

Vermischung in 3D sphärischen Konvektionsmodellen  
des Erdmantels

**Dissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades doctor rerum naturalium  
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem Rat der Chemisch-Geowissenschaftlichen Fakultät der  
Friedrich-Schiller-Universität Jena

von Diplom-Physiker Klaus-Dirk Gottschaldt  
geboren am 15. Juli 1970 in Schwerin

Gutachter:

1. Prof. Dr. Uwe Walzer (Jena)
2. Prof. Dr. Gerhard Jentsch (Jena)
3. Prof. Dr. Wolfgang Jacoby (Mainz)

Tag der öffentlichen Verteidigung: 3. März 2004

**Für Netti und Sofie.**



## Zusammenfassung

Aus dem Auftreten geochemisch homogener, verarmter Basalte der mittelozeanischen Rücken (MORB) einerseits und heterogener Ozeaninsel-Basalte (OIB) andererseits schließt man auf die Existenz unterschiedlicher geochemischer Mantelreservoirs. Es ist eine der zentralen Fragen der Geodynamik, wie diese Beobachtungen mit der geophysikalisch favorisierten Ganzmantelkonvektion vereinbar sind. In dieser Arbeit wird das Mischungsverhalten von 3D sphärischen Modellen der Konvektion im Erdmantel numerisch untersucht. Das Programm TERRA (Baumgardner, 1983) wurde erweitert und verbessert. Neue Auswertemethoden werden vorgestellt. Es wird erstmalig die weitgehend vollständige Energiebilanz des Kerns gekoppelt mit 3D sphärischer Mantelkonvektion berechnet. Differenziationen im geochemischen Sinne sind aber noch nicht enthalten.

In den Modellen ergeben sich zwei grundsätzlich verschiedene Regimes. Daraus wird eine Arbeitshypothese für künftige detailliertere Untersuchungen hergeleitet. Bei niedrigem Viskositätsniveau im Mantel, aber unter Berücksichtigung der Lithosphäre, herrschen in zwei Modellen heftige, kleinräumig stark vermischende Konvektionsströmungen vor. Die Bildung kontinentaler Kruste wird nicht modelliert. Es wird aber davon ausgegangen, dass die entsprechenden Prozesse auf geringe Tiefen konzentriert sind. Material, das nahe der Oberfläche verändert worden ist, wird konvektiv nach unten transportiert und dabei kleinräumig verrührt. Auf diese Weise könnte eine homogene Schicht verarmten Materials über ursprünglichem Material entstehen. Die Grenzschicht zwischen beiden Zonen ist unregelmäßig und verlagert sich langsam in Richtung Kern-Mantel-Grenze (CMB). Dieses Verhalten wurde erstmals von Walzer & Hendel (1999) in numerischen Modellen beobachtet und könnte die frühe Evolution des Mantels charakterisieren.

Im Zuge der Abkühlung des Mantels erhöht sich das Viskositätsniveau. Hier ist die zeitliche Entwicklung zwar noch nicht berücksichtigt, aber bei hohem Viskositätsniveau spiegeln die meisten Modelle dieser Arbeit das prinzipielle Verhalten des heutigen Mantels wider. Es gibt großräumige Konvektionszellen mit durchgehenden, von der Oberfläche bis zur CMB reichenden Abströmen. In Folge der 3D sphärischen Geometrie liegen die Stagnationspunkte der Zellen weit oben und die Bereiche unterhalb der Lithosphäre können am längsten die geochemische Signatur behalten, die sie bei Einsetzen der großräumigen Konvektion hatten. Zusätzlich verursacht das von Walzer et al. (2003b) gefundene Viskositätsprofil mit einer zweiten Asthenosphäre und sehr hoher Viskosität im unteren Mantel eine Schichtung des Mischungsverhaltens bei Ganzmantelkonvektion. In den hochviskosen Bereichen des unteren Mantels können Heterogenitäten am besten bestehen bleiben.

Als Arbeitshypothese für weitere Untersuchungen wird vorgeschlagen, dass es während der Evolution des Mantels einen Wechsel vom kleinräumig mischenden Regime hin zum heute beobachteten, großräumig mischenden Regime gegeben hat. Unter dieser Bedingung könnten die geochemischen und geophysikalischen Beobachtungen zumindest aus strömungsdynamischer Sicht miteinander vereinbar sein.

## **Abstract**

The existence of geochemically distinct reservoirs in the mantle is inferred from the observation of worldwide homogeneous MORBs on the one side and heterogeneous OIBs on the other side. It is one of the first order unresolved problems of Geodynamics how these observations could be reconciled with geophysically favoured whole-mantle convection. In this thesis stirring properties of 3D spherical models of convection in the Earth's mantle are investigated numerically. The code TERRA (Baumgardner, 1983) has been extended and improved. New tools for postprocessing are introduced. The nearly complete energy balance of the core is calculated simultaneously with 3D spherical mantle convection for the first time. However, differentiation in a geochemical sense is not considered yet.

Two fundamentally different regimes of stirring are observed in the models for earthlike parameters. Based on this finding a new hypothesis is proposed as a working assumption for future, more detailed investigations. At a low viscosity level in the mantle and with consideration of a lithosphere, two models show vigorous small-scale convection. The segregation of continental crust is not modelled yet, but is assumed to be confined to a region near the surface. The well stirring small scale convection transports material downwards which has been altered near the surface. A layer of homogeneous depleted material may grow on top of a pristine mantle. The interface between the two regions is irregular and moves slowly downwards. This behaviour was first investigated by Walzer & Hendl (1999) and could characterise the early evolution of the mantle.

The viscosity level is rising in a cooling mantle. This time-dependence is not included in the models yet, but at higher viscosities most models develop the kind of convection we observe in the Earth today. There are downwellings going from the surface right to the lower mantle or even to the CMB. Because of 3D spherical geometry the stagnation points of the cell like convective structures lie in rather shallow depths. Laterally averaged, Material just below the lithosphere can preserve its original signature for the longest time in the convecting mantle. Additionally a layering of stirring properties is induced by the viscosity profile of Walzer et al. (2003b). This profile features a second asthenosphere overlying a very high viscous zone in the lower mantle. Stirring is bad in this zone and heterogeneities can persist there longer than in other parts of the mantle.

It is suggested that there may have been a change from small scale convection to large-scale convection during the evolution of the mantle. Under this assumption, geochemical and geophysical observations may be reconciled at least from a fluid dynamical point of view.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Zusammenfassung</b>	<b>5</b>
<b>Abstract</b>	<b>6</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>10</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>13</b>
<b>1. Einführung und Ziele der Arbeit</b>	<b>14</b>
<b>2. Struktur des Erdmantels</b>	<b>17</b>
2.1. Geophysikalische Beobachtungen und Interpretationen .....	17
2.1.1. Plattentektonik .....	17
2.1.2. Vulkanismus und Krustenbildung .....	18
2.1.3. Seismologie .....	18
2.1.4. Wärmehaushalt des Erdmantels .....	19
2.1.5. Materialeigenschaften .....	19
2.2. Geochemische Beobachtungen und Interpretationen .....	21
2.2.1. Isotopische Heterogenitäten und deren Ausdehnung .....	21
2.2.2. Entgaster Teil des Mantels .....	21
2.2.3. Reservoir rezyklierten Materials .....	22
2.2.4. Reservoir mit hohem $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Verhältnis .....	22
2.2.5. Massenbilanz .....	23
2.3. Vereinigung geophysikalischer und geochemischer Modelle .....	24
2.3.1. Allgemeines Mischungsverhalten konvektiver Strömungen .....	24
2.3.2. Einfluss von Viskositätskontrasten auf das Mischungsverhalten .....	25
2.3.3. Dichteschichtung des Mantels .....	26
2.3.4. Filterung in der Übergangszone .....	27
2.3.5. Differenzierungsmodelle .....	27
<b>3. Berechnung thermischer Konvektion mit TERRA</b>	<b>29</b>
3.1. Physikalische Grundlagen .....	29
3.1.1. Grundgleichungen .....	29
3.1.2. Randbedingungen .....	30
3.1.3. Anfangsbedingungen .....	31
3.1.4. Rheologie .....	31
3.1.5. Rayleigh- und Nusselt-Zahl .....	32
3.2. Numerik .....	34
3.2.1. Gitter .....	34
3.2.2. Erhaltungsgleichungen .....	34
3.2.3. Zustandsgleichung .....	35
3.2.4. Parallelisierung .....	35
3.2.5. Hardware .....	36
3.2.6. Programmtests .....	37

3.3. Programmänderung: Phasengrenzen .....	39
3.3.1. Motivation .....	39
3.3.2. Behandlung der Phasengrenzen in TERRA .....	40
3.4. Einführung einer viskoplastischen Fließspannung .....	42
3.4.1. Motivation .....	42
3.4.2. Rheologisches Modell .....	42
3.4.3. Quantifizierung der Plattigkeit .....	43
3.4.4. Testrechnungen .....	45
3.5. Programmerweiterung: Kernevolution .....	47
3.5.1. Motivation .....	47
3.5.2. Physikalisches Modell .....	48
3.5.3. Numerische Umsetzung in TERRA .....	51
3.6. Programmerweiterung: Anfangsbedingung .....	56
<b>4. Entstehung und Bewegung passiver Heterogenitäten</b> .....	<b>57</b>
4.1. Marker .....	57
4.1.1. Methoden zur Beschreibung chemischer Felder .....	57
4.1.2. Markermodul in TERRA .....	58
4.1.3. Tests des Markermoduls .....	59
4.1.4. Unterscheidbare Marker .....	60
4.2. Beschreibung von Vermischung .....	61
4.2.1. Methoden im Überblick .....	61
4.2.2. Erzeugung von Heterogenitäten.....	64
4.2.3. Auswertegitter .....	65
4.2.4. Bewertung des Mischungszustandes: Heterogenität .....	64
4.2.5. Bewertung des Mischungszustandes: Histogramme .....	70
<b>5. Modelle</b> .....	<b>72</b>
5.1. Allgemeine Modellbeschreibung .....	72
5.1.1. Modellparameter .....	72
5.1.2. Profile und variierte Parameter .....	73
5.1.3. Zusammenstellung der Modelle .....	77
5.1.4. Postprocessing .....	78
5.2. Modell 637 .....	80
5.3. Modell 638 .....	93
5.4. Modell 639 .....	106
5.5. Modell 640 .....	119
5.6. Modell 641 .....	132
5.7. Modell 642 .....	145
5.8. Modell 647 .....	158
5.9. Modell 648 .....	171
5.10. Modell 649 .....	184
5.11. Modell 651 .....	197
5.12. Modell 652 .....	210
5.13. Modell 653 .....	223
5.14. Modell 656 .....	236
5.15. Modell 657 .....	249
5.16. Modell 659 .....	262
5.17. Modell 660 .....	275
5.18. Modell 661 .....	288
5.19. Modell 662 .....	301

5.20. Zusammenfassung der Auswertungen .....	314
<b>6. Diskussion und Schlussfolgerungen</b>	<b>315</b>
6.1. Einfluss einzelner Modelleigenschaften .....	315
6.1.1. Rheologie .....	315
6.1.2. Schmelztemperatur und Vulkanismus .....	317
6.1.3. Randbedingung an der CMB .....	317
6.1.4. Wärmeleitfähigkeit .....	318
6.1.5. Anfangsbedingung .....	318
6.2. Schlussfolgerungen für die chemische Evolution der Erde .....	319
6.2.1. Diskussion des Mischungsverhaltens der Modelle .....	319
6.2.2. Relevanz für die Erde .....	322
6.3. Schlussbemerkungen .....	325
<b>Anhang 1: Testrechnungen zur Einführung einer viskoplastischen Fließspannung</b>	<b>327</b>
<b>Anhang 2: Alphabetisches Symbolverzeichnis</b>	<b>335</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>339</b>
<b>Dank</b>	<b>348</b>
<b>Lebenslauf</b>	

## Abbildungsverzeichnis

### Abbildungsverzeichnis

Abb.	Inhalt	Seite	Quelle oder Programm zur Erstellung
2.1-1	Plattentektonik der Erdoberfläche	17	Die gesamte Abbildung wurde mit dem unter <a href="http://sps.unavco.org/crustal_motion/dedt/">http://sps.unavco.org/crustal_motion/dedt/</a> erhältlichen GMT (Generic Mapping Tool) am 14.11.2003 bei UNAVCO Boulder (Colorado, USA) erzeugt. Grundlage von Topographie und Bathymetrie ist GTOPO30, S+S v6.2. Die Daten für die Geschwindigkeits- und Plattendarstellung stammen von GSRM (Global Strain Rate Map; vgl. Kreemer et al., 2002 und Kapitel 3.4).
2.1-2	Vorstellungen zu Dynamik und Struktur des Erdmantels	19	Das Bild der Topographie der Erdoberfläche stammt von <a href="http://www.gsfc.nasa.gov/gsfc/lithos/earth/earth.gif">www.gsfc.nasa.gov/gsfc/lithos/earth/earth.gif</a> , der Megaplume von <a href="http://www.geophysik.uni-frankfurt.de/geodyn/island/plume1_nm.gif">http://www.geophysik.uni-frankfurt.de/geodyn/island/plume1_nm.gif</a> . Mantelschnitt, Kern und D <sup>cc</sup> wurden mit graph9.pro, slicer3spheres2.pro und slicer3_corner.pro aus den Daten von Modell 649 erzeugt. Bildzusammenstellung und manuelle Skizzen: CorelPhotoPaint v11.
2.2-1	Differenziation in den oberen Bereichen des oberen Erdmantels	21	CorelDraw & CorelPhotoPaint v11
2.3-1	Vorstellungen zu Manteldynamik und Lage der geochemischen Reservoirs	27	Tackley (2000)
3.2-1	Gitterstruktur in TERRA	34	Baumgardner (1983)
3.2-2	Gebietsaufteilung der Parallelisierung	37	grid.pro
3.3-1	Temperaturprofil vor und nach der Korrektur von TERRA	39	vel.pro
3.3-2	Temperaturverteilung vor und nach der Korrektur von TERRA	39	graph.pro und slicer3spheres.pro
3.4-1	Verteilung von $s$ auf der Erdoberfläche	44	div_earth.pro mit den Daten von <a href="http://sps.unavco.org/crustal_motion/dedt/">http://sps.unavco.org/crustal_motion/dedt/</a> (Kreemer et al., 2002)
3.4-2	Kumulative Verteilung von $s$ auf der realen Erde	44	div.pro mit den Daten von <a href="http://sps.unavco.org/crustal_motion/dedt/">http://sps.unavco.org/crustal_motion/dedt/</a> (Kreemer et al., 2002)
3.4-3	Kumulative Verteilung von $s$ an der Oberfläche eines typischen Konvektionsmodells	44	div.pro mit den Daten von <a href="http://sps.unavco.org/crustal_motion/dedt/">http://sps.unavco.org/crustal_motion/dedt/</a> (Kreemer et al., 2002) und Modell 662
3.5-1	Profil der Erstarrungstemperatur im Erdkern	49	core.pro
3.5-2	Abhängigkeit der Temperatur an der CMB vom Innenkernradius	49	core.pro
4.2-1	Spur zweier Marker	61	trace.pro
4.2-2	Erzeugung von Heterogenitäten	64	het.pro, slicer3.pro, CorelDraw v11
4.2-3	Fälle der Vermischung	66	CorelDraw v11
4.2-4	Berechnung des lokalen Kontrastes	67	CorelDraw v11
4.2-5	Einfache Modelle zur Veranschaulichung der Heterogenität	68	het.pro, slicer3.pro
4.2-6	Heterogenität	69	mega_het.pro
4.2-7	Maximal mögliche Heterogenität	69	.pro
5.1-1	Referenzprofil $P_r(r)$	73	prof.pro
5.1-2	Referenzprofil $T_r(r)$	73	prof.pro
5.1-3	Referenzprofil $\rho_r(r)$	73	prof.pro
5.1-4	Referenzprofil $g(r)$	73	prof.pro
5.1-5	Referenzprofil $\alpha(r)$	73	prof.pro
5.1-6	Referenzprofil $K_T(r)$	73	prof.pro

