplattung $f = (A - B)/A$	v_{max} dimensionslos	v_{rms} dimensionslos
$f = 0.006$	45.76	33.39
$f = 0.01$	48.16	37.74
$f = 0.03$	44.92	30.46
$f = 0.05$	43.42	29.34
$f = 0.1$	44.55	29.07
$f = 0.5$	40.45	21.26
$f = 0.6$	34.39	15.13
$f = 0.7$	19.84	8.35
$f = 0.8$	12.13	5.39

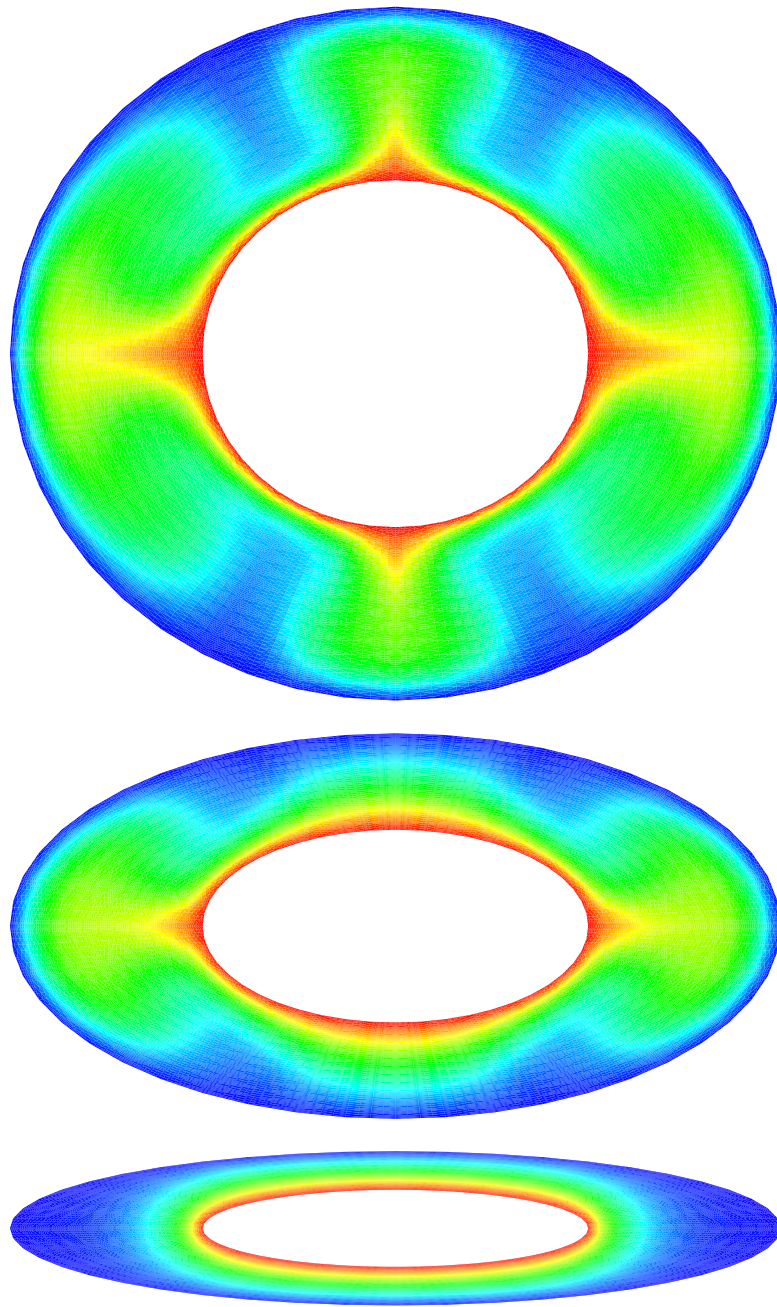


Abbildung 4.23: Temperaturfelder im stationären Zustand, Ellipsenringe jeweils gleicher großer Halbachsen für Innen- und Außenringe ($A_1 = 1$, $A_2 = 2$), Abplattungen von $f = 0.1$ ($B_1 = 0.9$, $B_2 = 1.8$), $f = 0.5$ ($B_1 = 0.5$, $B_2 = 1.0$), $f = 0.8$ ($B_1 = 0.2$, $B_2 = 0.4$), keine Temperaturanfangsstörung, 48×24 -FEM-Gitter.

4.3.3 Ellipsenringe verschiedener Schichtdicken

Um Ellipsenringe verschiedener Schichtdicken aber gleicher Abplattung zu konstruieren, sei die innere Ellipse immer durch $A1 = 1.0$ und $B1 = 0.5$ gegeben, die äußere variiert mit $a)$ $A2 = 1.5$, $b)$ $A2 = 2.0$ und $c)$ $A2 = 2.5$ (Abbildung 4.24). Im Lauf $a)$ entstehen zwar vier Geschwindigkeitszellen, aber die Schichtdicke ist zu klein, um Aufstiegszonen entstehen zu lassen. Das liegt an der geringen Geschwindigkeit von $v_{max} = 5.64$ und $v_{rms} = 3.29$. Im Lauf $b)$ berechnet man $v_{max} = 40.45$ und $v_{rms} = 21.26$. Die Wärme wird entlang den großen Halbachsen an die Oberfläche transportiert. Größere Aufstiegszonen entstehen im Lauf $c)$, in dem die Konvektionszellen im stationären Zustand Geschwindigkeiten von $v_{max} = 182.97$ und $v_{rms} = 102.23$ aufweisen. Daher dominieren die vier Konvektionszellen an den großen Halbachsen und lassen keine Aufstiegszonen an den kleinen Halbachsen entstehen (Abbildung 4.24). Zusammengefaßt ergibt sich der Befund, je größer die Schichtdicke desto größer die Geschwindigkeit.

4.4 Erdartiger Ellipsenring

Die Erde weist eine geringe Abplattung von $f = 1/298$ (Kertz, 1969) auf, so daß sich die Konvektion wie in einem Ellipsenring verhält. Unter der Annahme einer Temperaturanfängsstörung treten aber auch Strömungseigenschaften wie in einem Kreisring auf. Der Einfluß des Schwerefeldes in einem ellipsoidischen Erdmantel auf die Strömungsgeschwindigkeit ist nicht zu vernachlässigen. Durch Einführen einer Phasengrenze kann eine Zwei-Schicht-Konvektion mit tiefenabhängiger Viskosität betrachtet werden. Für den ellipsoidischen Erdmantel wurden die Parameter in Tabelle 2.1 aus Kertz (1969) genommen. Mit Hilfe der Formel (4.3) läßt sich die Rayleigh-Zahl ermitteln.

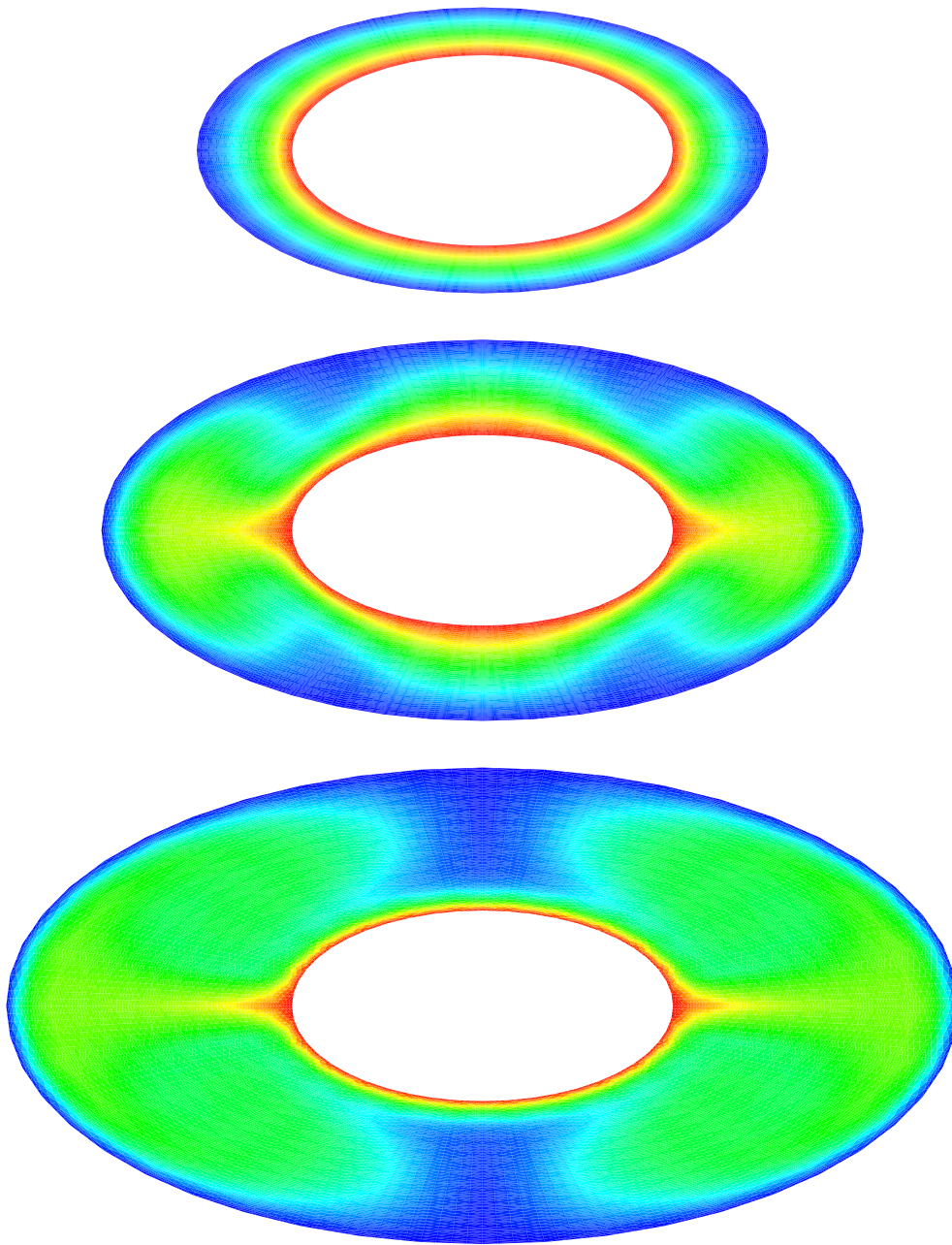


Abbildung 4.24: Temperaturfelder im stationären Zustand, Ellipsenringe der Abplattung 0.5: a) $A_1 = 1.0$, $B_1 = 0.5$, $A_2 = 1.5$, $B_2 = 0.75$, b) $A_1 = 1.0$, $B_1 = 0.5$, $A_2 = 2.0$, $B_2 = 1.0$, c) $A_1 = 1.0$, $B_1 = 0.5$, $A_2 = 2.5$, $B_2 = 1.25$, keine Temperaturanfängsstörung, 48×24 -FEM-Gitter.

4.4.1 Zeitliche Entwicklung der Konvektion

Entsprechend den Untersuchungen der Konvektion in Ellipsenringen ist auch bei einem erdartigen Ellipsenring keine Temperaturanfängsstörung notwendig, um die Symmetrie zu brechen. In den Abbildungen 4.25 und 4.26 wird die zeitliche Entwicklung der Konvektion in einem ellipsoidischen Erdmantel betrachtet. Für die dimensionslosen Rechnungen sind die große Halbachse der Kern-Mantel-Fläche durch $A1 = 1.0$ und die entsprechende kleine durch $B1 = 0.99664$ gegeben. Die große Halbachse der Erdoberfläche ist $A2 = 1.83756$ und die entsprechende kleine $B2 = 1.831386$.