## Abbildungsverzeichnis

5.1-7	Referenzprofil $c_r(r)$	74	prof.pro
5.1-8	Referenzprofil $\gamma(r)$	74	prof.pro
5.1-9	Startprofil der Viskosität $\eta_1(r)$	74	prof.pro
5.1-10	Startprofil der Viskosität $\eta_2(r)$	74	prof.pro
5.1-11	Startprofil der Viskosität $\eta_3(r)$	74	prof.pro
5.1-12	Startprofil der Viskosität $\eta_4(r)$	74	prof.pro
5.1-13	Startprofil der Viskosität $\eta_5(r)$	75	prof.pro
5.1-14	Startprofil der Viskosität $\eta_6(r)$	75	prof.pro
5.1-15	$c_r I(r)$ : erlaubte laterale Temperaturabhängigkeit der Viskosität.	75	prof.pro
5.1-16	Schmelztemperatur $T_{m1}(r)$	76	prof.pro
5.1-17	Schmelztemperatur $T_{m2}(r)$	76	prof.pro
5.1-18	Schmelztemperatur $T_{m3}(r)$	76	prof.pro
5.*-1	Wurzel des Betrages der zweiten Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors		div.pro
5.*-2	Plattigkeit an der Oberfläche		div.pro
5.*-3	Viskositätsprofil		vel.pro
5.*-4	Flächentreue Projektion der Viskosität		ea.pro
5.*-5	Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen		ea.pro
5.*-6	Temperaturverteilung im Mantel am Anfang der Rechnung und heute.		vel.pro, graph.pro, slicer3spheres.pro
5.*-7	Zeitliche Entwicklung des Temperaturprofils		hst.pro
5.*-8	Zeitliche Entwicklung der Rayleigh-Zahl		hst.pro
5.*-9	Zeitliche Entwicklung der Nusselt-Zahl		hst.pro
5.*-10	Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Oberfläche		hst.pro
5.*-11	Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der CMB		hst.pro oder cmb.pro
5.*-12	Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des gesamten Mantels		hst.pro
5.*-13	Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des oberen Mantels <b>oder</b> Zeitliche Entwicklung des Innenkernradius		hst.pro cmb.pro
5.*-14	Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des unteren Mantels <b>oder</b> Zeitliche Entwicklung der Temperatur an der CMB		hst.pro cmb.pro
5.*-15	Zeitliche Entwicklung der Heizleistung durch Zerfall von $^{40}\text{K}$ , $^{42}\text{Th}$ , $^{235}\text{U}$ und $^{238}\text{U}$		hst.pro
5.*-16	Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente (oben)		vel.pro
5.*-17	Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente (unten)		vel.pro
5.*-18	Heutiges Geschwindigkeitsprofil		vel.pro
5.*-19	Spektrum von toroidaler plus poloidaler kinetischer Energie		sphmnx.pro
5.*-20	Entwicklung der Tiefenverteilung der Summe von poloidaler und toroidaler Energie		sphmnx.pro
5.*-21	Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung des toroidalen Anteils		sphmnx.pro
5.*-22	Verteilung ursprünglichen Materials (pm) zu verschiedenen Zeiten		mega_het.pro und slicer3spheres.pro

## Abbildungsverzeichnis

5.*-23	Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung ursprünglichen Materials		mega_het.pro
5.*-24	Abnahme ursprünglichen Materials im Mantel		mega_het.pro
5.*-25	Festlegung Entgasungstiefe		mega_het.pro
5.*-26	Tiefenverteilung ursprünglichen festgelegt, dass am Ende der Materials im heutigen Mantel		mega_het.pro
5.*-27	Histogramme der Verteilung ursprünglichen Materials		hist.pro
5.*-28	Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Tiefenintervallen		hist.pro
5.*-29	Heutige Tiefenprofile von B, K, D		mega_het.pro
5.*-30	Zeitliche Entwicklung der Heterogenität		mega_het.pro
5.*-31	Entwicklung der globalen Mittelwerte von B, K, D		mega_het.pro
6.2-1	Übersicht der aufgetretenen Fälle der Evolution der Tiefenverteilung entgasten Materials	320	mega_het.pro
6.2-2	Übersicht der aufgetretenen Fälle der Evolution der Tiefenverteilung der Heterogenität. Ähnliche Fälle wurden nur ein mal dargestellt, die Nummer des abgebildeten Falles ist fett gedruckt	321	mega_het.pro
6.2-3	Postuliertes Mischungsverhalten vor dem Einsetzen von Ganzmantelkonvektion	323	mega_het.pro und slicer3spheres.pro
6.2-4	Mischungsverhalten der heute beobachteten Ganzmantelkonvektion	323	mega_het.pro und slicer3spheres.pro

Die mit 5.\* bezeichneten Bilder beziehen sich auf die Kapitel 5.2 bis 5.19. Sie kommen in jedem der genannten Kapitel vor und werden hier nicht einzeln aufgeführt.

## *Tabellenverzeichnis*

### **Tabellenverzeichnis**

3.2-I	Mögliche Gitterparameter in TERRA .....	36
3.4-I	Testrechnungen zur Verbesserung der Plattigkeit .....	45
3.5-I	Parameterwerte der Kernmodelle .....	51
4.1-I	Genauigkeit der Markerbewegung in stationären Geschwindigkeitsfeldern .....	59
5.1-I	Allgemeine Modellparameter .....	72
5.1-II	Parameter der inneren Heizung .....	72
5.1-III	Übersicht der in dieser Arbeit behandelten Modelle .....	78
5.20-I	Zusammenstellung von Modellergebnissen .....	314

### 1. Einführung und Ziele der Arbeit

Diese Arbeit soll zur Entwicklung eines 3D sphärischen Konvektions-Differenzierungsmodells des Erdmantels beitragen, das geophysikalische und geochemische Beobachtungen simultan reproduziert.

Das System Erde ist so komplex, dass Erkenntnisse aus vielen Zweigen der Geowissenschaften in numerischen Modellen zusammengefaßt werden müssen, um die Dynamik im Inneren unseres Planeten zu verstehen. Ausgehend von Schwinner (1919) ist es heute weitgehend akzeptiert, dass thermische Konvektion im Erdmantel die Ursache für Plattentektonik und damit zusammenhängende Phänomene ist. Durch Extraktion partieller Schmelze und Entgasung werden nahe der Erdoberfläche immer neue geochemische Heterogenitäten erzeugt. Die am Konvektionskreislauf teilnehmende ozeanische Lithosphäre wird zusammen mit kontinentalen Sedimenten in Subduktionszonen wieder dem Mantel zugeführt und dort verrührt. Diese beiden Teilaspekte der Evolution geochemischer Reservoirs werden in der vorliegenden Arbeit durch die Kopplung eines einfachen Prinzipmodells der Differenzierung mit Modellen thermischer Konvektion in 3D sphärischer Geometrie numerisch modelliert. Einblicke in das Wechselspiel von Konvektion und Differenzierung sind eine Grundlage für die Zusammenführung von geophysikalischen und geochemischen Modellen des Erdmantels. Hier wird insbesondere der Frage nachgegangen, wie sich die Beobachtung eines geochemisch homogenen Reservoirs neben heterogenen Reservoirs bei über den ganzen Mantel reichender Konvektion erklären lässt.

Mit geophysikalischen Methoden wird eine hohe räumliche Auflösung einiger Strukturen des Erdmantels erreicht. So liefert das in dieser Arbeit verwendete seismische Erdmodell PREM (Dziewonski & Anderson, 1981) Tiefenprofile wichtiger Parameter des Erdmantels und Erdkerns. Durch den Nachweis von Abtauchplatten bis in die Nähe der Kern-Mantel-Grenze (CMB) durch seismische Tomographie (van der Hilst & Kárason, 1999) ist eine getrennte Konvektion von oberem und unterem Mantel in den vergangenen 50-100 Millionen Jahren unwahrscheinlich. Mit der neuen finite-frequency tomography können jetzt auch einzelne Plumes abgebildet werden (Nolet, 2003). Manche haben ihren Ursprung nahe der Grenze zwischen oberem und unterem Mantel, manche im unteren Mantel und einige an der CMB. Messungen des Wärmestromes und der Geschwindigkeiten der tektonischen Platten an der Erdoberfläche liefern weitere wichtige Daten für die Verifikation von Konvektionsmodellen. Der Nachteil dieser geophysikalischen Verfahren ist, dass sie nur eine Momentaufnahme des heutigen Erdmantels liefern. Aus Rekonstruktionen der Plattenbewegungen an der Erdoberfläche und aus der abnehmenden inneren Heizung der Erde folgt aber, dass die Konvektion im Mantel zeitabhängig ist.

Isotopenanalysen von Spurenelementen der Basalte mittelozeanischer Rücken (MORB) zeigen eine weitgehende Homogenität dieser Gesteine. Im Gegensatz dazu sind die Basalte von Plumes (OIB) sehr heterogen. Die allgemein akzeptierte Schlußfolgerung daraus ist, dass es in der silikatischen Hülle der Erde mehrere geochemische Reservoirs gibt (Zindler & Hart, 1986; Silver et al., 1988; Hart & Zindler, 1989; Allègre & Lewin, 1995; Hofmann, 1997). Die Größe der beobachteten Heterogenitäten reicht von zentimetergroßen Strukturen in Hochtemperatur-Peridotiten (Allègre und Turcotte, 1986) bis zur erdumspannenden DUPAL-Anomalie (Hart, 1984). Weiterhin wird beobachtet, dass aus dem Mantel primordiales  $^3\text{He}$  entweicht. Eine mögliche Erklärung dafür ist die Existenz ursprünglicher Bereiche im Mantel. Geochemische Signaturen sind ausschließlich durch direkte Beprobung identifizierbar, aber Mantelmaterial wird nur an wenigen Stellen an die Erdoberfläche transportiert. Deshalb sind geochemische Felder nur in schlechter räumlicher Auflösung bekannt, über die Lage der Ausgangsreservoirs im Mantel gibt es nur Vermutungen. Die Kenntnis der Herkunftstiefen könnte sich durch hochauflösende tomographische Methoden in naher Zukunft etwas verbessern. Der Vorteil geochemischer gegenüber geophysikalischen Methoden ist, dass sie

## *1. Einführung und Ziele der Arbeit*

Informationen über die zeitliche Evolution, die Differenzierungsgeschichte der Proben liefern. Neben den geophysikalischen müssen auch die geochemischen Beobachtungen von Mantelkonvektionsmodellen reproduziert werden. Erstaunlicherweise sind bisher nur wenige Konvektions-Differenzierungs-Modelle publiziert worden (z.B. Walzer & Hendel, 1997a, b, 1999a; van Keken et al., 2001; Tackley, 2002; Tackley & Xie, 2002; Xie & Tackley, 2003). Die hier vorgestellten sind sogar die ersten Modelle in 3D sphärischer Geometrie dazu. Allerdings ist der hier verwendete Differenzierungsmechanismus nicht primär geophysikalisch begründet und es werden auch keine chemischen Komponenten direkt modelliert. In Kapitel 2 werden die für diese Arbeit wichtigen geophysikalischen und geochemischen Beobachtungen und Modelle zusammengefaßt.

Mischungsuntersuchungen können nur dann zum Verständnis der Erde beitragen, wenn die zugrunde liegenden Geschwindigkeitsfelder der Mantelkonvektion hinreichend realistisch sind. Konvektion wird mathematisch aus den Erhaltungsgleichungen für Impuls, Masse und Energie bestimmt. Weiterhin werden zur vollständigen Beschreibung des fluiddynamischen Problems ein Stoffgesetz, eine Zustandsgleichung sowie Anfangs- und Randbedingungen gebraucht. Für alle Modelle dieser Arbeit wird das resultierende Gleichungssystem für ein kompressibles Medium in 3D kugelschaliger Geometrie numerisch gelöst. Es wird jeweils die gesamte thermische Evolution von der Entstehung des silikatischen Mantels bis heute ab initio berechnet. Die Lösungen sind inhärent zeitabhängig. Geschwindigkeitsfelder werden nicht kinematisch vorgegeben. Diese Herangehensweise erlaubt die Modellierung der Evolution geochemischer Reservoirs über das gesamte Alter des Erdmantels. Das ist ein großer Vorteil gegenüber Modellen, die nicht weit genug zurück reichende Rekonstruktionen der Plattengeschwindigkeiten (Bunge & Richards, 1997) oder gar Modelle der Dichteverteilung im heutigen Mantel (van Keken & Zhong, 1999) als Antrieb der Strömungsfelder benutzen. Allerdings sind der Realitätsnähe der Modelle durch Numerik und verfügbare Rechenleistung Grenzen gesetzt. Es gibt heute noch kein Modell, das alle wesentlichen Aspekte der silikatischen Erde reproduziert. Insbesondere die selbstkonsistente Modellierung der Lithosphäre mit Plattentektonik bereitet Schwierigkeiten (Trompert & Hansen, 1998; Bercovici, 1998; Tackley, 2000a,b; Richards et al., 2001). Außerdem werden kleinskalige Plumes nicht aufgelöst. Unter diesem Aspekt spiegeln die in dieser Arbeit vorgestellten Modelle auch eher den aktuellen Stand der Technik als die richtige Erde wider. Allerdings verwenden sie schon weitgehend realistische Parameter, reproduzieren mehr Beobachtungen als einfache Prinzipmodelle und erlauben vorsichtige Interpretationen für unseren Planeten. Grundlage aller Konvektionsberechnungen ist das Programm TERRA (Baumgardner, 1983, 1985; Bunge & Baumgardner, 1995; Yang, 1997), das modifiziert und erweitert wurde. In Kapitel 3 wird kurz auf die Methodik der Konvektionsberechnung und näher auf die Modifikationen an TERRA eingegangen. So wurde im Rahmen dieser Arbeit zum ersten Mal ein dynamisches Mantelkonvektionsmodell mit einem parametrisierten Modell der Kernevolution gekoppelt, das alle wesentlichen Terme der Energiebilanz des Kerns berücksichtigt.

Die 3D sphärische Geometrie der Modelle ist ein wesentlicher Aspekt der vorliegenden Studie. Gegenüber parametrisierten, zweidimensionalen oder 3D kartesischen Modellen sind sie aber rechenaufwendiger und benötigen für eine sinnvolle räumliche Auflösung erhebliche Supercomputer-Ressourcen. Im Rahmen dieser Arbeit kann keine weite Variation unsicherer Parameter durchgeführt werden. Deshalb werden, ausgehend von einem Referenzmodell (Walzer et al., 2003a), nur einzelne Modelleigenschaften oder Parameter geändert. Diese Vorgehensweise erlaubt Rückschlüsse auf die Bedeutung einzelner Teile im Kontext des gesamten dynamischen Systems, trägt aber nur begrenzt zum Verständnis isolierter physikalischer Mechanismen bei. Die Konvektionsmodelle und deren Auswertungen sind der zentrale Teil dieser Arbeit, sie werden in Kapitel 5 vorgestellt.

## *1. Einführung und Ziele der Arbeit*

Die Kriechgeschwindigkeitsfelder der Konvektionsmodelle bewegen passive lagrangesche Marker. Diese repräsentieren geochemische Felder, die nicht auf die Strömung rückwirken. Es wurde ein Mechanismus programmiert, der die Aufteilung des Erdmantels in ursprüngliche und entgaste Massen beschreibt. Dabei bin ich davon ausgegangen, dass die stärksten Materialveränderungen durch Extraktion partieller Schmelze und Entgasung nahe der Erdoberfläche stattfinden. Alle Marker, die einmal oberhalb einer gewissen Tiefe waren, werden im Modell als ‚entgast‘ gekennzeichnet. Die Entgasungstiefe wird dabei so gewählt, dass am Ende der Rechnung 50 % der Mantelmasse entgast sind. Damit lässt sich der Mischungszustand am besten quantifizieren. Dieses Verfahren ist nicht geophysikalisch begründet. Die hier verwendeten Entgasungstiefen liegen aber in der gleichen Größenordnung wie geophysikalisch begründete Werte. Im Rahmen der sonstigen Modellunsicherheiten lässt sich das hier verwendete Differenzierungsverfahren zwanglos als erste Näherung für die mit Krustenbildung verbundenen Differenzierungen interpretieren. Eine genauere Modellierung verschiedener Differenzierungsprozesse inkompatibler Elemente und der Entstehung geochemischer Reservoirs könnte sich an Walzer & Hendel (1999), Tackley & Xie (2002) oder Xie & Tackley (2003) orientieren, wird im Rahmen dieser Arbeit aber nicht versucht. Sie ist als Vorarbeit für derartige Untersuchungen mit aktiven Markern zu verstehen. Mit aktiven Markern erhält man ein noch realistischeres Strömungsfeld, da die räumliche Verteilung der Wärmequellen berücksichtigt wird. Das Markermodul und die Methodik zur Untersuchung des Mischungsverhaltens werden in Kapitel 4 vorgestellt.

Nach den Modellen von Kapitel 5 folgt in Kapitel 6 eine Diskussion der Ergebnisse. Sie sind teilweise überraschend und widersprechen einfacheren Modellen. Es wird postuliert, dass es im Laufe der Evolution des Erdmantels einen Wechsel des konvektiven Regimes gegeben haben kann. Die neue Hypothese könnte erklären, wie sich auf den ersten Blick gegenseitig ausschließende geochemische und geophysikalische Beobachtungen vereinbar sind.

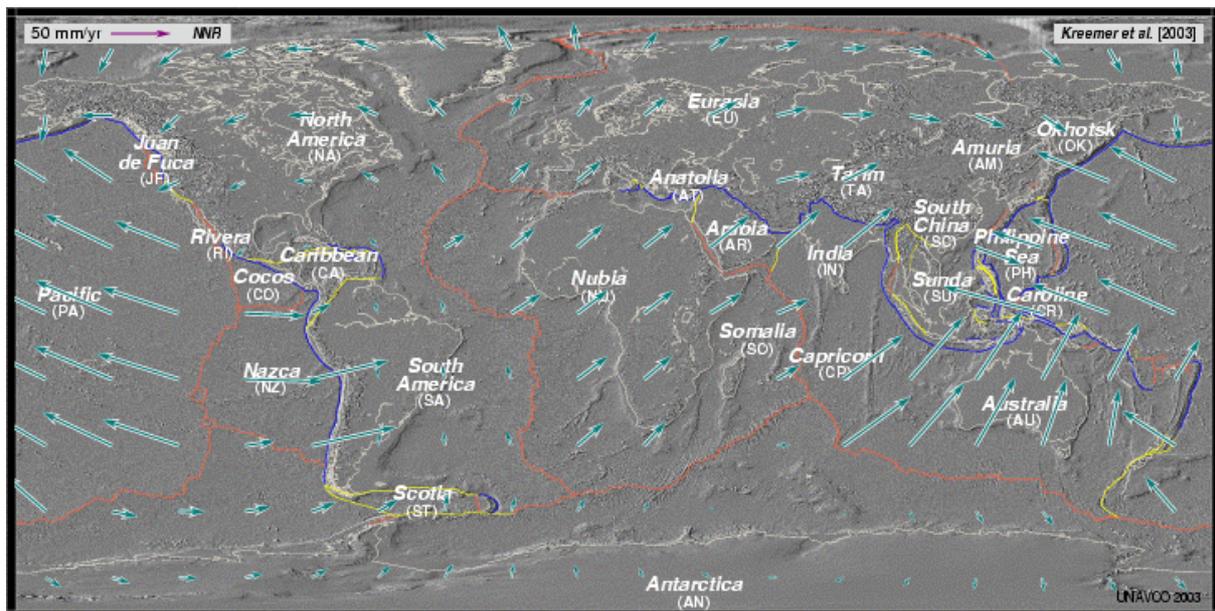
### 2. Struktur des Erdmantels

Die geologische Aktivität der Erdkruste – Gebirgsbildung, Erdbeben, Vulkanismus, Kontinentaldrift – ist eine Folge der Konvektion des darunter liegenden, etwa 2900 km dicken Erdmantels. Der Mantel besteht aus festem Gestein, das nur in relativ kleinen Gebieten partiell geschmolzen ist. Gegenüber kurzen Belastungen, z.B. seismischen Wellen, verhält er sich wie ein elastischer Festkörper. Über geologische Zeiträume sind die Mantelgesteine aber deformierbar wie eine sehr zähe Flüssigkeit. Die Viskosität beruht auf der Wanderung von Gitterfehlern (Versetzungen, Fehlstellen) durch das Kristallgitter. Mantelkonvektion ist für den Abtransport von Wärme aus dem Erdinneren verantwortlich. Sie bildet den zentralen Rahmen, um Erkenntnisse aus Seismologie, Geochemie, Geodäsie, Tektonik, Mineralphysik und Geologie zusammenzuführen. Ein erfolgreiches Modell muß Bedingungen aus allen Disziplinen genügen. Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag dazu leisten, Modelle zur Manteldynamik mit geochemischen Erkenntnissen zu vereinen. Im Folgenden werden einige der dafür wesentlichen Vorstellungen und offenen Fragen zusammengefasst.

### 2.1. Geophysikalische Beobachtungen und Interpretationen

#### 2.1.1. Plattentektonik

Aus der Verteilung von Erdbebenherden, Vulkanen und Kriechgeschwindigkeiten folgt, dass die Erdkruste aus etwa 25 gegeneinander beweglichen Platten besteht (Abb. 2.1-1).



**Abb. 2.1-1:** Plattentektonik der heutigen Erdoberfläche. Die Plattengeschwindigkeiten sind so normiert, dass sie integriert keine Rotation ergeben (NNR = no net rotation). Bei diesen Geschwindigkeiten dauert eine komplette Umwälzung im Mantel 400 bis 500 Millionen Jahre, wenn man über die ganze Manteltiefe reichende Konvektionszellen annimmt. Rote Plattengrenzen sind divergent, blaue sind Subduktionszonen und gelbe sind Transformstörungen. Topographie und Bathymetrie wurden als graues Relief dargestellt. Die mittlere Plattengeschwindigkeit an der Erdoberfläche liegt heute bei 3,9 cm/a (Gordon & Jurdy, 1986).

Diese Lithosphärenplatten sind nach heutiger Auffassung ein integraler Bestandteil und ihre Bewegungen ein Abbild der Konvektion im Erdmantel. An mittelozeanischen Rücken bildet sich neue ozeanische Kruste, die nach weniger als 200 Ma in Subduktionszonen wieder dem Mantel zugeführt wird und diesen kühlt. Die Frage, wie Plattentektonik entsteht, ist ein

## 2.1. Geophysikalische Beobachtungen und Interpretationen

zentrales offenes Problem der Geodynamik. Warum wird sie nur auf der Erde beobachtet und nicht auf Mars oder Venus? Die relevanten Rheologien sind komplex und vermutlich spielt Wasser eine entscheidende Rolle bei der Subduktion (vgl. 3.4.1.).

Da viele Parameter des Mantels, insbesondere die Viskositätsverteilung, nur ungenau bekannt sind, ist die mittlere Plattengeschwindigkeit der einzige Beobachtungswert zur Einschätzung der Heftigkeit der heutigen und der nicht zu weit zurück liegenden Mantelkonvektion.

### 2.1.2. Vulkanismus und Krustenbildung

Das in Subduktionszonen in den Mantel gelangende Wasser ist der Auslöser von andesitischem Vulkanismus. Die damit verbundenen Aufschmelzprozesse können wesentlich zur Differenziation kontinentaler Kruste beigetragen haben, aus der sich durch weitere Prozesse (Sedimentation, Anlagerung über Akkretionskeile) die heutigen Kontinente gebildet haben. Kontinentale Kruste ist durchschnittlich 40 km mächtig und spezifisch leichter als die an mittelozeanischen Rücken produzierte ozeanische Kruste (0 – 7 km mächtig). Sie wird nur zu einem kleinen Teil in Form von Sedimenten wieder subduziert. Neben großräumigen Aufstiegszonen (Superplumes) gibt es 50-60 eng begrenzte Plumes. Deren Lage relativ zueinander ist vergleichsweise konstant und ihr Vulkanismus hinterläßt Inselketten auf den sich darüber hinweg bewegenden Lithosphärenplatten. Die räumliche Struktur der Konvektion im Mantel könnte wesentlich mit der Verteilung kontinentaler Lithosphäre zusammenhängen (Wilson-Zyklus).

### 2.1.3. Seismologie

Die Erkenntnisse zur Struktur des Mantels kommen hauptsächlich aus seismischen Daten. Seismologische Methoden messen primär Anomalien seismischer Ausbreitungsgeschwindigkeiten. Die jeweiligen Ursachen können verschieden sein, z.B. Temperaturunterschiede, stoffliche und mineralogische Heterogenitäten, Vorkommen von Wasser oder partieller Schmelze. In dieser Arbeit werden die Tiefenprofile des radialsymmetrischen Erdmodells PREM (Dziewonski & Anderson, 1981) für viele Parameter des Erdmantels und Erdkerns genutzt. Insbesondere läßt sich aus PREM ein Tiefenprofil der für Konvektionsmodelle besonders wichtigen Viskositätsverteilung im Mantel herleiten (Walzer et al., 2003a). Laterale Heterogenitäten (z.B.  $T$ ,  $\eta$ ) ergeben sich dann selbstkonsistent aus den Konvektionsrechnungen und können mit Beobachtungen verglichen werden. Seismische Diskontinuitäten in durchschnittlich 410, 510 und 660 km Tiefe entsprechen den Phasenübergängen von Olivin zu  $\beta$ -Spinell,  $\beta$ -Spinell zu  $\gamma$ -Spinell bzw. von  $\gamma$ -Spinell zu Perowskit plus Magnesiowüstit. Der endotherme Übergang zu Perowskit behindert kalte Ab- und warme Aufströme (vgl. 3.3). Durch den Nachweis der Existenz von Abtauchplatten bis in die Nähe der Kern-Mantel-Grenze (CMB) durch seismische Tomographie (van der Hilst & Kárason, 1999) ist eine getrennte Konvektion von oberem und unterem Mantel in den vergangenen 50-100 Millionen Jahren unwahrscheinlich geworden. Eine neue Tomographiemethode (finite-frequency tomography) berücksichtigt, dass Strukturen auf dem direkten seismischen Strahlenweg schlechter aufgelöst werden als die schlauchförmig darum liegenden. Damit können jetzt auch einzelne Plumes abgebildet werden (Nolet, 2003). Manche haben ihren Ursprung zwischen 650 und 1000 km Tiefe (z.B. Afar, Galapagos, Island, Lord Howe), manche bei etwa 1500 km (z.B. Azoren, Bouvet) und einige an der CMB (z.B. Hawaii, Kapverden, Kerguelen, Osterinseln, Samoa, Tahiti). Einige Plumes sind im Mantel miteinander verbunden (z.B. Azoren und Kapverden, Pitcairn und Tahiti). Ein Vergleich mit den Ergebnissen von Karato (2003) legt den Schluss nahe, dass die oberhalb 1000 km Tiefe entstehenden Plumes ihre Ursache in wasserbedingten Schmelzpunkterniedrigungen haben.