Der Anfangszustand besteht aus vier Konvektionszellen (Abbildung 4.26) und aus einem kontinuierlichen Temperaturverlauf von $T = 1$ an der Kern-Mantel-Grenze bis $T = 0$ an der Erdoberfläche. Wie bereits bei Ellipsen geringer Abplattung festgestellt, entwickeln sich aufgrund der natürlichen Störung zwei große Aufstiegszonen entlang den großen Halbachsen und zwei kleine entlang den kleinen Halbachsen (Abbildung 4.25). Abbildung 4.26 zeigt das dazugehörige Geschwindigkeitsfeld. Die Elliptizität bewirkt die Wanderung der ursprünglichen vier Konvektionszellen zu den großen Halbachsen hin, so daß sich entlang den kleinen Halbachsen neue Konvektionszellen bilden können. Den stationären Zustand kennzeichnen vier große und vier kleine Konvektionszellen. Bei $t = 0.08$ ist die Einschwingphase beendet, wie auch die v_{rms} -Kurve in Abbildung 4.31 darstellt. Die räumlich gemittelte Geschwindigkeit berechnet sich zu $v_{rms} = 93.0$, und die maximale Geschwindigkeit ist $v_{max} = 137.7$. Das entspricht etwa 1.2 cm/a . Bei einer vergleichbar großen Rayleigh-Zahl sind die Strömungen in einem Kreisring langsamer, etwa $v_{rms} = 44.1$ und $v_{max} = 64.5$.

Berechnet man die räumlich gemittelte Geschwindigkeit der Konvektionszellen im stationären Zustand im Pol- und im Äquatorbereich, so erhält man mit den Werten $v_{rms}(\text{Polbereich}) = 92.2$ und $v_{rms}(\text{Äquatorbereich}) = 93.8$ eine Abweichung von 1.7%. Dabei kann nachgewiesen werden, daß sich diese Abweichung nicht aufgrund von Rechenungenauigkeiten des Programms ergibt. Diese liegen nämlich für obige Berechnungen bei 0.04%. Diese Zahl ermittelt man, indem die

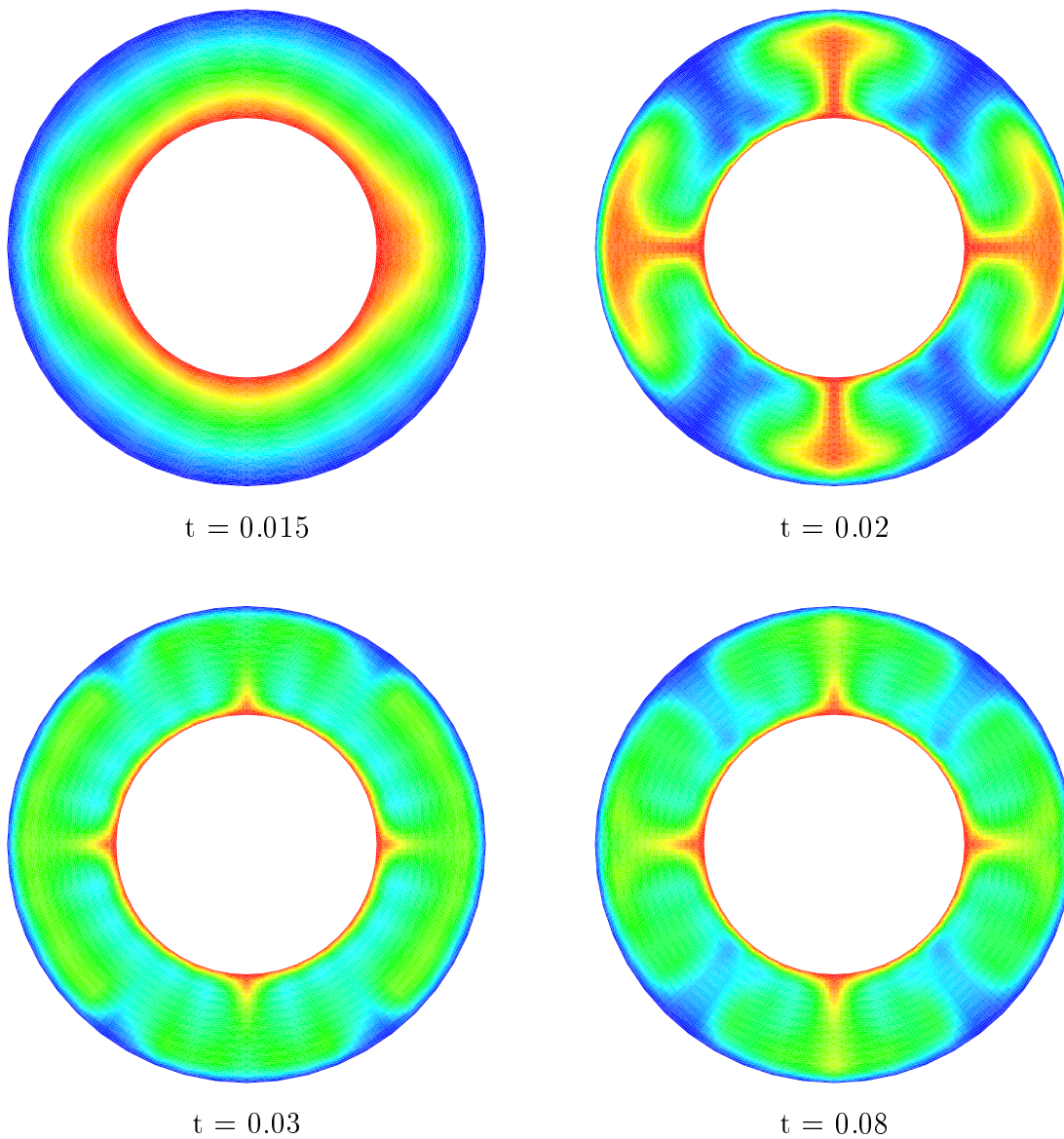


Abbildung 4.25: Temperaturfelder des erdartigen Ellipsenringes, keine Temperaturanfangsstörung, dimensionslose Zeit, 48×24 -FEM-Gitter.

Geschwindigkeiten in den finiten Elementen am Nordpol mit denen am Südpol verglichen werden.

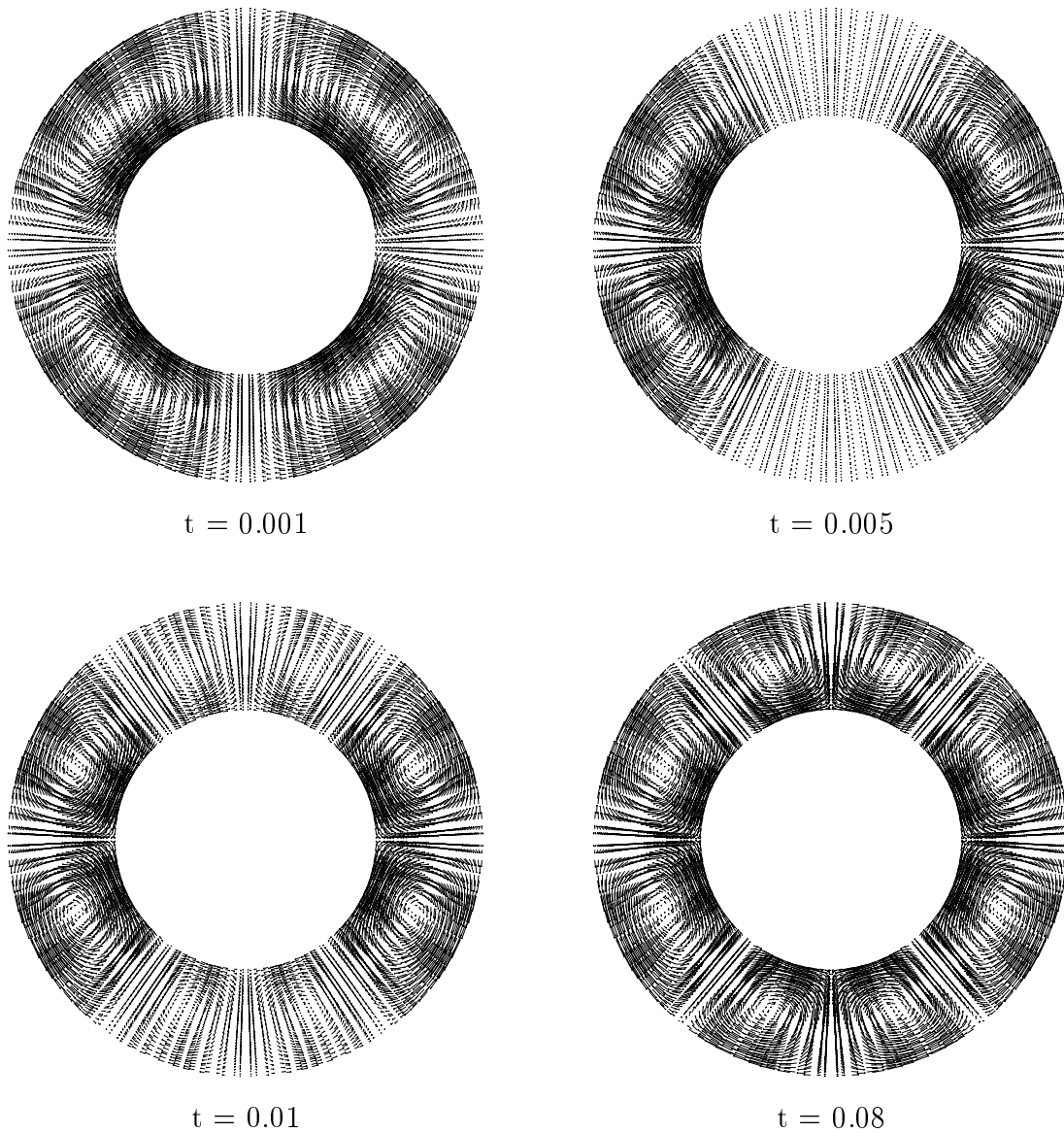


Abbildung 4.26: Geschwindigkeitsfelder des erdartigen Ellipsenringes, keine Temperaturanfängsstörung, dimensionslose Zeit, 48×24 -FEM-Gitter

4.4.2 Auswirkungen der Temperaturanfängsstörung

Abbildung 4.27 zeigt die Temperaturfelder im stationären Zustand von vier Läufen verschiedener Perioden der Temperaturanfängsstörung. Die Rayleigh-Zahl variiert hier zwischen $8.9082 \cdot 10^3$ und $8.9377 \cdot 10^3$. Vernachlässigt man den Störterm in der Formel (2.27), entwickelt sich im elliptischen Erdmantel eine natürliche

Konvektion, ähnlich den Abbildungen 4.25 und 4.26. Ist eine Temperaturanfängsstörung mit der Periode $\xi = 2$ gegeben, entstehen ähnliche Strömungsbilder wie im ungestörten Fall. Das Geschwindigkeitsfeld besteht aus vier großen und vier kleinen Konvektionszellen, wobei die kleinen entlang den kleinen Halbachsen im Fall $\xi = 2$ geringfügig höhere Geschwindigkeitswerte aufweisen als im ungestörten Fall. Das Temperaturbild (Abbildung 4.27) zeigt unterschiedlich große Aufstiegszonen der beiden Läufe im Polbereich. Im Vergleich hierzu sind die Aufstiegszonen bei Periode 4 und 6 alle gleich groß. Das dazugehörige Geschwindigkeitsfeld zeigt im stationären Zustand 8 bzw. 12 gleich große Konvektionszellen. Die Anzahl der Zellen ist von Anfang an gegeben, aber in beiden Fällen sind vier Geschwindigkeitszellen größer und schneller als die übrigen, was aufgrund der Elliptizität begründet ist.

Auswertung

Mit Hilfe der Abbildung 4.6 erkennt man, daß sich bei Periode 4 und 6 genau dort Aufstiegszonen bilden, wo die Maxima der Temperaturanfängsstörung liegen. Entlang den großen Halbachsen entstehen also nicht notwendig Aufstiegszonen wie im elliptischen Fall. Das Strömungsverhalten ist identisch mit dem in Kreisringen (vgl. Abbildungen 4.9 und 4.11). In beiden Läufen hat also die vorgegebene Temperaturerhöhung einen größeren Einfluß als die natürliche Störung. Die Elliptizität macht sich nur am Anfang durch die vier großen und schnellen Konvektionszellen bemerkbar.