Über der CMB gibt es eine dünne Schicht, D“, die lateral seismisch stark inhomogen ist. Ishi & Tromp (1999) schließen aus Eigenschwingungen der Erde, dass sich in der D“-Schicht

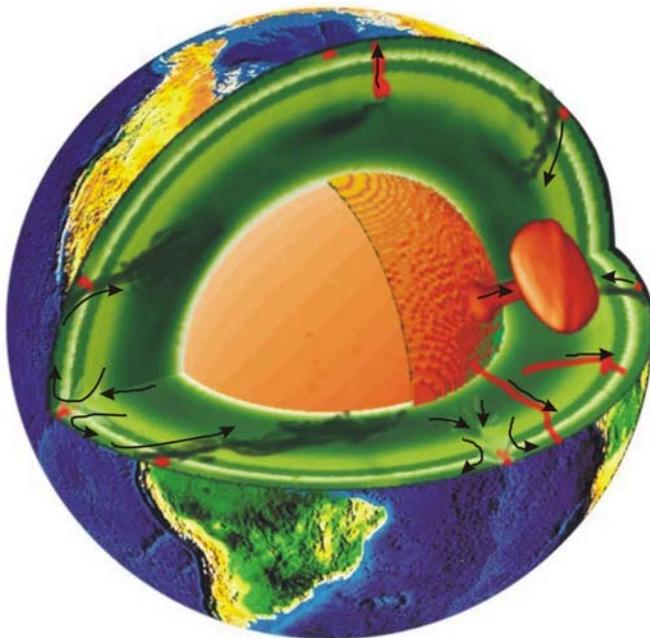
## 2.1. Geophysikalische Beobachtungen und Interpretationen

spezifisch dichteres Material sammelt. Es ist umstritten, ob es weitere chemisch bedingte Dichteschichtungen im Mantel gibt. Die diskutierten Vorstellungen werden z.B. von Tackley (2000) zusammengefasst (siehe auch Kapitel 2.2). Einige grundlegende Aspekte der Manteldynamik sind in Abb. 2.1-1 dargestellt.

### 2.1.4. Wärmehaushalt des Erdmantels

Die feste Erde gibt heute eine Wärmeleistung von etwa 44,3 TW (Pollack et al., 1993) ab. Davon entfallen 1 bis 10 TW auf den Kern, 7,1 TW auf die radiogene Wärmeproduktion in der Kruste und der Rest auf den Mantel (Fowler, 1990). Es müssen also rund 35 TW durch Konvektion und Konduktion im Mantel nach oben transportiert werden. Plumes transportieren etwa 26 TW (Nolet, 2003). Bei dieser Abschätzung wurde die Strömungsgeschwindigkeit mit 10 cm/a noch eher zu niedrig angesetzt. Es ist gut möglich, dass die gesamte Wärme aus größeren Tiefen von Plumes an die Oberfläche transportiert wird. Der Wärmestrom an der Oberfläche kontinentaler Kruste ist durchschnittlich  $65 \text{ mW/m}^2$  und in ozeanischer Kruste  $101 \text{ mW/m}^2$  (Pollack et al., 1993). 61 % der Erdoberfläche sind von ozeanischer Kruste bedeckt (Fowler, 1990) und der mittlere Wärmestrom der gesamten Erde ist  $87 \text{ mW/m}^2$  (Pollack et al., 1993).

Mit geophysikalischen Methoden wird eine hohe räumliche Auflösung einiger Strukturen des Erdmantels erreicht. Allerdings liefern sie nur eine Momentaufnahme, nämlich die des heutigen Zustandes. Aus Rekonstruktionen der Plattenbewegungen an der Erdoberfläche und aus der abnehmenden inneren Heizung der Erde folgt aber, dass die Konvektion im Mantel zeitabhängig ist.



**Abb. 2.1-2: Dynamik und Struktur des heutigen Erdmantels.** Die radiale grüne Farbkodierung entspricht dem Viskositätsmodell von Walzer et al. (2003b): je dunkler desto fester. Die oberste niedrigviskose Schicht ist die Asthenosphäre. Die glatte orange Fläche begrenzt den flüssigen äußeren Kern. Sie ist in Bezug auf das langsame Festkörperkriechen des Mantels isotherm. Die lateral sehr heterogene D“-Schicht ist als dünne Hülle über dem Kern dargestellt. Von dort steigt ein Megaplume auf. Die dünnen roten Plumes können an der CMB, in etwa 1500 km Tiefe oder zwischen 650 und 1000 km Tiefe entspringen (Nolet, 2003). Pfeile symbolisieren die Bewegung ozeanischer Kruste von der Entstehung bis zur meist asymmetrischen Subduktion. Rote Flecke deuten den jeweiligen Vulkanismus an. In durchschnittlich 410, 510 und 660 km Tiefe finden Phasenübergänge von Olivin zu  $\beta$ -

Spinell,  $\beta$ -Spinell zu  $\gamma$ -Spinell bzw. von  $\gamma$ -Spinell zu Perowskit plus Magnesiowüstite statt. Der letztgenannte Phasenübergang ist endotherm und behindert die Konvektionsbewegungen. Eine weitgehende dynamische Entkopplung von unterem und oberem Mantel ist aber ausgeschlossen, weil subduzierte Platten auch unter 660 km seismisch beobachtbar sind (van der Hilst & Kárason, 1999).

### 2.1.5. Materialeigenschaften

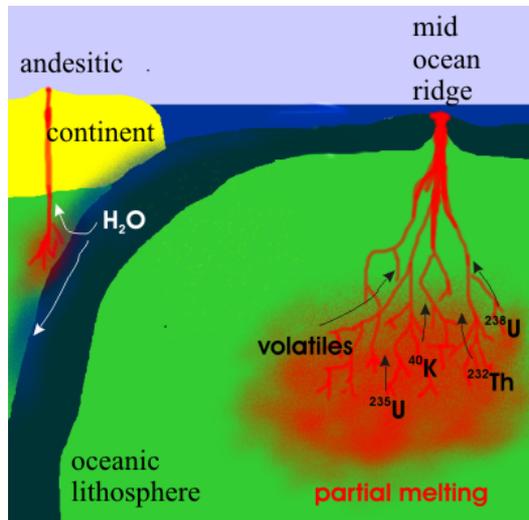
In Laborexperimenten, insbesondere mit Diamantstempelpressen, lassen sich die mechanischen Eigenschaften und die Schmelztemperaturen von Mantelgesteinen ermitteln. Unter den Bedingungen des unteren Mantels ( $P \leq 136 \text{ GPa}$ ,  $T \leq 4000 \text{ K}$ ) sind die für Konvektionsrechnungen wichtigen Parameter noch zu ungenau bekannt. Das gilt erst recht für

## *2.1. Geophysikalische Beobachtungen und Interpretationen*

den Kern. Für nähere Erläuterungen zu diesem Themenkreis sei hier auf Schubert et al. (2001) verwiesen. Die Wahl der Parameter der Modelle dieser Arbeit orientiert sich weitgehend an Walzer et al. (2003a).

## 2.2. Geochemische Beobachtungen und Modelle

Chemische Analysen und Untersuchungen zu Isotopenverhältnissen in vulkanischen Gesteinen liefern Aussagen über die Zusammensetzung des Mantels. Die Messwerte geben das zeitlich integrierte Ergebnis der gegenläufigen Prozesse von Differenziation (Abb. 2.2-1) und konvektiver Vermischung (Abschnitt 2.3) wider.



**Abb. 2.2-1:** Differenziation in den oberen Bereichen des oberen Erdmantels. In Gegenwart partieller Schmelze gehen bevorzugt inkompatible Elemente in die Schmelze. Diese wird dann aus der Matrix extrahiert. Aufströme des Mantels bringen Material an die Oberfläche, wo Differenziation stattfindet. In Subduktionszonen können die differenzierten Gesteine wieder in den Mantel gelangen. In der Biegezone wird unter Wasseraufnahme Serpentin gebildet. Auf diese Weise gelangen Wasser und (darin gelöste) weitere Volatile wieder in den Mantel (Rüpke et al., 2003a und b). Neben den in der Zeichnung angegebenen Heiznukliden werden auch Elemente aus anderen Zerfallssystemen differenziert, welche die Manteldynamik kaum beeinflussen (Sm-Nd, Rb-Sr), aber als Tracer wichtig sind. Voraussetzung ist nur, dass Mutter- und Tochternuklid verschiedene Verteilungskoeffizienten haben. Die inkompatiblen Elemente reichern

sich in Schmelze und Kruste an, zurück bleibt eine an diesen Elementen verarmte Matrix. (Prinzipiskizze, nicht maßstabsgerecht)

Die für Mantelkonvektionsmodelle wesentlichen geochemischen Randbedingungen werden im Folgenden kurz zusammengefasst. Dieser und der folgende Abschnitt orientieren sich etwas an Tackley & Xie (2002), alle anderen Quellen werden am entsprechenden Ort zitiert.

### 2.2.1. Isotopische Heterogenitäten und deren Ausdehnung

Die Basalte mittelozeanischer Rücken (MORB = Mid Ocean Ridge Basalt) sind sich weltweit in den Konzentrationen inkompatibler Spurenelemente weitgehend ähnlich. Im Gegensatz dazu sind die Basalte von Plumes (OIB = Ocean Island Basalt) sehr heterogen. Daraus schließt man, dass es in der Silikathülle der Erde mehrere geochemische Reservoirs gibt. Diese werden anhand der Verhältnisse von Spurenelementen oder auf kosmochemischer Basis definiert (Allègre & Lewin, 1995; Hart & Zindler, 1989; Hofmann, 1997; Silver et al., 1988; Zindler & Hart, 1986;). Die räumliche Verteilung der Reservoirs im Mantel ist bisher aber nicht geklärt. Allègre & Turcotte (1986) nehmen an, dass MORBs ein größeres Gebiet beproben als OIBs und aus passiv aufsteigendem Mantelmaterial im obersten Mantel stammen. Die Größe der beobachteten Heterogenitäten reicht von zentimetergroßen Strukturen („marble cake“: Kellogg, 1992) in Hochtemperatur-Peridotiten (Allègre und Turcotte, 1986) bis zur erdumspannenden DUPAL-Anomalie (Hart, 1984). Da die DUPAL-Anomalie weitgehend in der südlichen Hemisphäre liegt, spricht das gegen eine vollständige Durchmischung des Mantels in lateraler Richtung. Sie existiert seit mindestens 115 Ma (Weis et al., 1989).

### 2.2.2. Entgaster Teil des Mantels

Bei der Krustenbildung durch Extraktion partieller Schmelze bleiben nur etwa 7 % He und 5 – 15 % Ar im Residuum (Hiyagon & Ozima, 1986). Diese Werte sind aber eher unsicher. Für He könnte der Verteilungskoeffizient auch kleiner als der von Uran (0,007) sein (Xie & Tackley, 2003). Außerdem hängen die Verteilungskoeffizienten von verschiedenen

## 2.2. Geochemische Beobachtungen und Interpretationen

Umgebungsparametern ab, z.B. von Druck, Temperatur, dem SiO<sub>2</sub>-Gehalt der Schmelze und dem einzelnen Nachbarmineral.

Fast das gesamte auf der Erde vorhandene <sup>40</sup>Ar ist durch den Zerfall von <sup>40</sup>K entstanden (Allègre et al., 1996). Ar entweicht kaum in den Weltraum. Es ist abgeschätzt worden, dass nur etwa 50 % des seit Entstehung der Erde gebildeten <sup>40</sup>Ar in der Atmosphäre sind (Allègre et al., 1996; Zhang & Zindler, 1989). Allerdings ist der Gehalt des Mantels an <sup>40</sup>K nur ungenau bekannt. Die niedrigen Ar-Konzentrationen in der MORB-Quelle müssten durch ein nicht entgastes Reservoir ausgeglichen werden, um auf den bei obigen Abschätzungen verwendeten Wert zu kommen. Ein insgesamt niedrigerer <sup>40</sup>K-Gehalt wäre auch möglich (Albarède, 1998; Davies, 1999). Unter Beachtung der Rezyklisierung des in Meerwasser gelösten Argons könnten zudem deutlich mehr als 50 % schon einmal in der Atmosphäre gewesen sein (Rüpke et al., 2003b).

### 2.2.3. Reservoir rezyklierten Materials

Obwohl sich die isotopischen Zusammensetzungen von OIBs und MORBs überschneiden, sind die an inkompatiblen Elementen verarmten MORBs nicht eine Mischung aller OIBs. Letztere können Beimengungen aus einem oder mehreren der drei folgenden Reservoirs enthalten. Das Reservoir HIMU<sup>1)</sup> und die Endglieder des an inkompatiblen Elementen angereicherten Mantels (EM1, EM2)<sup>2)</sup> werden anhand von Spurenelementen in MORBs und OIBs definiert (Hofmann, 1997). HIMU wird mit subduzierter ozeanischer Kruste in Verbindung gebracht, da sowohl die Serpentinbildung als auch die spätere Wasserabgabe in größeren Tiefen zur Anreicherung von U gegenüber Pb im Residuum beitragen (Rüpke et al., 2003b). EM1 und EM2 könnten ehemalige kontinentale Kruste (oder Lithosphäre) sein, die z.B. in Form von Sedimenten rezykliert wurde. Die Verhältnisse von Blei-Isotopen sprechen für ein Alter der Reservoirs von 1-2 Ga. Diese Interpretation ist allerdings nicht zwingend (Albarède, 2001; Hofmann, 1997).

### 2.2.4. Reservoir mit hohem <sup>3</sup>He/<sup>4</sup>He-Verhältnis

Das Verhältnis <sup>3</sup>He/<sup>4</sup>He hat in MORBs fast einheitlich den achtfachen atmosphärischen Wert ( $R_a \approx 8$ ). Die  $R_a$ -Werte von OIBs streuen stark, können unter oder über dem MORB-Wert liegen (z.B. Loihi:  $R_a=35$ ; Kurz et al., 1983) und werden oft von diesem beeinflusst (Farley & Neroda, 1998).

In den meisten Arbeiten wird davon ausgegangen, dass <sup>3</sup>He *heute* auf der Erde ausschließlich unter Einwirkung hochenergetischer kosmischer Strahlung in den oberen Schichten der Atmosphäre entsteht und heute nicht subduziert wird. Es kann nur bei der Akkretion der Erde in den Mantel gelangt sein kann. Deshalb können hohe  $R_a$ -Werte als Hinweis auf ein zusätzliches, primitives Reservoir gedeutet werden, das seine primordiale Signatur bis heute bewahrt hat. Es könnte aber auch sein, dass hohe  $R_a$ -Werte durch die geringere Produktion von <sup>4</sup>He in verarmter, rezyklierter Lithosphäre verursacht werden (Coltice et al., 2000; Coltice & Ricard, 1999; Ferrachat & Ricard, 2001). Bei dieser Erklärung muss He auch nicht unbedingt kompatibler als Th und U sein: <sup>4</sup>He wird kontinuierlich durch den Zerfall von Th und U im Mantel produziert und  $R_a$  sinkt. Das früh verarmende Residuum behält einen höheren  $R_a$ -Wert als das später verarmende. Wenn die früh verarmte Lithosphäre lange genug isoliert bleibt während der Rest des Mantels entgast, so können die heute beobachteten  $R_a$ -Unterschiede entstehen.

Anderson (1993) schlägt vor, dass größere Mengen <sup>3</sup>He mit kosmischem Staub auf die Erdoberfläche gelangen und schließlich zum Teil subduziert werden. Dieser Vorschlag bedarf aber weiterer Prüfung.

---

<sup>1)</sup> HIMU = high  $\mu$ ;  $\mu = {}^{238}\text{U} / {}^{204}\text{Pb}$

<sup>2)</sup> EM = enriched mantle

## 2.2. Geochemische Beobachtungen und Interpretationen

Es ist auch nicht geklärt, wie sich He unter den Bedingungen des unteren Mantels verhält. Untersuchungen der Verteilungskoeffizienten von Edelgasen unter hohem Druck sprechen aber für eine starke Anreicherung in silikatischer Schmelze und gegen den Kern als Reservoir primordialen Heliums (Matsuda et al., 1993).

### 2.2.5. Massenbilanz

Wenn man ein Modell der Zusammensetzung kontinentaler Kruste und der MORB-Zusammensetzung von der aus kosmochemischen Argumenten gewonnenen Zusammensetzung der gesamten silikatischen Erde abzieht, so fehlt ein Teil der zu erwartenden Masse bestimmter Elemente. Das betrifft u.a.  $^{40}\text{Ar}$  und die wesentlichen Heiznuklide ( $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$ ,  $^{40}\text{K}$ ,  $^{232}\text{Th}$ ). Diese Feststellung passt zu dem Ergebnis, dass die geringen Konzentrationen von Heiznukliden in MORB nicht den beobachteten Wärmestrom erklären können. Außerdem entgast der Mantel heute deutlich weniger radiogenes  $^4\text{He}$ , als aus der Konzentration der Heiznuklide zu erwarten wäre (heat-helium imbalance: O’Nions & Oxburgh, 1983; van Keken et al., 2001). Es muss noch ein weiteres Reservoir geben, das die in der Bilanz fehlenden Elemente enthält und mehr Wärme als Helium abgibt. Dieses Reservoir kann je nach Konzentration der fehlenden Elemente 10 – 50 % des Erdmantels einnehmen. Ein solches Reservoir könnte primordial sein. Damit es mit dem Reservoir hoher Ra-Werte übereinstimmen kann, müsste bei der Akkretion der Erde genug  $^3\text{He}$  in den Mantel gelangt sein, um das beim Zerfall von Heiznukliden frei werdende  $^4\text{He}$  zu kompensieren.

### 2.3. Vereinigung geophysikalischer und geochemischer Modelle

Die beobachteten Heterogenitäten in den basaltischen Gesteinen können nur durch verschiedene geochemische Reservoirs im Mantel erklärt werden. Wie können diese in Gegenwart von Ganzmantelkonvektion bestehen? Wie kann insbesondere ein weltweit gut durchmischtes Reservoir (MORB-Quelle) neben den heterogenen OIB-Quellen bestehen? Außer der unverstandenen Plattentektonik ist dies eine zweite zentrale offene Frage der Geodynamik (z.B. van Keken et al., 2002).

Die gängigsten Vorstellungen zur Lage der geochemischen Reservoirs und ihre Beziehung zur Manteldynamik werden in Abb. 2.3-1 zusammengefasst.

#### 2.3.1. Allgemeines Mischungsverhalten konvektiver Strömungen

Eine die Strömung nicht beeinflussende Heterogenität wird zunächst verrührt. Dabei erhöht sich das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen (Ottino, 1989). Dieser Vorgang wirkt über große Raumbereiche. Die vollständige Auslöschung von Heterogenitäten kann nur durch Diffusion erfolgen. Diese ist irreversibel, wirkt nur über kurze Distanzen (einige cm/Ga; Kellogg, 1992) und ist in globalen Mantelkonvektionsmodellen vernachlässigbar. Unter Mischung oder Vermischung wird im Folgenden nur das Verrühren im Geschwindigkeitsfeld verstanden. Zur Beschreibung thermischer Konvektion dient meist die eulersche Betrachtungsweise<sup>1)</sup>, das Mischungsverhalten wird aber durch die lagrangesche Struktur<sup>2)</sup> des Geschwindigkeitsfeldes bestimmt.

In 2D stationärer Rayleigh-Bénard-Konvektion sind lagrangesche Bahnen mit den Stromlinien identisch. Die Vermischung ist nicht sehr effizient und auf die jeweilige Konvektionszelle beschränkt (Schmalzl, 1996). Schon eine einfache periodische Zeitabhängigkeit der Strömung in der eulerschen Betrachtungsweise führt zu lagrangeschem Chaos (Aref, 1984; Pierrehumbert, 1991). Die Zeit übernimmt hier die Funktion der für Chaos nötigen dritten Dimension und die lagrangeschen Bahnen sind prinzipiell nicht mehr vorhersagbar. Die Vermischungswirkung hängt von der konkreten Strömung ab. Heterogenitäten innerhalb einer Konvektionszelle werden schneller zerstört als in stationären Strömungen, benachbarte Zellen können aber lange weitgehend voneinander isoliert bleiben (Christensen, 1989; Schmalzl, 1996).

In 3D Geometrie hängt das Mischungsverhalten neben dem zeitlichen Verhalten auch noch von der Anwesenheit einer toroidalen<sup>3)</sup> Geschwindigkeitskomponente ab. In stationären, kartesischen Modellen ohne toroidale Anteile liegen die lagrangeschen Bahnen auf Torusoberflächen und es gibt keine chaotischen Bereiche. Die Vermischung ist auf diese 2D Flächen beschränkt und wenig effektiv (Schmalzl, 1996). Mit einer toroidalen Komponente kann die Vermischung raumfüllend wirken und ist effektiver als in 2D zeitabhängigen Strömungen (Ferrachat & Ricard, 1998). Es bleiben aber Inseln geringer Mischungseffizienz bestehen<sup>4)</sup>. In zeitabhängigen Strömungen ohne toroidale Komponente gibt es Vermischung innerhalb und zwischen Konvektionszellen. Letztere ist aber wenig effizient (Schmalzl, 1996). Außerdem ist die Unterscheidung zwischen verschiedenen Konvektionszellen mit zunehmender Komplexität und Zeitabhängigkeit der Strömung dem Problem immer weniger angemessen. Die Vermischung in zeitabhängigen Strömungen mit toroidalen Anteilen kann

<sup>1)</sup> eulersche Betrachtungsweise: Sicht der Strömung durch einen ortsfesten Betrachter

<sup>2)</sup> lagrangesche Betrachtungsweise: Sicht der Strömung durch einen sich mit ihr bewegenden Betrachter

<sup>3)</sup> Jedes 3D quellenfreie Geschwindigkeitsfeld kann in einen poloidalen und einen toroidalen Anteil zerlegt werden. Der poloidale Anteil beschreibt die Divergenz in einer horizontalen Ebene, der toroidale steht für Drehbewegungen um eine vertikale Achse (vgl. Kapitel 3.4). Toroidale Bewegungen können durch horizontal unterschiedliche Materialeigenschaften, spezielle Randbedingungen oder eine endliche Prandtlzahl verursacht werden. Für den Wärmetransport sind primär poloidale Bewegungen verantwortlich.

<sup>4)</sup> Vermischung kann chaotisch (turbulent) oder laminar sein. Im ersten Fall werden Heterogenitäten exponentiell in der Zeit gedehnt, im zweiten Fall nur linear.

## 2.3. Vereinigung geophysikalischer und geochemischer Modelle

sehr effizient sein, hängt aber stark vom jeweiligen Modell ab. Prinzipiell können chaotische und reguläre Bereiche nebeneinander existieren. Sie können räumlich und zeitlich veränderlich sein (Haller, 2001a, b). Diese Aussagen gelten auch in 3D sphärischer Geometrie (Stemmer, 2001).

Zusammenfassend ist festzustellen, dass die Übertragung der Ergebnisse von 2D Mischungsuntersuchungen auf 3D Geometrie problematisch ist. Für den Mantel relevante, 3D instationäre Strömungen mit toroidalen Anteilen erlauben grundsätzlich eine effiziente Vermischung im gesamten Strömungsgebiet, müssen aber von Fall zu Fall untersucht werden.

### 2.3.3. Einfluss von Viskositätskontrasten auf das Mischungsverhalten

Im Folgenden werden fünf Arbeiten zu Mischungsfragen vorgestellt, die Viskositätskontraste berücksichtigen. Damit soll der Stand der Forschung verdeutlicht werden.

Walzer & Hendel (1999a) berücksichtigen in einem 2D, kartesischen Konvektionsmodell über aktive Marker die chemische Differenziation des Mantels. Die Viskosität im unteren Mantel ist 1000 mal höher als in der Asthenosphäre. Es ergeben sich Kontinente und eine verarmte obere Hälfte des Mantels. Der hochviskose untere Bereich bleibt weitgehend unverändert. Der obere Bereich wird stark durchmischt, bis er nahezu vollständig differenziert, verarmt und damit homogen ist. Bei diesem Modell widerspricht vor allem die starke konvektive Isolation des unteren Bereiches den Beobachtungen, die für Ganzmantelkonvektion mit Abströmen von der Oberfläche bis zur CMB sprechen (2.1.3, 2.2.3). Es wird aber deutlich, dass erdartige Viskositätskontraste auch in dynamischen Rechnungen konvektive Isolation verursachen können. Gurnis & Davies (1986) hatten ebenfalls konvektive Isolation aufgrund von Viskositätskontrasten gefunden. Die Kritik von Tackley & Xie (2002) an deren kinematischen Modellen trifft auf Walzer & Hendel (1999a) aber nicht zu.

Ferrachat & Ricard (2001) finden in ähnlicher Geometrie, dass Viskositätsunterschiede bis zu Faktor 100 keine Reservoirbildung erlauben. Sie verwenden ein kinematisches Modell, bei dem die Strömungsgeschwindigkeiten etwa um den Faktor 3 zu hoch sind.

Van Keken & Zhong (1999) haben aus der angenommenen Dichteverteilung und den resultierenden Auftriebskräften ein Kriechgeschwindigkeitsfeld des heutigen Mantels errechnet. In diesem als stationär angesehenen Geschwindigkeitsfeld<sup>1)</sup> werden passive Marker bewegt. Einige Markerbahnen sind regulär und sprechen für konvektiv isolierte Zellen. Die von toroidalen Bewegungen (an der Oberfläche?) beeinflussten Marker werden hingegen über weite Strecken lateral transportiert. Dieses Verhalten wird als Indiz gegen das Überleben von Heterogenitäten im Mantel über geologische Zeiträume gewertet. Allerdings liegt die mittlere Geschwindigkeit an der Oberfläche in ihrem Modell mit 4,8 cm/a höher als die beobachteten 3,9 cm/a (Gordon & Jurdy, 1986). Außerdem sind die Viskositätskontraste viel zu niedrig. Die Asthenosphäre ist nur 300mal weicher als der untere Mantel, im Viskositätsprofil von Walzer et al. (2003b) liegt dieser Faktor bei  $10^4$ . Die Mischungseffizienz des Gesamtsystems wird also vermutlich überschätzt.

Stegman et al. (2002) verwenden ein 3D sphärisches Modell, im realistischsten Fall mit den Auftriebskräften und Plattengeschwindigkeiten der heutigen Erde als Antrieb. Die Viskosität steigt graduell um den Faktor 100 zwischen Asthenosphäre und unterem Mantel. Die Kombination von toroidalen Bewegungen und niedrigerer Viskosität im oberen Mantel reicht aber nicht aus, um eine wesentlich bessere Durchmischung als im unteren Mantel zu erreichen. Der zu niedrige Viskositätskontrast und die fehlende Zeitabhängigkeit könnten die Gründe dafür sein.