Sowohl für den ungestörten Lauf als auch für den Lauf der Periode 2 entwickeln sich Geschwindigkeitsfelder ähnlich dem Lauf in Abbildung 4.26. Die vier großen Konvektionszellen wandern zu den großen Halbachsen hin und lassen an den kleinen Halbachsen vier weitere Zellen entstehen. Diese Entwicklung wird im Fall $\xi = 2$ durch die Temperaturanfängsstörung verstärkt (vgl. Abbildung 4.6), da sich im Polbereich bei $\xi = 2$ ein wenig größere Aufstiegszonen bilden als im ungestörten Lauf. Vergleicht man Abbildung 4.7 mit Abbildung 4.27, erkennt man, daß der Einfluß der natürlichen Störung größer ist als die Anfangsstörung.

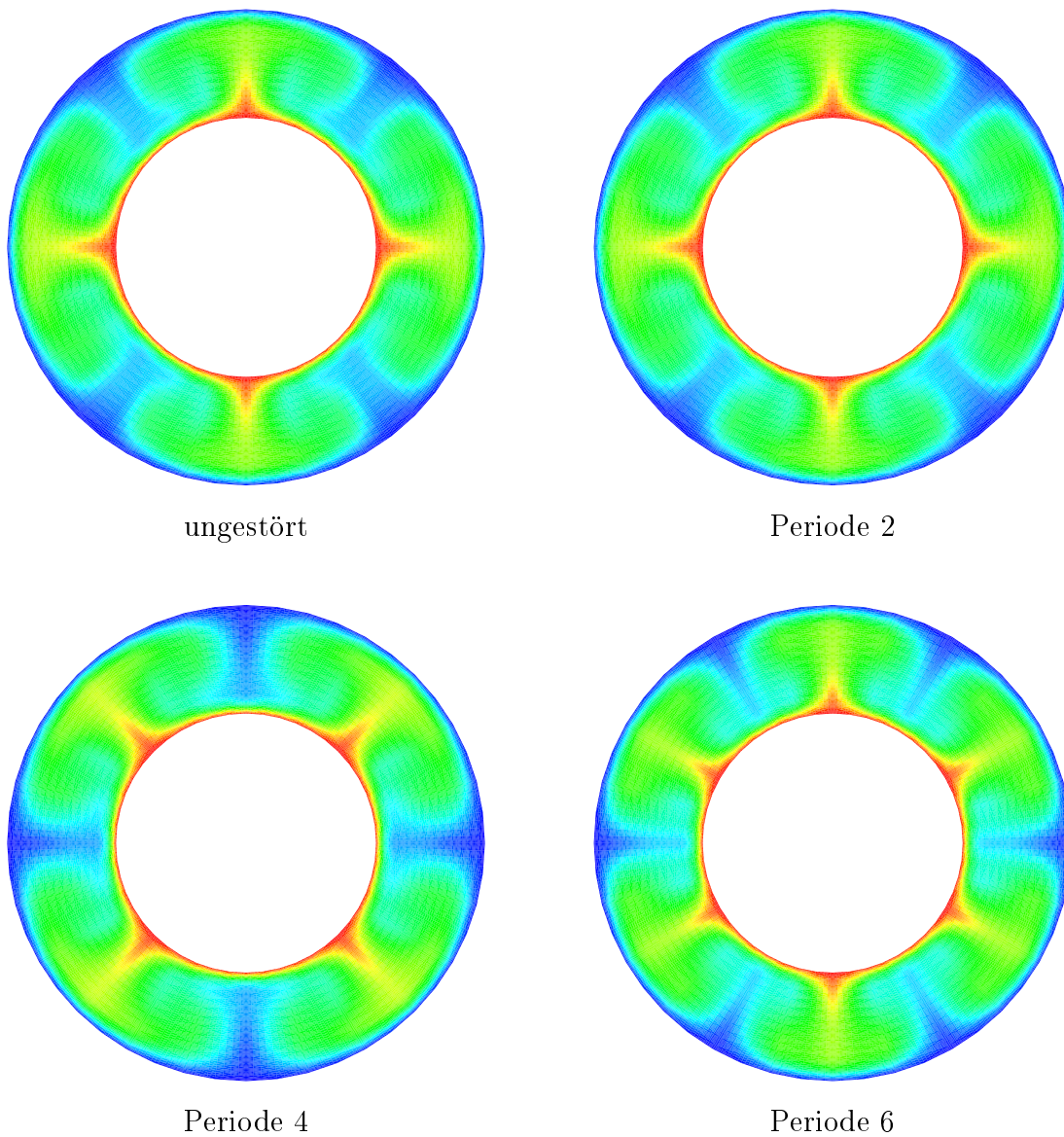


Abbildung 4.27: Temperaturfelder im stationären Zustand, erdarter Ellipsenring, verschiedene Perioden der Temperaturanfängsstörung, 48×24 -FEM-Gitter.

Daß der Lauf mit Periode 2 mit dem ungestörten Lauf fast identisch ist, zeigen auch die übereinstimmenden Einschwingkurven und die Geschwindigkeitswerte in Tabelle 4.6. Die anfänglich hohe Geschwindigkeit der vier Konvektionszellen in Ellipsenringen kennzeichnet den ersten steilen Ausschlag der Schwingung (ent-

Tabelle 4.6: Vergleich der Geschwindigkeiten in Abhängigkeit der Periode der Temperaturanfangsstörung, erdartiger Ellipsenring.

Periode	v_{max} dimensionslos	v_{rms} dimensionslos
ungestört	85.72	59.04
$\xi = 2$	86.16	59.07
$\xi = 4$	85.03	58.05
$\xi = 6$	72.79	49.25

sprechend Abbildung 4.31). Er erreicht einen Wert von $v_{rms} = 104$. Der Lauf mit Periode 4 hat einen ersten Ausschlag in Höhe von $v_{rms} = 86$, und der Lauf mit Periode 6 erreicht $v_{rms} = 65$. Existieren aufgrund einer Anfangsstörung von Anfang an mehr als vier Konvektionszellen, sind diese auch durch geringere Geschwindigkeiten gekennzeichnet. Die Einschwingphasen sind dann bei $t = 0.14$ beendet, zehn Zeitschritte eher als im ungestörten Fall. In diesem Lauf sowie in dem Lauf mit Periode 2 stellt sich der stationäre Zustand bei $t = 0.15$ ein. Die dann erreichte maximale Geschwindigkeit v_{max} und die räumlich gemittelte Geschwindigkeit v_{rms} enthält Tabelle 4.6. Die geringere Geschwindigkeit bei Periode 6 erklärt Tabelle 4.2. In diesem Lauf bilden sich nämlich zwölf Konvektionszellen aus, in den ersten drei Läufen sind es acht. Die Befunde für den Lauf ohne Störung und für die Periode 2 stimmen mit Tabelle 4.4 überein.

Es zeigt sich, daß man die Abplattung in erdartigen Konvektionsrechnungen nicht vernachlässigen darf. Im elliptischen Erdmantel treten Strömungseigenschaften wie in einem Ellipsenring auf. Erst bei Perioden ab $\xi = 4$ sind Auswirkungen der Temperaturanfangsstörung zu erkennen. Die Anzahl der Aufstiegszonen ist dann von der Periodenzahl abhängig, und ihre Lage wird von den Maxima der Störfunktion bestimmt.

4.4.3 Gittervergleich

Für den erdartigen Ellipsenring, den Kreisring und das Rechteckgebiet werden jeweils mehrere Läufe gleicher Eingangsparameter auf unterschiedlich feinem Gitter durchgeführt. Tabelle 4.7 zeigt, daß die räumlich gemittelte Geschwindigkeit und die maximale Geschwindigkeit im stationären Zustand nur geringfügig kleiner sind, je feiner das Netz gewählt wird. Es ist also ausreichend, für die Konvektionsmodellierungen ein 48×24 feines Gitter zu wählen.

Tabelle 4.7: Vergleich der Geschwindigkeitswerte zwischen einem 48×24 und einem 80×30 -Gitter für den erdartigen Ellipsenring und den Kreisring, sowie ein 12×12 und 24×24 -Gitter für das Rechteckgebiet.

Modell	Gitter	v_{max} dimensionslos	v_{rms} dimensionslos
Erdartiger Ellipsenring	48×24	137.7	93.0
	80×30	135.7	90.8
Kreisring	48×24	64.5	44.1
	80×30	63.9	42.2
Kasten	12×12	69.47	42.874
	24×24	69.45	42.87

Kellogg und King (1997) entwickelten ein Finite-Elemente-Modell zur Untersuchung der Plume-Struktur in Kreissektoren. Sie führten mehrere Testläufe identischer Modelle auf einem 96×96 -Gitter und auf einem 64×32 -Gitter durch. Es zeigte sich, daß das gröbere Netz zur Berechnung der Plume-Struktur ausreicht. Hansen und Ebel (1988) benutzten 49×17 Elemente zur Modellierung zeitabhängiger thermischer Konvektion mit der Finiten-Elemente-Methode. Nur wenige Ergebnisse verifizierten sie auf einem 100×25 -Gitter.

4.4.4 Änderung der Rayleigh-Zahl

Die Struktur der Aufstiegszonen in Abhängigkeit der Rayleigh-Zahl wurde zum Beispiel von Dubuffet et al. (1999) und Jarvis (1993) untersucht. Sie verwendeten Rayleigh-Zahlen zwischen 10^4 und 10^6 . Es bestätigt sich eine sehr gute Übereinstimmung der vorliegenden Ergebnisse mit denen in der Literatur. Die Rayleigh-Zahlen der vier Läufe in Abbildung 4.28 berechnen sich für den erdartigen Ellipsenring zu: a) $7.454129 \cdot 10^3 \leq Ra \leq 7.468884 \cdot 10^3$, b) $8.908258 \cdot 10^3 \leq Ra \leq 8.937769 \cdot 10^3$, c) $1.036238 \cdot 10^4 \leq Ra \leq 1.040665 \cdot 10^4$ und d) $1.181651 \cdot 10^4 \leq Ra \leq 1.187553 \cdot 10^4$. Man erkennt, je größer die Rayleigh-Zahl ist, desto schneller wird die Wärme von der Kern-Mantel-Grenze an die Erdoberfläche transportiert. Die Schlotte der konvektiv aufsteigenden Diapire und deren Durchmesser unterhalb der Oberfläche werden von Lauf a) bis Lauf d) schmaler. Bereits in den Abbildungen 4.1 und 4.2 wurde dieser Befund diskutiert. Die Geschwindigkeitsfelder der hier untersuchten Läufe sind der Abbildung 4.26 ähnlich, außer daß die Vektoren bei größeren Rayleigh-Zahlen höhere Beträge anzeigen. Man stellt ebenfalls fest, daß sowohl die Brechung der Symmetrie als auch der stationäre Zustand desto früher einsetzen, je größer die Rayleigh-Zahl ist.

Auswertung

In mehreren Läufen wurden die räumlich gemittelte Geschwindigkeit v_{rms} und die maximale Geschwindigkeit v_{max} im stationären Zustand gemessen:

a) $v_{rms} = 36.52$, $v_{max} = 52.47$

b) $v_{rms} = 59.04$, $v_{max} = 85.72$

c) $v_{rms} = 77.61$, $v_{max} = 114.06$

d) $v_{rms} = 93.0$, $v_{max} = 137.73$

e) $v_{rms} = 17.48$, $v_{max} = 25.11$

Im Lauf e) liegt die Rayleigh-Zahl zwischen $6.581651 \cdot 10^3$ und $6.587553 \cdot 10^3$. Hier stellt sich der stationäre Zustand erst bei $t = 0.4$ ein. Um auch eine quantitative Aussage machen zu können, ist die räumlich gemittelte Geschwindigkeit des stationären Zustandes gegenüber der Rayleigh-Zahl in Abbildung 4.29 aufgetragen.

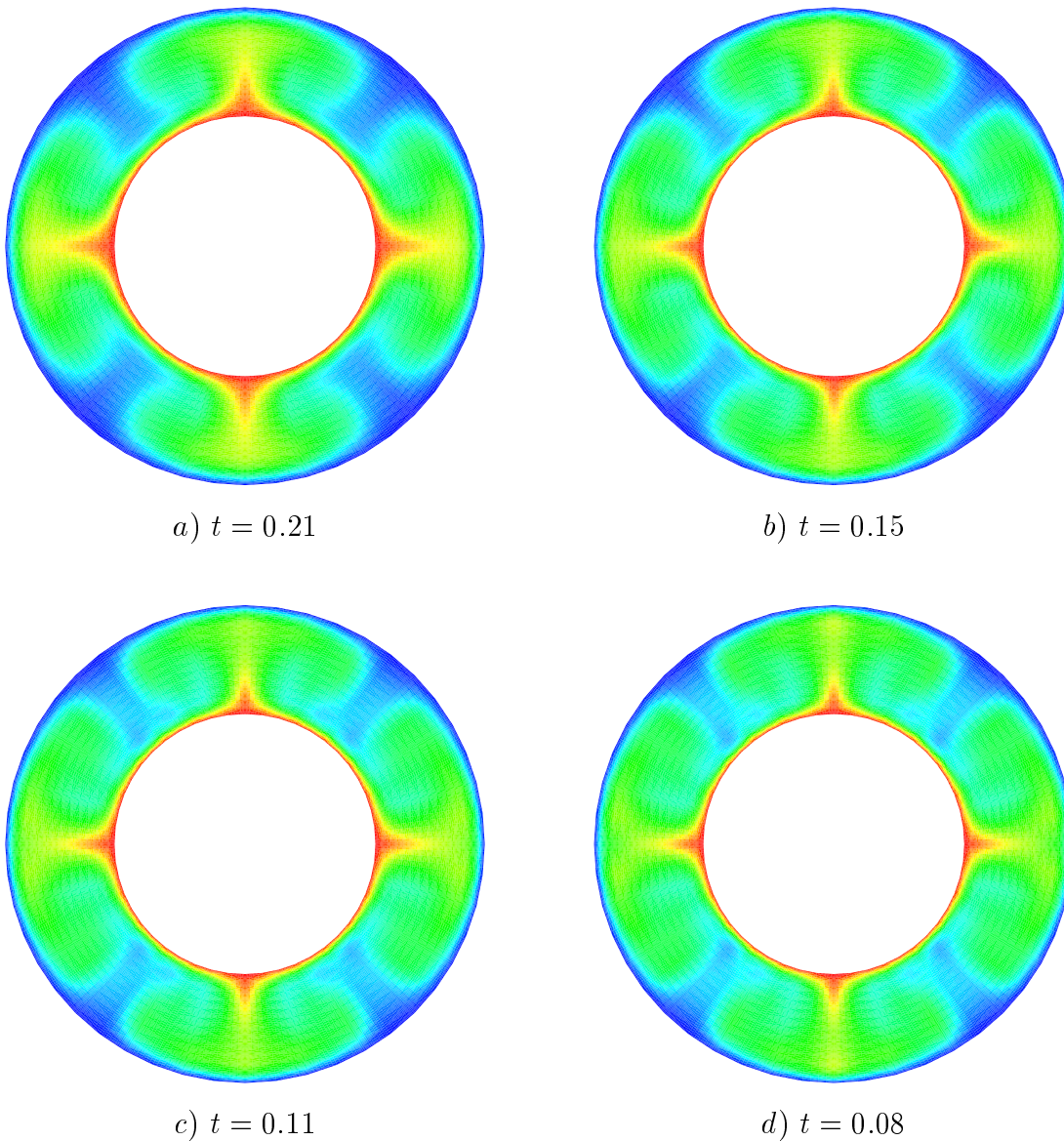


Abbildung 4.28: Temperaturfelder im stationären Zustand, erdarter Ellipsenring, keine Temperaturanfängsstörung, 48×24 -FEM-Gitter, Rayleigh-Zahlen siehe Text, die dimensionslosen Zeiten geben das Ende der Einschwingphase an.

Es zeigt sich, daß die Geschwindigkeit mit der Rayleigh-Zahl ansteigt. Die Anzahl der Läufe reicht noch nicht aus, um den genauen Funktionsverlauf beschreiben zu können. Er ist jedenfalls nicht linear.

Die Abbildungen 4.30 und 4.31 zeigen die zeitliche Entwicklung der räumlich

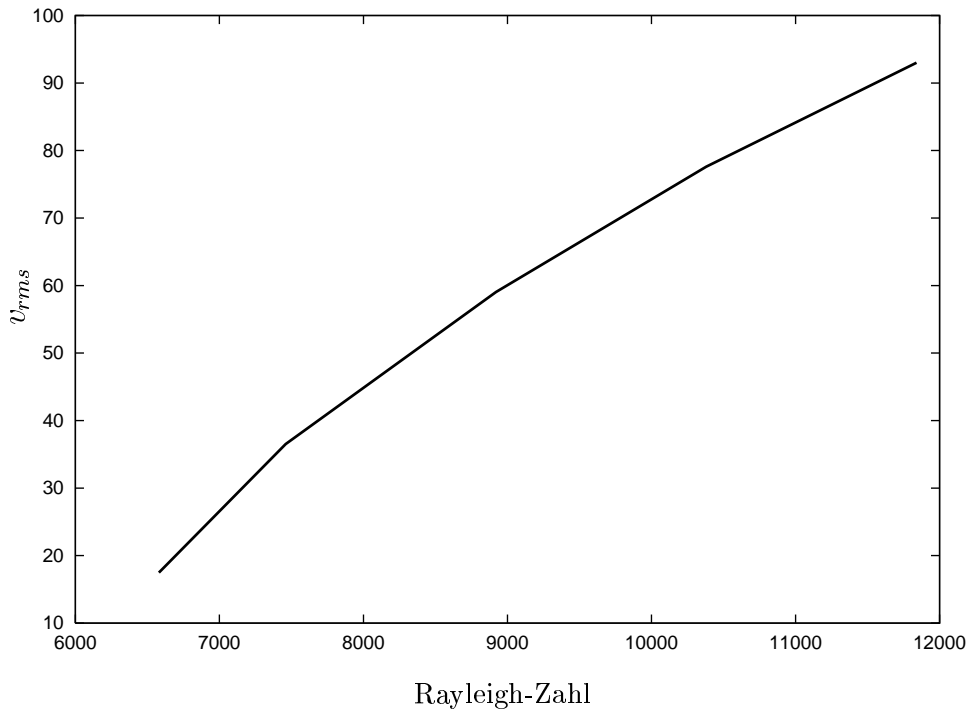


Abbildung 4.29: Abhängigkeit der räumlich gemittelten Geschwindigkeit v_{rms} im stationären Zustand von der Rayleigh-Zahl Ra .

gemittelten Geschwindigkeit für die Läufe *a*) und *d*). Der Verlauf der Kurve ist ähnlich der des Kastenmodells (Abbildung 4.3 und Abbildung 4.4), allerdings treten wesentlich weniger Schwingungen auf. Bei vergleichbar großer Rayleigh-Zahl entstehen im elliptischen Erdmantel viel höhere Geschwindigkeiten als in einem Rechteckgebiet. Das gleiche gilt für einen Kreisring. Endet die Einschwingphase für einen Kreisring bei etwa 0.2, dann ist dieser Lauf mit Lauf *c*) zu vergleichen, bei dem der stationäre Zustand bei $t = 0.11$ beginnt. Bei höheren Geschwindigkeiten tritt der stationäre Zustand also früher ein. Dieser Befund ist in den Abbildungen 4.30 und 4.31 sehr gut zu erkennen. Außerdem ist zu bemerken, daß sich der erste Ausschlag der Schwingung verstärkt, je größer die Rayleigh-Zahl ist. Dieser Effekt sehr hoher Geschwindigkeiten in den ersten Zeitschritten kann zu numerischen Instabilitäten führen.

Ein Vergleich zweier v_{rms} -Kurven zwischen nicht-Newtonscher und Newtonscher Konvektion ist in der Arbeit von Malevsky und Yuen (1992) zu sehen. Die Amplituden der Schwingung im ersteren Fall zeigen erheblich größere Ausschläge als im

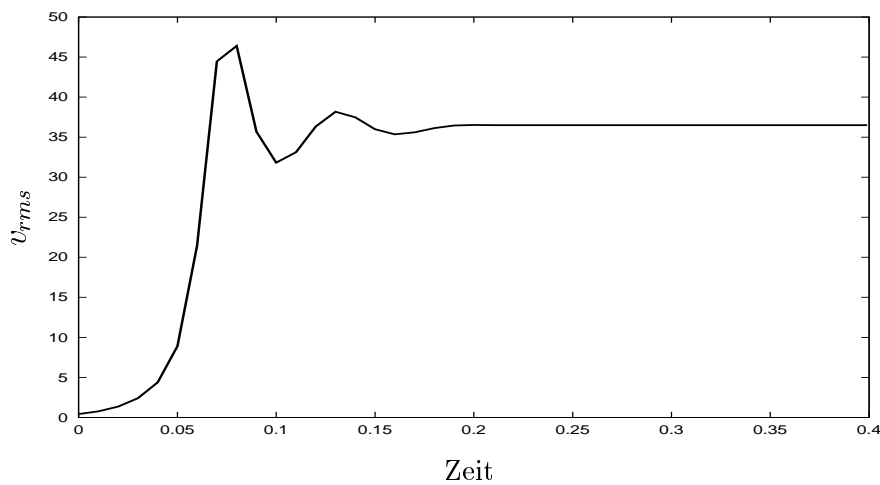


Abbildung 4.30: Zeitliche Entwicklung der dimensionslosen, räumlich gemittelten Geschwindigkeit v_{rms} für den Lauf $a)$, $7.454129 \cdot 10^3 \leq Ra \leq 7.468885 \cdot 10^3$, erdartiger Ellipsenring.

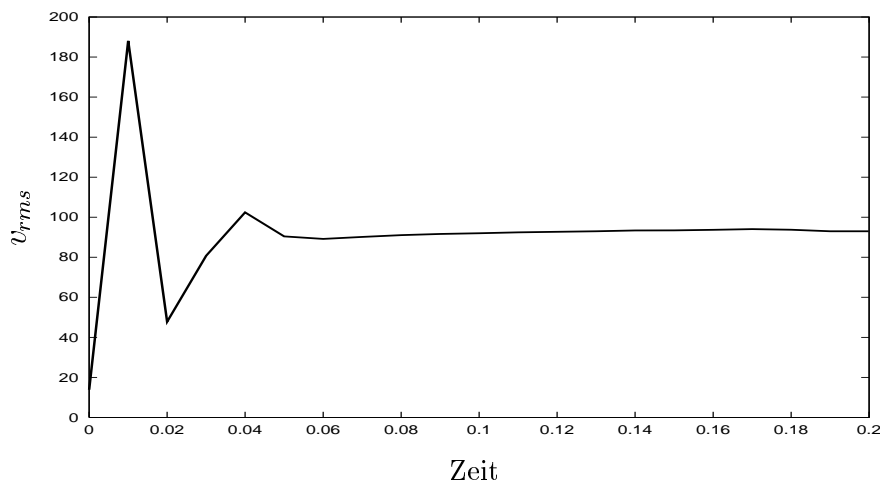


Abbildung 4.31: Zeitliche Entwicklung der dimensionslosen, räumlich gemittelten Geschwindigkeit v_{rms} für den Lauf $d)$, $1.181651 \cdot 10^4 \leq Ra \leq 1.187553 \cdot 10^4$, erdartiger Ellipsenring.