Manga (1996) findet, dass Klumpen mit einer 10 bis 100mal höheren Viskosität als der umgebende Mantel sich langsam genug verformen, um seit Beginn der Mantelevolution bestehen zu bleiben. Primitives Material in Form solcher Klumpen könnte 35 – 65 % des

---

<sup>1)</sup> unter Geschwindigkeitsfeld ist ab hier immer das Vektorfeld der Kriechgeschwindigkeiten der Mantelkonvektion zu verstehen

## 2.3. Vereinigung geophysikalischer und geochemischer Modelle

Mantels einnehmen (Becker et al., 1999). Die Klumpen müssten von Plumes aber nicht an mittelozeanischen Rücken beprobt werden. Außerdem ist es schwer vorstellbar, dass thermischer und chemischer Auftrieb den gleichen Wert wie im umgebenden Mantel ergeben. Anderenfalls würden die Klumpen entweder sinken oder steigen.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass realistische Viskositätskontraste zu konvektiver Isolation führen können. Mir ist aber kein Aufsatz bekannt, der auf dieser Basis eine Reservoirbildung voraussagt, die mit anderen Beobachtungen vereinbar ist. Die vorliegende Arbeit soll hier einen Beitrag leisten.

### 2.3.4. Dichteschichtung des Mantels

Kellogg et al. (1999) schlagen zur Erklärung der geochemischen Beobachtungen eine globale chemische Grenze in etwa 1000 km Tiefe vor. Da das unten liegende Material in diesem Modell nur eine leicht höhere Nulldruckdichte ( $\sim 1\%$ ) hat, wäre die Schichtung zwar immer noch stabil<sup>1)</sup>, hätte aber eine stark verbeulte Grenzfläche. Das widerspricht tomographischen Modellen, selbst wenn sich die Einflüsse von Temperatur und Zusammensetzung auf die seismischen Geschwindigkeiten gegenseitig aufheben würden (Tackley, 2002). Es gibt keine seismischen Hinweise auf eine globale Grenzschicht zwischen 660 km und D<sup>''</sup> (Vidale et al., 2001). Die meisten tomographischen Modelle kommen zu dem Ergebnis, dass subduzierte Platten in vielen Gegenden die CMB erreichen (z.B. Grand et al., 1997; Masters et al., 2000). Außerdem würde sich die dichtere Schicht aufheizen (McNamara & van Keken, 2000) und eventuell partiell schmelzen. Der Kern wäre thermisch isoliert und es gäbe keinen Dynamoeffekt. Wenn sich die Schicht irgendwann so sehr aufheizt, dass der thermische Auftrieb den chemischen Abtrieb überwiegt, könnte sie aufsteigen (Stegman et al., 2003). Im Gegensatz zum Mond gibt es auf der Erde aber keine Hinweise auf eine solche katastrophale Umwälzung.

Eine dünne Schicht dichten Materials über der CMB ist dagegen leichter vorstellbar. Die starke seismische Diskontinuität der 200 – 300 km mächtigen D<sup>''</sup>-Schicht (Jeanloz & Lay, 1993; Lay et al., 1998) wird meist als chemische Grenze gedeutet, obwohl eine Phasengrenze die Beobachtungen auch erklären könnte (Sidorin et al., 1999). Christensen & Hofmann (1994) zeigen, dass sich eine Schicht subduzierter ozeanischer Kruste trotz Konvektion über der CMB halten kann. Das Verhältnis von Oberfläche zu konvektiv isoliertem Volumen reicht für eine starke Aufheizung nicht aus. Es ist aber problematisch, alle angereicherten Reservoirs in einem kleinen Volumen unterzubringen (vgl. 2.2; Hofmann, 1997).

Eine unterbrochene Schicht dichten Materials ist auch möglich. Sie könnte prinzipiell ein größeres Volumen einnehmen als eine durchgehende Schicht. Das dichte Material würde sich unter großräumigen Aufströmen (Megaplumes) sammeln und wäre unter Abströmen eventuell gar nicht vorhanden (Tackley, 1998). Tomographische Modelle widersprechen dieser Interpretation nicht (Tackley, 2002). Allerdings werden im heutigen Mantel nur zwei Megaplumes beobachtet (Masters et al., 2000) und das für dichtes Material zur Verfügung stehende Volumen ist für die geochemischen Forderungen eher zu klein. Außerdem müsste die CMB durch das spezifisch schwerere Material unter den Megaplumes eingedellt werden. Das widerspricht geodätischen Beobachtungen (Forte et al., 1995).

Es bleibt festzuhalten, dass die bisherigen Vorschläge zur Dichteschichtung des Mantels allein nur schwer zur Erklärung der geochemischen Beobachtungen ausreichen.

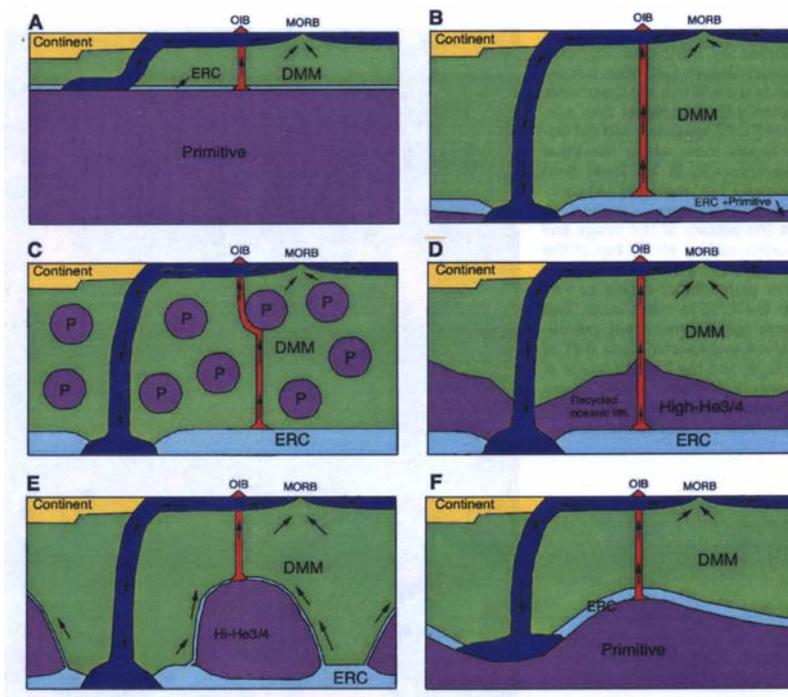
---

<sup>1)</sup> Im Gegensatz dazu wirken Dichteschichtungen aufgrund von Phasenübergängen nur über die Ausbeulung der Grenzschicht auf die Konvektion. Ohne laterale Temperaturunterschiede würde sich die Dichte des durchströmenden Materials überall in der gleichen Tiefe ändern. Dadurch entstehen aber keine lateralen Dichteunterschiede, welche einen Auf- oder Abtrieb bewirken könnten.

## 2.3. Vereinigung geophysikalischer und geochemischer Modelle

### 2.3.5. Filterung in der Übergangszone

Bercovici (2003) stellt folgende Hypothese zur Erklärung der Unterschiede zwischen MORB und OIB auf: Zwischen 660 und 410 km Tiefe kann der Mantel mehr Wasser aufnehmen als oberhalb 410 km. Dadurch wird in hydriertem, aufsteigendem Material Wasser freigesetzt und es tritt partielle Schmelze auf. Diese steigt unter einer Tiefe von 410 km nicht nach oben (Ohtani et al., 1998) und es gelangt nur trockenes, an inkompatiblen Elementen verarmtes Material in die unterhalb der Lithosphäre vermutete MORB-Quellregion. Abtauchende Platten nehmen inkompatible Elemente und Wasser aus der Filterzone mit nach unten. Die Wasserlöslichkeit (der Übergangszone) sinkt bei höheren Temperaturen und Plumes bringen deshalb eventuell nicht genug Wasser mit, um den Filtereffekt auszulösen. Die Segregation an inkompatiblen Elementen reicher, kontinentaler Kruste kann durch das globale Fehlen der Filterung im heißeren archaischen Mantel begründet werden. Seismische Beobachtungen sprechen für eine 1 – 10 km mächtige Zone partieller Schmelze oberhalb der 410-km-Diskontinuität. Ansonsten hängt die Hypothese von vielen, nur ungenau bekannten Parametern ab und muß noch näher überprüft werden.



**Abb. 2.3-1:** Vorstellungen zur Manteldynamik und Lage der geochemischen Reservoirs (nach Tackley, 2000). Eine Filterung in der Übergangszone ist bei allen Modellen denkbar.

**Abkürzungen:**

ERC = angereicherte rezyklierte Kruste, DMM = verarmte MORB-Quelle, P = undifferenziertes Material.

**A:** altes geochemisches Modell für Zweischichtkonvektion

**B:** angereichertes Material über der CMB konzentriert

**C:** primitive Klumpen

**D:** komplette Rezyklierung

**E:** unterbrochene dichte Schicht, 'Piles'

**F:** dichte Schicht global und dick

### 2.3.6. Differenzierungsmodelle

Walzer & Hendel (1997a,b; 1999) untersuchen mit einem 2D kartesischen Modell die Differenziation eines primitiven Mantels in kontinentale Kruste und Residuum. Dabei werden nicht einzelne Isotopensysteme, sondern Reservoirs des heutigen Mantels modelliert. Es ergeben sich eine weitgehend homogene, verarmte obere Hälfte und eine chemisch unveränderte untere Hälfte (vgl. 2.3.3).

Van Keken et al. (2001) versuchen mit geringem Erfolg, die beobachtete Diskrepanz zwischen Wärme- und Heliumabgabe der Erde (2.2.5) durch ein gekoppeltes Konvektions-Entgasungsmodell zu modellieren. Sie verwenden ein 2D axialsymmetrisches Modell mit realistischer Oberflächengeschwindigkeit, aber ohne Plattentektonik. Die Viskosität ist im unteren Mantel 100 mal höher als in der Asthenosphäre und es ergeben sich keine radialen Unterschiede in der Heterogenität.

Xie & Tackley (2003) untersuchen die Evolution von Edelgasen im Zweikomponentensystem aus Mantel und ozeanischer Kruste in 2D sphärischer Geometrie. Berücksichtigt werden die Heiznuklide  $^{238}\text{U}$ ,  $^{235}\text{U}$ ,  $^{232}\text{Th}$  und  $^{40}\text{K}$ , die Zerfallsprodukte  $^4\text{He}$  und  $^{40}\text{Ar}$  sowie die

### *2.3. Vereinigung geophysikalischer und geochemischer Modelle*

primordialen Isotope  $^3\text{He}$  und  $^{36}\text{Ar}$ . Sobald partielle Schmelze auftritt, findet eine Differenziation entsprechend den Verteilungskoeffizienten dieser inkompatiblen Elemente statt. Der Schmelzanteil wird instantan der Kruste hinzugefügt. Die räumliche Verteilung der Heiznuklide und unterschiedliche Dichten von (rezyklierter) Kruste und Residuum beeinflussen die Konvektion. Am Ende der Rechnung ist der Mantel zu 50 % an  $^{40}\text{Ar}$  und zu  $\sim 90$  % an nicht-radiogenen Isotopen entgast. In zwei Fällen ergeben sich hohe (OIB) und niedrige (MORB)  $R_a$ -Werte nebeneinander. Im ersten Fall ist U kompatibler als He und dichte, subduzierte Kruste sammelt sich über der CMB. Die höchsten  $R_a$ -Werte werden in primordialem Material erreicht, die niedrigsten im verarmten Residuum des oberen Mantels. Im zweiten Fall sind U und He gleich inkompatibel und rezyklierte Kruste wird wieder im oberen Mantel verrührt. Hohe  $R_a$ -Werte treten im Residuum und im primordialen Material auf, niedrige werden durch den Zerfall von U der rezyklierten Kruste im oberen Mantel erzeugt. Mit genaueren Werten für He-Verteilungskoeffizienten und die Dichte rezyklierter Kruste an der CMB ließe sich diese Mehrdeutigkeit eingrenzen. Die Heterogenität in den Modellen wird nicht extra untersucht, es scheint aber keinen homogenen oberen Mantel zu geben. Der vorliegende Aufsatz ist eine Vorarbeit für ähnliche Studien in 3D sphärischer Geometrie, zusätzlich mit Kontinentbildung, realistischeren Viskositätsverteilungen und weiteren Isotopensystemen.

### 3. Berechnung thermischer Konvektion mit TERRA

#### 3.1. Physikalische Grundlagen

Das Prinzip der thermischen Konvektion wurde für den Erdmantel erstmals von Schwinner (1919) postuliert: „Das Material der tieferen Zone der Tektonosphäre reagiert auf kurzperiodische Impulse elastisch, auf dauernde Beanspruchung durch Fließen. Je kürzer die einseitige Beanspruchung dauert, desto besser passen die Bilder der Elastizitätstheorie, je länger, desto besser die der Hydrodynamik. ... bietet die tiefere Zone anscheinend die Bedingungen, unter denen ganz wie in der Troposphäre, im Gefolge der Energieströmung, durch Umwandlung von Wärme in Bewegungsenergie auch eine materielle Strömung entstehen kann. ... man geht von einer instabilen Schichtung in der vertikalen Flüssigkeitssäule aus und hat als deren unmittelbare Folge die vertikalen Konvektionsströmungen“.

Die Erde kann als nahezu geschlossenes thermodynamisches System im Nichtgleichgewicht betrachtet werden. Wärme erreicht die Erdoberfläche aus dem Erdinneren und von der Sonne. Dabei hat wahrscheinlich immer die Solarstrahlung dominiert, heute mit  $400 \text{ W/m}^2$  (Fowler, 1990) gegenüber  $87 \text{ mW/m}^2$  (Pollack et al., 1993). Sie dringt aber nur wenige Meter in die Erde ein (Fowler, 1990) und ihre Dissipation treibt lediglich Prozesse nahe der Erdoberfläche an. Die Evolution des Erdinneren wird durch folgende Energiequellen bestimmt: Reste der Akkretionsenergie, potenzielle Energie der Differenziation in Erdkern, -mantel und kontinentale Kruste, Energie, die beim Zerfall radioaktiver Isotope freigesetzt wird, latente Wärme des ausfrierenden Innenkerns, Minderung der Bahn- und Rotationsenergie durch Gezeitenreibung. Diese Wärme wird durch Konvektion und Konduktion zur Oberfläche transportiert und schließlich in den Weltraum abgestrahlt. Wärmetransport kann mathematisch durch die Erhaltungsgleichungen für Impuls, Masse und Energie beschrieben werden. Weiterhin werden ein Stoffgesetz, eine Zustandsgleichung sowie Anfangs- und Randbedingungen gebraucht.