Newtonschen Fall. Der stationäre Zustand wird bei nicht-Newtonscher Konvektion viel später erreicht. Malevsky und Yuen (1992) berechnen die Mantelkonvektion in einem Kasten mit Heizung von unten, nicht-Newtonscher Rheologie, dimensionsloser Zeit und einer Temperaturanfängsstörung entsprechend Formel (2.28) mit größerer Amplitude. Bei einem Vergleich der Konvektion mit drei verschiede-

nen Rayleigh-Zahlen wird festgestellt, daß die Auf- und Abstiegsszonen schmaler und schneller werden, je größer die Rayleigh-Zahl gewählt wird. Bei $Ra = 4500$ wird der turbulente Zustand erreicht. In allen Fällen treten Instabilitäten an den Rändern des Kastens auf. Diese treten in einem Kreis- oder Ellipsenring nicht auf.

4.4.5 Schwerefeldeinfluß

Um in einem ellipsoidischen Erdmantel eine nichtkonstante Schwerebeschleunigung berücksichtigen zu können, werden die Schwerewerte in Abhängigkeit der Daten aus PREM (Dziewonski und Anderson, 1981) und der Internationalen Schwereformel (Kertz, 1969) berechnet, wie es in Kapitel 2.4 erklärt worden ist. Die Schwerevektoren zeigen immer in Normalenrichtung, wie es in Abbildung 2.1 skizziert ist.

Als Modellbeispiel wird der erste Lauf der Abbildung 4.27 gewählt. In diesem erdartigen Ellipsenring ohne Temperaturanfangsstörung werden die Schwerewerte integriert, und die Ergebnisse werden in Tabelle 4.8 verglichen. Die maximale Geschwindigkeit im stationären Zustand ist um 1.97% größer als in dem Lauf mit konstantem Schwerefeld. Für die räumlich gemittelte Geschwindigkeit ergibt sich eine Abweichung von 1.53%. Dieser Unterschied in den Geschwindigkeitswerten ist in den Bildern zur zeitlichen Entwicklung der Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder kaum erkennbar. Ebenso liefern beide hier betrachteten Läufe den gleichen Verlauf der Einschwingkurven. Trotz gleichen Konvektionsverhaltens in beiden Fällen sollte eine Abweichung der Geschwindigkeitswerte von über 1.5% nicht vernachlässigt werden. Diese liegt bereits im meßbaren Bereich der Kontinentalbewegungen. Bei Modellierungen der Konvektion ist somit der Einfluß des räumlich variablen Schwerefeldes auf die Strömungsgeschwindigkeiten im Erdmantel zu berücksichtigen.

Die räumlich gemittelte Geschwindigkeit der Konvektionszellen im Polbereich

Tabelle 4.8: Vergleich der dimensionslosen Geschwindigkeiten des stationären Zustandes unter Berücksichtigung des räumlich variablen Schwerefeldinflusses.

	räumlich variable Schwere	konstante Schwere	Abweichung
v_{max}	87.45	85.72	1.97%
v_{rms}	59.96	59.04	1.53%

berechnet sich zu $v_{rms}(\text{Polbereich}) = 59.5$. Im Äquatorbereich ergibt sich ein höherer Wert von $v_{rms}(\text{Äquatorbereich}) = 60.3$. Es liegt also eine Abweichung von 1.3% vor, wobei man eine Rechenungenauigkeit von 0.02% ermittelt. Aufgrund der Abplattung des erdartigen Ellipsenringes von 0.3% ergab sich in Kapitel 4.4.1 ohne Berücksichtigung der räumlichen Abhängigkeit der Schwerewerte eine Abweichung von 1.7%. Da die Schwerebeschleunigung an den Polen größer ist als am Äquator, berechnet man dort eine größere Rayleigh-Zahl, was höhere Geschwindigkeiten zur Folge hat. Daher ist die Abweichung des Modells mit Berücksichtigung der räumlich variablen Schwere geringer als im elliptischen Erdmantel mit konstantem Schwerefeldeinfluß.

4.4.6 Tiefenabhängige Viskosität

In der vorliegenden Arbeit wird das Viskositätsmodell nach Bunge et al. (1997) verwendet. Die Viskosität ist tiefenabhängig, hat im oberen Mantel einen Wert von $2 \cdot 10^{22}$ Pa s und ist im unteren Mantel 30 mal größer. Dieser Sprung wird unterhalb der endothermen Phasengrenze in 660 km Tiefe mit Hilfe einer stetigen Fortsetzung überwunden. Die Programmläufe mit tiefenabhängiger Viskosität zeigen ähnliches Konvektionsverhalten wie die bisherigen Ergebnisse, nur das Zentrum der Konvektionszellen liegt nicht mehr genau in der Mitte zwischen Kern-Mantel-Grenze und Erdoberfläche, sondern im oberen Drittel des Erdmantels (Abbildung 4.32). Dieser Befund erklärt sich durch die niedrigere Viskosität und damit höheren Geschwindigkeiten im oberen Mantel als im unteren. Man beobachtet schmalere Aufstiegszonen und größere kalte Abstrombereiche als in den Kreis- und Ellipsenringen mit konstanter Viskosität.

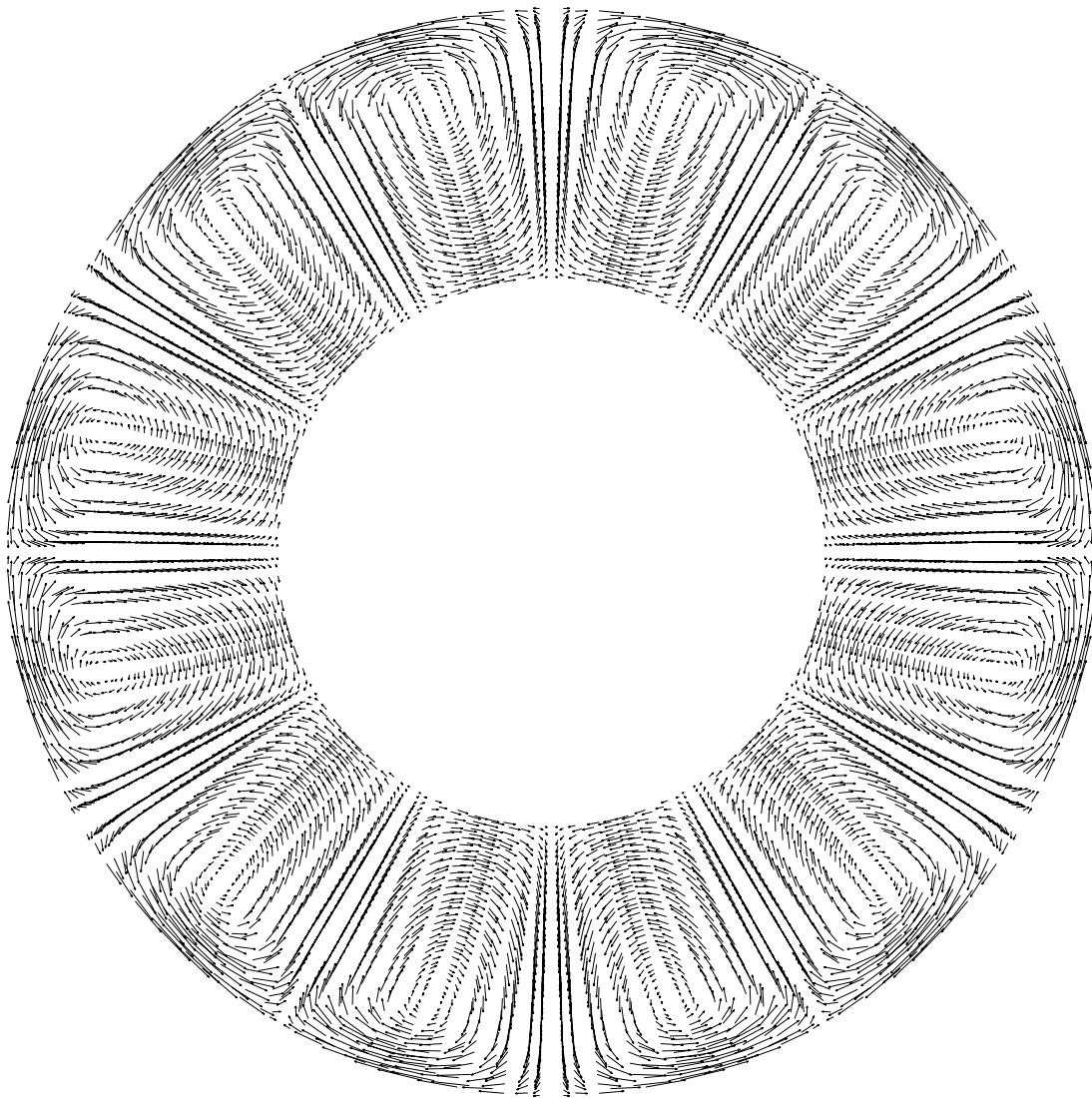


Abbildung 4.32: Geschwindigkeitsfeld, Kreisring mit $R_1=1$ und $R_2=2$, Periode der Temperaturanfängsstörung: 6, stationärer Zustand, tiefenabhängige Viskosität.

Diskussion

Die tiefenabhängige Mantelviskosität von $2 \cdot 10^{22}$ Pa s im oberen Mantel und $6 \cdot 10^{23}$ Pa s im unteren Mantel habe nach Bunge et al. (1997) einen größeren Einfluß auf die Struktur der Mantelkonvektion als jede andere physikalische Größe. Bunge et al. (1996, 1997) untersuchen die Mantelkonvektion in einer dreidimensionalen

Kugelschale und stellen fest, daß die Auswirkungen der tiefenabhängigen Viskosität, der endothermen Phasengrenze und der Heizung von innen oder von unten mit geophysikalischen und geologischen Beobachtungen übereinstimmen. Es sei wichtig, diese physikalischen Ereignisse in geodynamischen Modellierungen der Mantelkonvektion isoliert zu betrachten. Es wird von einem Referenzmodell mit innerer Heizung und $Ra = 10^8$ ausgegangen und nacheinander mit Heizung von unten, mit Phasengrenze und mit tiefenabhängiger Viskosität kombiniert. Im Referenzmodell dominieren isoliert absteigende Plumes, die Heizung von unten bewirkt große, achsensymmetrische Aufstiegszonen, und die Viskosität bewirkt die Entstehung langer Abtauchplatten. Die auf 670 km Tiefe gesetzte Diskontinuität wird durch einen Dichteunterschied von $\Delta\rho = 380 \text{ kg m}^{-3}$ und einer Clapeyron-Neigung von $-4 \text{ MPa} \cdot \text{K}^{-1}$ bestimmt. Daher durchdringen auf- und absteigende Platten nach zeitlicher Verzögerung diese Phasengrenze. Dieser Befund läßt sich mit der vorliegenden Arbeit weniger vergleichen, aber bei der Heizung von unten sind sehr gute Übereinstimmungen festzustellen. Bei einer Rayleigh-Zahl von $3 \cdot 10^6$ analysieren Bunge et al. (1996, 1997) die Auswirkungen der Heizung von unten bei tiefenabhängiger Viskosität. Es steigen schmale Plumes heißen Materials von der Kern-Mantel-Grenze radial auf und werden im oberen Mantel etwas abgelenkt. Lange Subduktionszonen tauchen von der Oberfläche in den Mantel ab, genau wie bei dem Referenzmodell mit Viskosität und innerer Heizung.

Ein weiteres Viskositätsmodell wurde von Kido & Čadek (1997) und Kido et al. (1998) bestimmt. Die Viskositätsprofile wurden aus seismischer Tomographie und Geoid hergeleitet. Der größte Sprung findet in einer Tiefe von etwa 1000 km statt, nicht an der 660 km-Diskontinuität. Die bis 1000 km niedrige Viskosität wird von zwei noch niedrigeren Viskositäts-Zonen unterbrochen, die eine liegt direkt unter der Lithosphäre, etwa von 100 bis 200 km Tiefe, die andere im Bereich um 820 km. Dieses Viskositätsmodell ist nur von der Tiefe abhängig. Walzer und Hendel (1999) ergänzen diese Struktur durch eine Scherviskosität als Funktion des Druckes und der Temperatur. Hiermit kann die Rheologie des Erdmantels etwas realistischer beschrieben werden. In der vorliegenden Arbeit gab es bis jetzt keine erwähnenswerten Ergebnisse der tiefenabhängigen, mehrstufigen Viskosität.

4.4.7 660-km-Diskontinuität

Der endotherme Phasenübergang in 660 km Tiefe teilt den Erdmantel in den oberen und den unteren Mantel. Der obere Teil des oberen Mantels bis in 410 km Tiefe besteht im wesentlichen aus den Mineralen Olivin, Ortho- und Klinopyroxen. In 410 km Tiefe wandelt sich das Olivin durch den Druck in β -Spinell um. Der Übergang von β - nach γ -Spinell erfolgt in einer Tiefe von 520 km. In 660 km Tiefe geht der γ -Spinell in Perovskit und Magnesiowüstit über. Der untere Mantel endet mit der Unterfläche der D''-Schicht in einer Tiefe von 2891 km. Die 660-km-Diskontinuität läßt die Frage entstehen, ob sich die Konvektionszellen durch den ganzen Erdmantel ziehen oder ob die Konvektion in zwei Etagen stattfindet oder ob eine Mischform aus diesen beiden Fällen vorliegt.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Zweischichtkonvektion erzwungen, so daß über den Phasensprung hinweg kein Materialtransport stattfindet (vergleiche Abbildung 4.33). In einer Tiefe von 660 km wird die Geschwindigkeitskomponente in Normalenrichtung auf Null gesetzt. Diese Modellannahme wurde von Walzer und Hendel (1997a,1997b) erfolgreich gemacht, aber durch Walzer und Hendel (1999) aufgegeben und durch die zwei oben erwähnten Phasengrenzen ohne Zwangsbedingung ersetzt.

In Abbildung 4.33 ist das Geschwindigkeitsfeld eines Kreisringes mit Phasengrenze und tiefenabhängiger Viskosität (nach Bunge et al., 1997) dargestellt. Aufgrund einer Temperaturanfängsstörung mit Periode 6 sind von Anfang an im unteren Mantel zwölf Konvektionszellen vorhanden. Es bilden sich sechs warme Aufstiegszonen. Im oberen Erdmantel ist die Geschwindigkeit am Anfang Null. Es entwickelt sich eine große Anzahl kleiner Konvektionszellen. Die Strömung wird immer schneller, so daß schließlich die Geschwindigkeit im oberen Mantel erheblich größer ist als die im unteren. Dies ist an der Länge der Geschwindigkeitsvektoren in Abbildung 4.33 gut zu erkennen. Verursacht wird das durch niedrige Viskosität im oberen Mantel.

Mehrere Läufe in Kreisringen und erdartigen Ellipsenringen zeigen, daß sich die Konvektion im unteren Mantel genauso verhält, wie es in den vorangegangenen Ka-

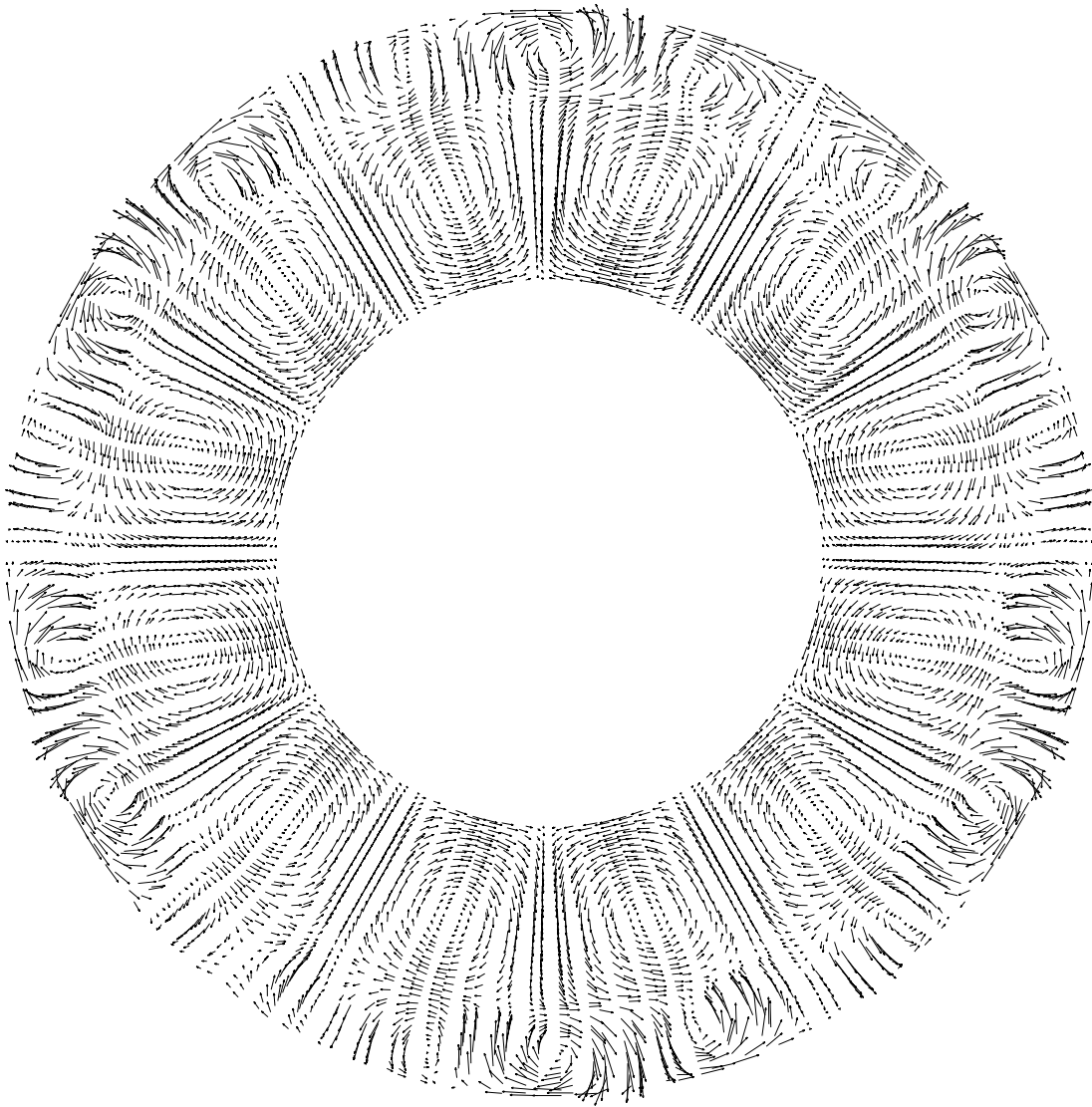


Abbildung 4.33: Geschwindigkeitsfeld, Kreisring mit $R_1=1$ und $R_2=2$, Periode der Temperaturanfängsstörung: 6, $t=0.1$, tiefenabhängige Viskosität, 660-km-Diskontinuität.

piteln dieser Arbeit analysiert worden ist. Im oberen Mantel bilden sich selbständig Auf- und Abstiegszonen. Setzt man allerdings die Viskosität im gesamten Erdmantel konstant, so bilden sich im oberen Mantel keine Konvektionszellen. Dieser ist zu schmal, wie bereits bei schmalen Ellipsenringen festgestellt worden ist (Abbildung 4.24). Die Wärme im unteren Mantel steigt von der Kern-Mantel-Fläche bis zur 660km-Phasengrenze auf, dort bilden sich kalte Abstrombereiche. Die

Temperatur unter der Diskontinuität ist insgesamt größer als an der Oberfläche.

Diskussion

Es ist gezeigt worden, daß sich bei einer Zweischichtkonvektion die Konvektionszellen im oberen Mantel unabhängig von der Konvektion im unteren Mantel bilden. Vergleicht man diese Ergebnisse mit der Arbeit von Glatzmaier und Schubert (1993), so stellt man eine sehr gute Übereinstimmung fest. Glatzmaier und Schubert (1993) untersuchen sowohl Ganzmantelkonvektion als auch Zweischichtkonvektion in Abhängigkeit konstanter und tiefenabhängiger Viskosität in einem dreidimensionalen sphärischen Modell. Es werden die gleiche Viskosität und die gleiche Bedingung an die Phasengrenze eingeführt wie in der vorliegenden Arbeit. Die dargestellten Geschwindigkeitsfelder stimmen mit den obigen Ergebnissen voll überein. Zum besseren Verständnis der Mantelkonvektion werden nur die Grenzfälle betrachtet, weder das Ein- noch das Zweischicht-Modell wären realistisch.

Um Geoid und Topographie realistisch beschreiben zu können, betrachten Mouchet et al. (1995) die Clapeyron-Neigung an der 670-km-Diskontinuität. Subduziertes Material durchdringt die endotherme Phasengrenze, sinkt bis zur Kern-Mantel-Fläche und kehrt aufgrund thermischer Auftriebskräfte zur Oberfläche zurück. Becker et al. (1999) und Silver et al. (1988) gewinnen die gleiche Erkenntnis bei Betrachtung geochemischer Modelle. Ergänzend sei noch Kellogg (1991) genannt, die die zweischichtige Konvektion im Erdmantel mit Hilfe der Finiten-Elemente-Methode in einem Kreisring mit Heizung von unten untersucht. Sie stellt die Frage, ob die aufsteigenden Plumes die Phasengrenze in 670 km Tiefe durchdringen oder nicht.

Kapitel 5

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird der Einfluß der Abplattung des Erdmantels auf die thermische Konvektion im Erdinneren untersucht. Für die Modellierung wird ein Schnitt durch den Erdmantel betrachtet, für den ein sich aus den physikalischen Erhaltungsgleichungen hergeleitetes Differentialgleichungssystem für den Wärmetransport und das Gesteinskriechen gelöst wird. Für Rechteck- und Kreisgebiete wurde dieses Differentialgleichungssystem schon vielfach gelöst, für ellipsoidische Gebiete müssen jedoch zunächst spezielle Koordinatentransformationen durchgeführt werden, um die Randbedingungen und die Abhängigkeit der Schichtdicke von den Punktkoordinaten berücksichtigen zu können. Die transformierte Temperaturanfängsstörung wird durch eine \cos -Funktion beschrieben, deren Maxima die Perioden der Störung bestimmen.

Als Diskretisierungsverfahren wird die Finite-Elemente-Methode verwendet. Zum Lösen der Variationsformulierung des geodynamischen Modells dient das Programm *VECFEM*. Für die grafische Darstellung der Temperaturfelder durch kontinuierliche Farbspektren und der Geschwindigkeitsfelder durch Vektoren wurde das Programm *sde* entwickelt. Die verwendeten numerischen Lösungsverfahren werden in dieser Arbeit an Benchmarkmodellen erfolgreich getestet. Als Vergleichswert wird die räumlich gemittelte Geschwindigkeit im stationären Zustand benutzt. Die Abweichungen meiner Rechnungen von diesen Modellen betragen weniger als 0.06%. Die zeitliche Entwicklung der thermischen Konvektion in ei-

nem Rechteckgebiet und in einem Kreisring zeigen gute Übereinstimmungen mit anderen bekannten Ergebnissen.

Bei der Modellierung des Erdmantels durch einen Kreisring zeigen meine Ergebnisse eine starke Abhängigkeit der Anzahl und Lage der entstehenden Konvektionszellen von der Temperaturanfangsstörung. Eine Variation der Größe des Kreisringes oder aber der Rayleigh-Zahl ändert an diesem Einfluß nichts. Größere Zellen weisen auch eine größere Strömungsgeschwindigkeit auf. Die Rayleigh-Zahl als Funktion der Schichtdicke beeinflusst zwar die Geschwindigkeit, der Einfluß der Schichtdicke selber auf die Geschwindigkeit ist jedoch größer.