##### 3.1.1. Grundgleichungen

Die in dieser Arbeit vorgestellten Konvektionsmodelle sind Variationen der in Walzer et al. (2003a,b) veröffentlichten. Der folgende Abschnitt basiert auf Walzer et al. (2003b), die ursprüngliche Formulierung in TERRA geht auf Jarvis & McKenzie (1980) zurück. Eine umfangreichere Einführung in den Themenkreis geben z.B. Schubert et al. (2001).

Aus der bekannten Gleichung der Energieerhaltung

$$(3.1-1) \quad \rho c_p \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (k_m \nabla T) + Q + \alpha T \frac{dp}{dt} + 2W_D$$

läßt sich folgende Formel herleiten, die in TERRA verwendet wird:

$$(3.1-2) \quad \frac{dT}{dt} = -\frac{\partial(Tv_j)}{\partial x_j} - (\gamma - 1)T \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho c_v} \left[ \tau_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k_m \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \rho H \right].$$

Dabei ist der Spannungstensor

$$(3.1-3) \quad \tau_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \delta_{ik} \right).$$

Die spezifische Wärmeleistung beschreibt die Heizung des Mantels von innen durch den Zerfall der radioaktiven Isotope  $^{40}\text{K}$ ,  $^{242}\text{Th}$ ,  $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$ . Sie ist räumlich homogen aber zeitabhängig.

### 3.1. Physikalische Grundlagen

$$(3.1-4) \quad H = \sum_{\nu=1}^4 a_{\mu\nu} a_{ij\nu} H_{0\nu} \exp\left[\frac{-t}{\tau_{\nu}}\right].$$

Neben dem Quellterm  $\rho H$  kann zusätzlich ein Term in (3.1-2) aufgenommen werden, der den Wärmeverlust infolge von Vulkanismus beschreibt:

$$(3.1-5) \quad \rho \cdot H_{cool} = \rho \cdot c_v \cdot \frac{d(T - T_m)}{dt}$$

Dieser Term wirkt nur dort, wo die Temperatur über der Schmelztemperatur liegt. Er kann in TERRA auf bestimmte Manteltiefen beschränkt oder auch ganz vernachlässigt werden.

In der Zustandsgleichung

$$(3.1-6) \quad \rho = \rho_r \left[ 1 - \alpha(T - T_r) + \frac{P - P_r}{K_T} \right]$$

sind die Dichtesprünge an den Phasengrenzen des Mantels im aus PREM (Dziewonski & Anderson, 1981) gewonnenen Dichteprofil  $\rho_r(r)$  bereits enthalten.

Die Prandtl-Zahl ( $Pr \sim \eta/\rho\kappa$ ) der Konvektion im Erdmantel ist sehr hoch und kann durch  $Pr \rightarrow \infty$  genähert werden. Damit ergibt sich folgende Gleichung der Impulserhaltung:

$$(3.1-7) \quad 0 = -\frac{\partial}{\partial x_i}(P - P_r) + (\rho - \rho_r)g_i + \frac{\partial}{\partial x_k}\tau_{ik}$$

Der Betrag der Schwerebeschleunigung  $\bar{g}$  hängt nur vom Radius ab.

In der Kontinuitätsgleichung

$$(3.1-8) \quad 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{v})$$

kann die Zeitableitung wegen der langsamen Bewegungen im Mantel vernachlässigt werden (anelastic liquid approximation) und es folgt für die Massenerhaltung:

$$(3.1-9) \quad 0 = \frac{\partial}{\partial x_j} \rho v_j$$

Der Erdmantel wird also als kompressibles Medium betrachtet.

Aus dem System der sechs skalaren Gleichungen (3.1-2), (3.1-6), (3.1-7) und (3.1-9) können an jedem Punkt des Rechengebietes die skalaren Unbekannten  $T$ ,  $P$ ,  $\rho$  und die drei Komponenten von  $\bar{v}$  bestimmt werden.

#### 3.1.2. Randbedingungen

Das Rechengebiet ist eine dicke Kugelschale, die den silikatischen Teil der Erde darstellen soll. Wegen der geringen Viskosität des äußeren Kerns und der Atmosphäre sind die Innen- und die Außengrenze des Rechengebietes scherspannungsfrei. Die Temperatur an der Erdoberfläche läßt seit mindestens 3,8 Milliarden Jahren die Existenz von flüssigem Wasser zu. Die Ursache dafür sind vermutlich Rückkopplungsmechanismen, die mit dem Kohlenstoffzyklus und dem Leben zusammenhängen. Laterale, insbesondere breitenabhängige Temperaturunterschiede an der Erdoberfläche werden vernachlässigt. Die solar verursachten Schwankungen dringen nur wenig in die Erde ein, werden durch Meeresströmungen gedämpft und sollten kaum Einfluß auf die Konvektion im Mantel haben. Die Temperatur an der Außengrenze des Rechengebietes wird deshalb räumlich und zeitlich konstant auf der heutigen mittleren Oberflächentemperatur gehalten. Es werden also keine mechanischen oder thermischen Bedingungen vorgegeben, die zur beobachteten lateralen Struktur der heutigen Erde korrespondieren. Deshalb ist es unwahrscheinlich, dass ein Modell z.B. die Form der heutigen Lithosphärenplatten reproduziert. Vergleiche von Modellen und richtiger Erde sind nur über integrale Größen oder statistische Methoden sinnvoll.

Auf die thermische Randbedingung an der CMB wird in Kapitel 3.5 näher eingegangen.

### 3.1. Physikalische Grundlagen

#### 3.1.3. Anfangsbedingungen

Zuerst werden Referenzprofile aller benötigten Größen initialisiert (siehe auch Kapitel 3.2.3 und 5.1) und in lateraler Richtung dem gesamten Mantel zugeordnet. Bei den Modellen dieser Arbeit ist die Geschwindigkeit am Anfang überall Null. Wegen der fehlenden Trägheitsterme ( $Pr \rightarrow \infty$ ) hat die Vorgabe des Geschwindigkeitsfeldes aber bestenfalls numerische Bedeutung. Das Temperaturprofil startet bei konstanten 2000 K im gesamten Mantel mit einem graduellen Übergang zur Oberflächentemperatur nahe der Oberfläche und zur Kerntemperatur nahe der CMB. Wenn an der CMB anstelle der Temperatur der Wärmestrom vorgegeben ist, hat der gesamte untere Mantel am Anfang eine Temperatur von 2000 K. In neueren Modellen wird das Profil von Stacey (1992) vorgegeben. Allerdings kann in einem ruhenden, instabil geschichteten Medium vollkommener Symmetrie keine Konvektion beginnen. Deshalb werden dem radialsymmetrischen Temperaturfeld kleine laterale Störungen überlagert:

$$(3.1-10) \quad T(r, \vartheta, \varphi) = T_{av}(r) + T(\vartheta, \varphi) \cdot \cos \left[ \frac{\pi}{r_E - r_{CMB}} \cdot \left( r - \frac{r_E + r_{CMB}}{2} \right) \right]$$

mit

$$(3.1-11) \quad T(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=2}^{15} \sum_{m=1}^l 0,002 \cdot (-1)^m \cdot P_l^m(\cos \vartheta) \cdot [\cos(m\varphi) - \sin(m\varphi)]$$

Dabei ist  $P_l^m$  die zugeordnete Legendre-Funktion erster Art vom Grade  $l$  und der Ordnung  $m$  (Abramowitz & Stegun, 1972, p.332). In Kapitel 5 wird bei jedem Modell des Temperaturfeld am Ende des ersten Zeitschrittes dargestellt.

#### 3.1.4. Rheologie

In erster Näherung kann man davon ausgehen, dass die Konvektion im festen Erdmantel einer newtonschen Rheologie folgt. Das gilt insbesondere für den unteren Mantel und den tiefen oberen Mantel (Karato & Li, 1992; Karato & Wu, 1993; Li et al., 1996), wo Diffusions- gegenüber Versetzungskriechen vorherrscht. Bis vor kurzem wurden alle Modelle unserer Gruppe ausschließlich mit newtonscher Rheologie gerechnet (z.B. Walzer et al., 2003a, 2004a). Erläuterungen zur Einführung einer viskoplastischen Fließspannung folgen in Kapitel 3.4.

Für die Temperaturabhängigkeit der Viskosität gilt:

$$(3.1-12) \quad \eta = \eta_0 \exp \left[ \xi \frac{T_m}{T} \right]$$

mit der Konstante  $\xi = 17$  bei Diffusionskriechen (Karato et al., 2001). In TERRA kann die Viskosität innerhalb numerisch bedingter Grenzen temperatur- und damit orts- und zeitabhängig sein. In radialer Richtung sind Schwankungen über mehrere Größenordnungen erlaubt, in lateraler Richtung weniger. Deshalb wird ein Teil der Temperaturabhängigkeit in ein radiales Viskositätsprofil  $\eta_r$  gepackt und die laterale Abhängigkeit durch einen radial veränderlichen Dämpfungsfaktor  $c_i(r)$  begrenzt:

$$(3.1-13) \quad \eta(r, \vartheta, \varphi, t) = \eta_r(r) \cdot \exp \left[ c_i(r) \cdot T_m(r) \cdot \left( \frac{1}{T(r, \vartheta, \varphi, t)} - \frac{1}{T_{av}(r, t)} \right) \right]$$

Walzer et al. (2003b) leiten die Profile  $\eta_r(r)$  und  $T_m(r)$  über thermodynamische Beziehungen, den Grüneisenparameter, das lindemannsche Gesetz und einige festkörperphysikalische Überlegungen aus PREM (Dziewonski & Anderson, 1981) her. Ihre Methode ist unabhängig von geochemischen und detaillierten mineralogischen Annahmen. Von anderen Methoden, die die Viskosität über postglaziale Hebung, das Geoid, Freiluftanomalien oder seismische Tomographie bestimmen, wird lediglich ein Wert zur Eichung des Profils gebraucht. Walzer

### 3.1. Physikalische Grundlagen

et al. (2003b) nehmen den Haskell-Wert von  $\eta = 10^{21}$  Pas in der Asthenosphäre. Die Nutzung von PREM hat allerdings den Nachteil, dass die Ergebnisse streng genommen nur für den heutigen Mantel gelten. Insbesondere sind die heutige Temperatur- und Wasserverteilung im Mantel in  $\eta_r(r)$  und  $T_m(r)$  festgeschrieben. Beides war mit hoher Wahrscheinlichkeit früher anders und müßte bei Evolutionsrechnungen eigentlich zeitabhängig sein. Außerdem ist es unwahrscheinlich, dass die im Modell errechneten Temperaturen mit den tatsächlichen Manteltemperaturen übereinstimmen und somit zum Viskositätsprofil passen. Die dynamische Berechnung der Wasserverteilung und ihr Einfluß auf  $\eta$  und  $T_m$  fehlt hier und ist auch in anderen Mantelkonvektionsrechnungen noch nicht üblich. Im Vergleich mit anderen Arbeiten über globale Mantelkonvektion sind die Viskositätsmodelle von Walzer et al. (2003a,b, 2004a,b) gut begründet. Deshalb und um nicht in numerische Schwierigkeiten zu geraten, wird die Viskosität in den Modellen dieser Arbeit nach (3.1-10) behandelt – vorwiegend mit Profilen von Walzer et al. (2003a, 2003b) und Variationen davon. Die wesentlichsten Eigenschaften des bevorzugten Viskositätsprofils sind niedrigviskose Schichten ober- und unterhalb einer hochviskosen Übergangszone, ein steifer mittlerer und unterer Teil des unteren Mantels und eine starke Aufweichung nahe der CMB.

#### 3.1.5. Rayleigh- und Nusselt-Zahl

Die dimensionslose Rayleigh-Zahl ( $Ra$ ) ist das Verhältnis von konvektionsfördernden zu konvektionshemmenden Größen. Sie charakterisiert die Art des Wärmetransports. Bei niedrigen Rayleigh-Zahlen dominiert Wärmeleitung, ab einem kritischen Wert ( $Ra > 1000$ ) ist konvektiver Wärmetransport wahrscheinlich und ab  $Ra \approx 10^5$  dominiert die Advektion. Für den Erdmantel wird  $Ra \approx 10^6 - 10^8$  angenommen. Im einfachen Fall einer isoviskosen, von unten geheizten Flüssigkeit in kartesischer Geometrie gilt

$$(3.1-14) \quad Ra = \frac{\rho \alpha g h^3}{\kappa \eta} \Delta T \quad ,$$

wobei  $\Delta T$  die Temperaturdifferenz zwischen unterer und oberer Grenzfläche ist. Bei den hier vorgestellten Modellen muß zusätzlich die Geometrie, räumlich variable Parameter und Heizung von innen berücksichtigt werden (Walzer, Notiz X596c):

$$(3.1-15) \quad Ra = \left\langle \frac{\rho^2 \alpha g (r_E - r_{CMB})^4 c_p [\rho (r_E - r_{CMB}) H + q_{CMB}]}{k_m^2 \eta} \right\rangle_{r, \vartheta, \varphi}$$

Die Mittelwertbildung berücksichtigt die kugelschalige Geometrie durch Wichtung mit dem Volumen der jeweiligen radialen Schale. Der Mittelwert einer nur radial abhängigen Funktion  $f = f(r)$  wird wie folgt gebildet:

$$(3.1-16) \quad \langle f \rangle_r = \int_0^1 f(r) dr \quad \text{mit} \quad r = \frac{r - r_{CMB}}{r_E - r_{CMB}}$$

Für die Viskosität gilt speziell:

$$(3.1-17) \quad \log \langle \eta \rangle_r = \int_0^1 \log[\eta_r(r)] dr$$

Bei Evolutionsrechnungen ist die Rayleighzahl prinzipiell zeitabhängig ( $Ra = Ra(t) \equiv Ra_T$ ). In komplexen Systemen mit starken Variationen der Rheologie und anderer Parameter ist sie allerdings nur begrenzt aussagekräftig. Es gibt auch keine entsprechenden Beobachtungen, die einen Vergleich mit der Erde erlauben würden. In dieser Arbeit wird die mittlere Plattengeschwindigkeit an der Oberfläche zum Vergleich der Heftigkeit von Konvektion in numerischen Modellen mit der in der realen Erde vorgeschlagen (2.2.1). Zusammen mit der zeitlichen Entwicklung der Tiefenverteilung der kinetischen Energie ergibt sich ein brauchbares Bild der Konvektionsheftigkeit.  $Ra$  wird nur der Vollständigkeit halber bei jedem

### 3.1. Physikalische Grundlagen

Modell mit angegeben und um Vergleiche mit parametrisierten oder entdimensionalisierten Modellen zu erleichtern.