In bisherigen Konvektionsmodellen, wie Kasten und Kreisring, bilden sich nur dann Aufstiegszonen, wenn die Temperatur über die Ränder oder in der Anfangsbedingung gestört wird. Untersuchungen der Konvektion in Ellipsenringen führen zu der neuen Erkenntnis, daß in diesem Fall keine Temperaturanfangsstörung notwendig ist, um die Konvektion in Gang zu bringen. Aufgrund der Geometrie der Ellipse existiert eine natürliche Störung, die die Symmetrie bricht. Eine künstlich vorgegebene Temperaturanfangsstörung beeinflusst die Temperaturverteilung und die Strömungsgeschwindigkeit nur unwesentlich. Die Wahl einer größeren Schichtdicke und die Abnahme der Abplattung sorgen für größere Geschwindigkeiten. Der Einfluß der Rayleigh-Zahl ist im Vergleich hierzu geringfügig.

Ein erdartiger Ellipsenring zeigt trotz seiner geringen Abplattung von nur 0.33% die gleichen Eigenschaften wie Ellipsenringe mit größerer Elliptizität. In der Modellierung zeigen sich Geschwindigkeitsunterschiede zwischen Pol und Äquator von 1.7%. Die Abplattung der Erde darf also bei der Modellierung nicht vernachlässigt werden. Allerdings ist diese so gering, daß sich bei einer vorgegebenen Temperaturanfangsstörung Eigenschaften wie im Kreisring zeigen. Darüberhinaus wird in dieser Arbeit die Auswirkung der Modellierung einer tiefenabhängigen Viskosität und einer Phasengrenze untersucht. Der Einfluß des Schwerfeldes einer ellipsoidischen Erde mit einer Dichteverteilung nach PREM auf die Kriechgeschwindigkeit erweist sich als gering.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Schwerelinien eines Ellipsenringes.	13
3.1	Triangulation.	16
3.2	Regularität von Dreieckselementen.	16
3.3	Knotenpunkte für lineare Ansatzfunktionen in \mathbb{R}^2	17
3.4	Knotenpunkte für quadratische Ansatzfunktionen in \mathbb{R}^2	17
3.5	Gitter für einen Ellipsenring.	25
4.1	Zeitliche Entwicklung der Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder für $Ra = 10^4$, dimensionslose Zeit.	29
4.2	Zeitliche Entwicklung der Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder für $Ra = 10^5$, dimensionslose Zeit.	30
4.3	Zeitliche Entwicklung der dimensionslosen, räumlich gemittelten Geschwindigkeit v_{rms} mit $Ra = 10^4$	32
4.4	Zeitliche Entwicklung der dimensionslosen, räumlich gemittelten Geschwindigkeit v_{rms} mit $Ra = 10^5$	32
4.5	Temperaturskala für alle nachfolgenden Temperaturfelder. Die dimensionslosen Temperaturen von 0 bis 1 entsprechen den Werten 288 K bis 4288 K.	35

4.6	Maxima (rot) und Minima (blau) der Temperaturanfangsstörung verschiedener Perioden, Kreisring.	36
4.7	Temperaturfelder, Kreisring mit $R1=1$ und $R2=2$, Periode der Temperaturanfangsstörung: 2, $Ra = 10^4$, dimensionslose Zeit, 48×24 -FEM-Gitter.	37
4.8	Geschwindigkeitsfeld, Kreisring mit $R1=1$ und $R2=2$, Periode der Temperaturanfangsstörung: 2, $Ra = 10^4$, 48×24 -FEM-Gitter. . .	38
4.9	Temperaturfelder, Kreisring mit $R1=1$ und $R2=2$, Periode der Temperaturanfangsstörung: 4, $Ra = 10^4$, dimensionslose Zeit, 48×24 -FEM-Gitter.	39
4.10	Geschwindigkeitsfeld, Kreisring mit $R1=1$ und $R2=2$, Periode der Temperaturanfangsstörung: 4, $Ra = 10^4$, 48×24 -FEM-Gitter. . .	40
4.11	Temperaturfelder, Kreisring mit $R1=1$ und $R2=2$, Periode der Temperaturanfangsstörung: 6, $Ra = 10^4$, dimensionslose Zeit, 48×24 -FEM-Gitter.	41
4.12	Geschwindigkeitsfeld, Kreisring mit $R1=1$ und $R2=2$, Periode der Temperaturanfangsstörung: 6, $Ra = 10^4$, 48×24 -FEM-Gitter. . .	42
4.13	Temperaturfelder, Kreisring mit $R1=1$ und $R2=2$, Periode der Temperaturanfangsstörung: 3, $Ra = 10^4$, dimensionslose Zeit, 48×24 -FEM-Gitter.	43
4.14	Geschwindigkeitsfelder, Kreisring mit $R1=1$ und $R2=2$, Periode der Temperaturanfangsstörung: 3, $Ra = 10^4$, 48×24 -FEM-Gitter.	44
4.15	Temperaturfelder im stationären Zustand, Kreisringe verschiedener Außenradien, Innenradius $R1=1$, Periode der Temperaturanfangsstörung: 6, $Ra = (\rho_0 \alpha g \Delta T (R2-R1)^3)/(\eta_0 \kappa)$, 48×24 -FEM-Gitter.	48

4.16	Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder im stationären Zustand, Kreisringe verschiedener Innen- und Außenradien, aber konstanter Ringdicke, Periode der Temperaturanfängsstörung: 6, $Ra = 10^4$, 48×24 -FEM-Gitter.	50
4.17	Temperaturfelder, Kreisring mit $R1=1$ und $R2=2$, Periode der Temperaturanfängsstörung: 6, $Ra = 10^5$, 48×24 -FEM-Gitter. . .	51
4.18	Temperaturfelder, Ellipsenring mit $A1=1$, $B1=0.5$, $A2=2$, $B2=1$, Abplattung: 0.5, keine Temperaturanfängsstörung, dimensionslose Zeit, 48×24 -FEM-Gitter.	53
4.19	Geschwindigkeitsfelder, Ellipsenring mit $A1=1$, $B1=0.5$, $A2=2$, $B2=1$, Abplattung: 0.5, keine Temperaturanfängsstörung, dimensionslose Zeit, 48×24 -FEM-Gitter.	53
4.20	Maxima (rot) und Minima (blau) der Temperaturanfängsstörung der Perioden 4 und 6, Amplituden $+10^{-3}$ und -10^{-3} , Ellipsenringe mit Abplattung 0.5 und 0.01, 48×24 -FEM-Gitter.	56
4.21	Temperaturfelder, Ellipsenring mit $A1=1$, $B1=0.99$, $A2=2$, $B2=1.98$, Abplattung: 0.01, Periode der Temperaturanfängsstörung: 6, Amplitude: -10^{-3} , dimensionslose Zeit, 48×24 -FEM-Gitter.	57
4.22	Geschwindigkeitsfelder, Ellipsenring mit $A1=1$, $B1=0.99$, $A2=2$, $B2=1.98$, Abplattung: 0.01, Periode der Temperaturanfängsstörung: 6, Amplitude: -10^{-3} , dimensionslose Zeit, 48×24 -FEM-Gitter. . .	58
4.23	Temperaturfelder im stationären Zustand, Ellipsenringe jeweils gleicher großer Halbachsen für Innen- und Außenringe ($A1 = 1$, $A2 = 2$), Abplattungen von $f = 0.1$ ($B1 = 0.9$, $B2 = 1.8$), $f = 0.5$ ($B1 = 0.5$, $B2 = 1.0$), $f = 0.8$ ($B1 = 0.2$, $B2 = 0.4$), keine Temperaturanfängsstörung, 48×24 -FEM-Gitter.	60

4.24 Temperaturfelder im stationären Zustand, Ellipsenringe der Abplattung 0.5: a) $A1 = 1.0$, $B1 = 0.5$, $A2 = 1.5$, $B2 = 0.75$, b) $A1 = 1.0$, $B1 = 0.5$, $A2 = 2.0$, $B2 = 1.0$, c) $A1 = 1.0$, $B1 = 0.5$, $A2 = 2.5$, $B2 = 1.25$, keine Temperaturanfangsstörung, 48×24 -FEM-Gitter. 62

4.25 Temperaturfelder des erdartigen Ellipsenringes, keine Temperaturanfangsstörung, dimensionslose Zeit, 48×24 -FEM-Gitter. 64

4.26 Geschwindigkeitsfelder des erdartigen Ellipsenringes, keine Temperaturanfangsstörung, dimensionslose Zeit, 48×24 -FEM-Gitter 65

4.27 Temperaturfelder im stationären Zustand, erdartiger Ellipsenring, verschiedene Perioden der Temperaturanfangsstörung, 48×24 -FEM-Gitter. 67

4.28 Temperaturfelder im stationären Zustand, erdartiger Ellipsenring, keine Temperaturanfangsstörung, 48×24 -FEM-Gitter, Rayleigh-Zahlen siehe Text, die dimensionslosen Zeiten geben das Ende der Einschwingphase an. 71

4.29 Abhängigkeit der räumlich gemittelten Geschwindigkeit v_{rms} im stationären Zustand von der Rayleigh-Zahl Ra 72

4.30 Zeitliche Entwicklung der dimensionslosen, räumlich gemittelten Geschwindigkeit v_{rms} für den Lauf a), $7.454129 \cdot 10^3 \leq Ra \leq 7.468885 \cdot 10^3$, erdartiger Ellipsenring. 73

4.31 Zeitliche Entwicklung der dimensionslosen, räumlich gemittelten Geschwindigkeit v_{rms} für den Lauf d), $1.181651 \cdot 10^4 \leq Ra \leq 1.187553 \cdot 10^4$, erdartiger Ellipsenring. 73

4.32 Geschwindigkeitsfeld, Kreisring mit $R1=1$ und $R2=2$, Periode der Temperaturanfangsstörung: 6, stationärer Zustand, tiefenabhängige Viskosität. 76

4.33 Geschwindigkeitsfeld, Kreisring mit $R_1=1$ und $R_2=2$, Periode der
Temperaturanfangsstörung: 6, $t=0.1$, tiefenabhängige Viskosität,
660-km-Diskontinuität. 79

Tabellenverzeichnis

2.1	Symbolverzeichnis	3
4.1	Gegenüberstellung der Ergebnisse des Benchmarkmodells (Blankenbach, 1989) und des neuentwickelten Programms. Es werden die Werte für die räumlich gemittelte, dimensionslose Geschwindigkeit v_{rms} dargestellt.	33
4.2	Dimensionslose Geschwindigkeitswerte in Abhängigkeit der Periode der Temperaturanfangsstörung.	45
4.3	Geschwindigkeitsvergleich für Kreisringe unterschiedlicher Radien.	49
4.4	Vergleich der Geschwindigkeiten in Abhängigkeit der Periode der Temperaturanfangsstörung, Ellipsenring mit $A1 = 1$, $B1 = 0.5$, $A2 = 2$, $B2 = 1$, Abplattung: 0.5.	54
4.5	Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit von der Abplattung bei Ellipsenringen jeweils gleicher großer Halbachsen für Innen- und Außenringe, keine Temperaturanfangsstörung.	59
4.6	Vergleich der Geschwindigkeiten in Abhängigkeit der Periode der Temperaturanfangsstörung, erdartiger Ellipsenring.	68
4.7	Vergleich der Geschwindigkeitswerte zwischen einem 48×24 und einem 80×30 -Gitter für den erdartigen Ellipsenring und den Kreisring, sowie ein 12×12 und 24×24 -Gitter für das Rechteckgebiet.	69

4.8 Vergleich der dimensionslosen Geschwindigkeiten des stationären Zustandes unter Berücksichtigung des räumlich variablen Schwerfeldes einflusses.	75
--	----

Literaturverzeichnis

- Becker, T.W., Kellogg, J.B. and O'Connell, R.J., 1999: *Thermal constraints on the survival of primitive blobs in the lower mantle*. Earth Planet. Sci. Lett., 171, 351–365
- Bittner, D., 1995: *Numerische Modellierung von Schmelzprozessen und induziertem Diapirismus in der Unterkruste*. Dissertation, Verlag Shaker
- Blankenbach, B., Busse, F., Christensen, U., Cserepes, L., Gunkel, D., Hansen, U., Harder, H., Jarvis, G., Koch, M., Marquart, G. Moore, D., Olson, P., Schmeling, H., Schnaubelt, T., 1989: *A benchmark comparison for mantle convection codes*. Geophys. J. Int. 98, 23–38
- Braess, D., 1992: *Finite Elemente*. Springer, Berlin
- Breuer, D., Yuen, D. A. and Spohn, T., 1997: *Phase transitions in the Martian mantle: Implications for partially layered convection*. Earth Planet. Sci. Lett., 148: 457–469
- Brezzi, F., 1974: *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers*. RAIRO Anal. Numer. 8 ,129–151
- Bronstein, I. N. und Semendjajew, K. A., 1987: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main

- Bunge, H.-P., Richards, M.A. and Baumgardner, J.R., 1997: *A sensitivity study of three-dimensional spherical mantle convection at 10^8 Rayleigh number: Effects of depth-dependent viscosity, heating mode, and an endothermic phase change*. J. Geophys. Res., 102, 11991–12007
- Bunge, H.-P., Richards, M.A. and Baumgardner, J.R., 1996: *Effect of depth-dependent viscosity on the planform of mantle convection*. Nature, 379, 436–438
- Chandrasekhar, S., 1961: *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover Publications Inc., New York
- Chorin, A., 1968: *Numerical solutions of the Navier-Stokes-equations*. Math. Comput., 22, 745–762
- Ciarlet, P.G., 1978: *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, Amsterdam
- Dubuffet, F., Yuen, D.A. and Rabinowicz, M., 1999: *Effects of a realistic mantle thermal conductivity on the patterns of 3-D convection*. Earth planet. Sci. Lett., 171, 401–409
- Dziewonski, A.M. and Anderson, D.L., 1981: *Preliminary reference earth model*. Phy. Earth Planet. Int., 25, 297–356
- Fletcher, C. A. J., 1984: *Computational Galerkin methods*. Springer, New York
- Fletcher, C. A. J., 1991: *Computational Techniques for Fluid Dynamics I & II*. Berlin: Springer, 2nd edition
- Freund, R., and Nachtigal, N., 1991: *QMR: a Quasi-Minimal Residual Method for Non-Hermitian Linear Systems*. IPS Research Report No. 91-05, Zürich

- Gartling, D.K. und Becker, E.B., 1976: *Finite element analysis of viscous, incompressible fluid flow*. Part 1: Basic methodology, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 8, 51–60
- Girault, V. and Raviart, A., 1986: *Finite Element Methods for the Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, Berlin
- Glatzmaier, G.A. and Schubert, G., 1993: *Three-Dimensional Spherical Models of Layered and Whole Mantle Convection*. *J. Geophys. Res.*, 98, 21969–21976
- Green, G., 1828: *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*. Nottingham
- Gresho, P.M., 1991: *Incompressible fluid dynamics: some fundamental formulation issues*. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 23, 413–453
- Griebel, M., Dornseifer, T. und Neunhoffer, T., 1995: *Numerische Simulation in der Strömungsmechanik*. Vieweg, Braunschweig
- Groß, L., Sternecker, P., Schönauer, W., 1991: *The Finite Element Tool Package VECFEM*. Interner Bericht Nr. 45/91, Universität Karlsruhe, Rechenzentrum
- Groß, L., 1996: *A Course on VECFEM*. Interner Bericht Nr. 66/96, Numerikforschung für Supercomputer, Rechenzentrum der Universität Karlsruhe
- Gründer, N., 1999: *Zweiphasenströmung im oberen Erdmantel und chemische Differentiation*. Dissertation, Universität Jena
- Grunzburger, M., 1989: *Finite Element Methods for viscous incompressible Flows*. Academic Press, Boston
- Hackbusch, W., 1986: *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner, Stuttgart

- Hackbusch, W., 1991: *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme*. Teubner, Stuttgart
- Hansen, U. and Ebel, A., 1988: *Time-dependent thermal convection - a possible explanation for a multiscale flow in the Earth's mantle*. Geophys. J., 94: 181–191
- Jahr, Th., 1998: *Gravimetrische und geodynamische Betrachtungen zum Harz*. Habilitationsschrift, FSU-Jena
- Jarvis, G. T., 1991: *Two-dimensional numerical models of mantle convection*. Adv. Geophys., 33, 1–80
- Jarvis, G. T., 1993: *Effects of Curvature on Two-Dimensional Models of Mantle Convection: Cylindrical Polar Coordinates*. J. Geophys. Res., 98, 4477–4485
- Jarvis, G. T., 1994: *The unifying role of aspect ratio in cylindrical models of mantle convection with varying degrees of curvature*. Geophys. J. Int., 117, 419–426
- Kellogg, L.H., 1991: *Interaction of plumes with a compositional boundary at 670 km*. Geophys. Res. Lett., 18, 865–868
- Kellogg, L.H. and King, S.D., 1993: *Effect of mantle plumes on the growth of D'' by reaction between the core and mantle*. Geophys. Res. Lett., 20, 379–382
- Kellogg, L.H. and King, S.D., 1997: *The effect of temperature dependent viscosity on the structure of new plumes in the mantle: Results of a finite element model in a spherical, axisymmetric shell*. Earth Planet. Sci. Lett., 148, 13–26
- Kertz, W., 1969: *Einführung in die Geophysik I+II*. Verlag Bibliographisches Institut, Mannheim

- Kido, M., Yuen, D.A., Čadek, O. and Nakakuki, T., 1998: *Mantle viscosity derived by genetic algorithm using oceanic geoid and seismic tomography for whole-mantle versus blocked-flow situations*. Phys. Earth Planet. Int., 107, 307–326
- Kido, M. and Čadek, O., 1997: *Inferences of viscosity from the oceanic geoid: Indication of a low viscosity zone below the 660-km discontinuity*. Earth Planet. Sci. Lett., 151, 125–137
- Ladyzenskaja, O. A., 1963: *The Mathematical Theory of Viscous Flow*. Gordon and Breach, New York
- Landau, L. D. und Lifschitz, E. M., 1966: *Hydrodynamik*. Akademie-Verlag, Berlin
- Larsen, T.B. and Yuen, D.A., 1997: *Ultrafast upwelling bursting through the upper mantle*. Earth Planet. Sci. Lett., 146, 393–399
- Nitsche, J., 1976: *Über L_∞ -Abschätzungen von Projektionen auf finite Elemente*. Bonn. Math. Schrift. 89, 13-30
- Machetel, P., Thoraval, C. and Brunet, D., 1995: *Spectral and geophysical consequences of 3-D spherical mantle convection with an endothermic phase change at the 670 km discontinuity*. Phy. Earth Planet. Int., 88, 43–51
- Malevsky, A.V. and Yuen, D.A., 1992: *Strongly chaotic non-Newtonian mantle convection*. Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 65, 149–171
- Quarteroni, A. and Valli, A., 1994: *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York
- Schmalzl, J., 1996: *Mixing properties of thermal convection in the earth's mantle*. Mitteilungen der Geologischen Fakultät der Universität Utrecht, Nr. 140
- Schmeling, H., 1991: *Numerische Methoden in der Geophysik*. Vorlesungsskript WS90/91, Universität Bayreuth

- Schmeling, H. and Bussod, G. Y., 1996: *Variable viscosity convection and partial melting in the continental asthenosphere*. J. Geophys. Res., 101, 5411–5423
- Schubert, G., 1992: *Numerical models of mantle convection*. Annu. Rev. Fluid Mech., 24, 359–394
- Schwarz H.R., 1984: *Methode der Finiten Elemente*. Teubner Studienbücher
- Schwarz H.R., 1991: *FORTRAN-Programme zur Methode der finiten Elemente*. Teubner, Stuttgart
- Scott, R., 1976: *Optimal L^∞ estimates for the finite element method on irregular meshes*. Math. Comp. 30, 681-697(1976), 2. Teil: SIAM J. Numer. Anal. 11 (1974), 347–362
- Silver, P.G., Carlson, R.W. and Olson, P., 1988: *Deep slabs, geochemical heterogeneity, and the large-scale structure of mantle convection: Investigation of an enduring paradox*. Ann. Rev. Earth Planet. Sci., 16, 477–541
- Stacey, F.D. and Loper, D.E., 1983: *The thermal boundary-layer interpretation of D'' and its role as a plume source*. Phys. Earth Planet. Int., 33, 45–55
- Vangelov, V. I. and Jarvis, G. T., 1994: *Geometrical effects of curvature in axisymmetric spherical models of mantle convection*. J. Geophys. Res., 99, 9345–9358
- Walzer, U., 1981: *Untersuchung der Konvektion im Erdinneren und dafür wichtiger Materialparameter unter hohem Druck*. Veröff. Zentralinst. Physik der Erde, 75, 1–256
- Walzer, U. and Hendel, R., 1997a: *Tectonic episodicity and convective feedback mechanisms*. Phys. Earth Planet. Int., 100, 167–188
- Walzer, U. and Hendel, R., 1997b: *Time-dependant thermal convection, mantle differentiation and continental-crust growth*. Geophys. J. Int., 130, 303–325

- Walzer, U. and Hendel, R., 1999: *A new convection-fractionation model for the evolution of the principal geochemical reservoirs of the Earth's mantle*. Phys. Earth Planet. Int., 112, 211–256
- Zebib, A., Schubert, G. and Straus, J., 1980: *Infinite Prandtl number thermal convection in a spherical shell*. J. Fluid Mech., 97, 257–277
- Zienkiewicz, O. C., 1984: *Methode der finiten Elemente*. Carl-Hanser-Verlag, München

Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel und Literatur angefertigt habe.

Berlin, 15. Mai 2000

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Uwe Walzer für die Bereitstellung des interessanten Themas sowie die Betreuung dieser Arbeit und die vielen Anregungen, die er mir gab.

Für die gute Zusammenarbeit in den letzten Jahren möchte ich mich bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls Geodynamik bedanken. Insbesondere möchte ich hier Dr. Thomas Burghardt, Roland Hendel, Klaus Gottschaldt, Dr. Norbert Gründer und Sigward Funke erwähnen, mit denen ich anregende Diskussionen geführt habe, und die mich in vielfältiger Weise unterstützt haben.

Herrn Dr. Lutz Groß danke ich für seine stete Bereitschaft, Fragen zu seinem Programm *VECFEM* zu beantworten, sowie für die vielen Tips, die er mir zur numerischen Formulierung physikalischer Prozesse gab.

Schließlich bedanke ich mich herzlich bei Herrn Dr. Stefan Hougardy, der durch seine Motivation sowie Unterstützung bei programmtechnischen und mathematischen Fragen einen wesentlichen Beitrag zum Gelingen dieser Arbeit geleistet hat.

Lebenslauf

Name: Birgit Fechtner
Geburtsdatum: 28.06.1969
Geburtsort: Neunkirchen-Seelscheid
Familienstand: ledig

Wohnort: Libboldallee 13
12527 Berlin
Tel. 030/ 67820653

Schulausbildung: 1975 - 1979 Besuch der Grundschule Seelscheid
1979 - 1988 Besuch des Gymnasiums
Privates Antoniuskolleg in Neunkirchen
Schulabschluß: Abitur mit Durchschnittsnote 1,8

Hochschulstudium: WS 1988/89 - SS 1994 Mathematik mit Nebenfach Physik
an der Universität Bonn
Diplomprüfung: abgelegt am 16.05.1994 (Note 2)
Diplomarbeit: Optimale asymptotische Konvergenz diskreter Grundlösungen
für quadratische Elemente

12/1994–9/1999 wissenschaftliche Mitarbeiterin in Forschung und Lehre an
der FSU Jena Lehrstuhl Geodynamik

seit 1.Mai 2000 Beraterin bei der SQS AG in Köln

Berlin, 15. Mai 2000