Die dimensionslose Nusselt-Zahl ( $Nu$ ) ist das Verhältnis von Gesamtwärmestrom zu Wärmeleitung und damit ein Maß für die Effizienz des Wärmetransportes (Yang, 1997):

$$(3.1-17) \quad Nu = \frac{\left( H \langle \rho \rangle_r + \frac{q_{CMB}}{(r_E - r_{CMB})} \right) r_E^2 \left[ 1 - 3 \left( \frac{r_{CMB}}{r_E} \right)^2 + 2 \left( \frac{r_{CMB}}{r_E} \right)^3 \right]}{6 \langle k_m \rangle_r \left( \langle T_{CMB} \rangle_{g,\varphi} - \langle T_E \rangle_{g,\varphi} \right)}$$

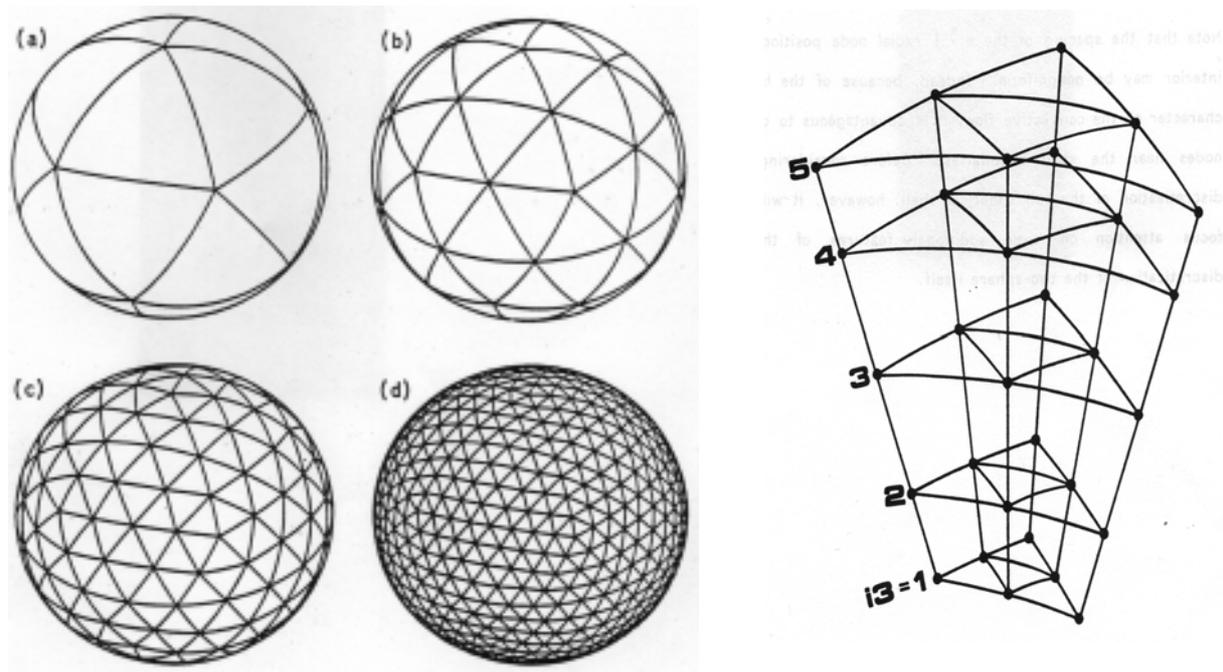
Bei Evolutionsrechnungen ist wenigstens  $H$ , manchmal auch  $q_{CMB}$  und  $T_{CMB}$  zeitabhängig - und damit auch die Nusselt-Zahl ( $Nu = Nu(t) \equiv Nu_T$ ).

### 3.2. Numerik

Das im vorhergehenden Kapitel beschriebene Gleichungssystem aus (3.1-2), (3.1-5), (3.1-6) und (3.1-8) wird mit dem FORTRAN-Programm TERRA (Baumgardner, 1983, 1985; Bunge & Baumgardner, 1995; Yang, 1997) numerisch gelöst.

#### 3.2.1. Gitter

Das den Erdmantel darstellende Rechengebiet ist eine dicke Kugelschale. Diese wird durch die Zentralprojektion eines im Mittelpunkt liegenden regulären Ikosaeders auf die umgebenden Kugelflächen diskretisiert (Baumgardner & Frederickson, 1985). Durch sukzessive dyadische Unterteilung der Seitenflächen aller Dreiecke und die jeweilige Einführung neuer Mittelpunkte erreicht man eine fast gleichmäßige Unterteilung der Kugelfläche (Abb. 3.2-1). Die Anzahl der radialen Schalen ist durch die laterale Auflösung bestimmt. Ihre Abstände können verschieden sein. Aus Gründen der numerischen Stabilität sollten radiale und laterale Dimension jeder Gitterzelle etwa gleich sein (Yang, 1997). Prinzipiell könnte für jedes Modell ein anderer Kompromiss zwischen geophysikalisch gewünschter und numerisch machbarer radialer Gitterstruktur gefunden werden. Das Gitter ist nicht adaptiv – es wird am Anfang jeder Rechnung festgelegt und dann beibehalten.



**Abb. 3.2-1:** Erste dyadische Verfeinerungen des auf die Kugelfläche projizierten Ikosaeders (a). Bild (d) entspricht einer Gitterweite von etwa 800 km an der Erdoberfläche. Bei jedem Verfeinerungsschritt ändert sich die Gitterweite um den Faktor 2. Die Auflösung der Modelle dieser Arbeit liegt in der Größenordnung von 100 km in radialer und lateraler Richtung und ist hier nicht dargestellt. Das rechte Bild zeigt die radiale Gitterstruktur.

#### 3.2.2. Erhaltungsgleichungen

Die Gleichungen der Massen- und Impulserhaltung sind durch galerkinsche finite Elemente mit linearen Basisfunktionen diskretisiert. Radiale und tangential Anteile der verschiedenen Operatoren werden getrennt behandelt. Die Lösung aller Gleichungen innerhalb eines Rechengebietes nach  $P$  und  $\vec{v}$  erfolgt simultan zu jedem Zeitschritt mit einer modifizierten Variante des Algorithmus von Ramage & Walthan (1992). Bei kompressiblen Modellen wird der Druck iterativ korrigiert. Der Löser basiert auf einer elliptischen Multigrid-Methode. Der

## 3.2. Numerik

Transfer zwischen den verschiedenen Gitterdarstellungen ist dabei matrixabhängig (Reusken, 1993). Sowohl die Prolongations- und Restriktionsoperationen als auch die Operatoren der größeren Gitter sind von den Operatoren des feinen Gitters abhängig. Der Einbau des matrixabhängigen Transfers und die Galerkin-Näherung für grobe Gitter sind hauptverantwortlich für die Stabilität des Löser gegenüber Viskositätsschwankungen (Yang & Baumgardner, 1999). Der Multigrid-Algorithmus ist sehr effizient. Die Rechenzeit erhöht sich nur etwa linear mit der Anzahl der Gitterpunkte und der Speicherbedarf ist moderat.

Ein Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung löst die Energiegleichung in expliziten Zeitschritten. Dabei wird die rechte Seite von Gleichung (3.1-2) mit einem iterativen, multidimensionalen, positiv-definiten Advektions-Transport-Algorithmus, MPDATA (Smolarkiewicz, 1984), berechnet. Diese Behandlung von Strömung und Wärmeleitung über die jeweiligen Zellengrenzen stellt eine Mischung aus den Methoden der finiten Differenzen und der finiten Volumina dar.

### 3.2.3. Zustandsgleichung

Am Anfang einer Rechnung werden Referenzprofile von Temperatur, Druck, Dichte und weiterer radial veränderlicher Größen initialisiert. Diese können mit Birch-Murnaghan- oder Morse-Zustandsgleichungen (teilweise iterativ) berechnet oder aus PREM gewonnen<sup>1)</sup> und direkt vorgegeben werden. In dieser Arbeit habe ich letztere Methode von Walzer et al. (2003a) übernommen. Die Referenzprofile ändern sich im Laufe der Rechnung nicht. Entsprechend (3.1-6) sind innerhalb jeder Gitterschale lediglich Variationen um den jeweiligen Referenzwert zugelassen. Druck- und Temperaturschwankungen werden linear in Dichteunterschiede umgerechnet. Die aktuellen Profile lateral gemittelter Werte sind – mit Ausnahme des Viskositätsprofils – zeitabhängig. Aus numerischen Gründen darf sich die Viskosität zwischen benachbarten Gitterpunkten einer Schale nur um den Faktor 5 ändern. Alle darüber hinausgehenden, physikalisch geforderten Änderungen werden ohne Warnung abgeschnitten.

### 3.2.4. Parallelisierung

TERRA ist durch eine zweidimensionale Gebietszerlegung in lateraler Richtung parallelisiert. Paare der ursprünglichen Ikosaederseiten ergeben Abbildungen von 10 Rauten auf der Kugelfläche. Jeder Prozessor bekommt gleich große Gebiete in 5 oder 10 Rauten zugewiesen (Abb. 3.2-2). Alle in radialer Richtung unter einem solchen Gebiet liegenden Bereiche gehören auch zu dem jeweiligen Prozessor (Abb. 3.2-1). Diese Aufteilung minimiert zwar nicht die Gebietsgrenzen, bietet sich aber zur Parallelisierung der Multigrid-Methode an (Bunge & Baumgardner, 1995).

Die Kommunikation zwischen den Prozessoren erfolgt explizit über MPI (Message Passing Interface). Auf T3E werden auch die crayspezifischen shmem-Routinen genutzt. Die parallele Effizienz liegt über 85 % (Bunge & Baumgardner, 1995). Tabelle (3.2-I) faßt die möglichen Gitterparameter und den Speicherbedarf von TERRA ohne Markermodul zusammen. Dabei ist  $mt$  die Anzahl der Unterteilungen einer ursprünglichen Ikosaederkante und  $nt$  die die Anzahl der Unterteilungen einer Kante des einem Prozessor zugeordneten Teilgebietes.  $nd$  gibt die Anzahl der Rauten an, an denen jeweils ein Prozessor beteiligt ist. Die Anzahl der benötigten Prozessoren ergibt sich aus:

$$(3.2.-1) \quad n_{proc} = \left( \frac{mt}{nt} \right)^2 \cdot \frac{10}{nd}$$

---

<sup>1)</sup> dabei wurde eine Birch-Murnaghan-Gleichung 3. Ordnung verwendet

### 3.2. Numerik

Die Anzahl der radialen Unterteilungen ( $nr$ ) kann  $mt$ ,  $mt/2$  oder  $mt/4$  sein. Hier wird  $nr=mt/2$  verwendet, da für diesen Fall die größte numerische Stabilität zu erwarten ist. Aus der Gesamtzahl der Gitterpunkte

$$(3.2-2) \quad ngrp = (mt + 1)^2 \cdot 10 \cdot (nr + 1)$$

folgt eine Anzahl von

$$(3.2-3) \quad ngpp = (nt + 1)^2 \cdot nd \cdot (nr + 1)$$

Gitterpunkten pro Prozessor. Der Speicherbedarf liegt in der Größenordnung von 100 words je Gitterpunkt.

mt	nt	nd	nr	nproc	ngpp	Speicher pro Prozessor [MByte]	ngrp	Größenordnung der Gitterweite [km]			maximal auf- lösbarer Kugel- funktionsgrad $l_{max}$
								lateral oben	CMB	radial	
16	16	10	8	1	26010	20	26010	526,3	287,5	360	16
		5		2	13005	10					
	8	10		4	7290	6					
		5		8	3645	3					
32	32	10	16	1	185130	141	185130	263,3	143,9	180	34
		5		2	92565	70					
	16	10		4	49130	37					
		5		8	24565	18					
64	64	10	32	1	1394250	1064	1394250	131,7	71,9	90	68
		5		2	697125	532					
	32	10		4	359370	274					
		5		8	179685	137					
	16	10		16	95370	73					
		5		32	47685	36					
	8	10		64	26730	20					
		5		128	13365	10					
128	64	10	64	4	2746250	2095	10816650	65,8	36,0	45	137
		5		8	1373125	1048					
	32	10		16	707850	540					
		5		32	353925	270					
	16	10		64	187850	143					
		5		128	93925	72					
	8	10		256	52650	40					
		5		512	26325	20					
256	32	10	128	64	1404810	1072	85203210	32,9	18,0	23	275
		5		128	702405	536					
	16	10		256	372810	284					
		5		512	186405	142					
512	32	5	256	512	1399365	1068	676344330	16,5	9,0	11	551

**Tab. (3.2-1):** Mögliche Gitterparameter in TERRA für  $nr=mt/2$ . Der Speicherbedarf ist ohne Markermodul gerechnet und gilt für Cray T3E: 1 word = 64 bit = 8 Byte. Die Gitterweiten und  $l_{max}$  stammen aus Yang (1997).

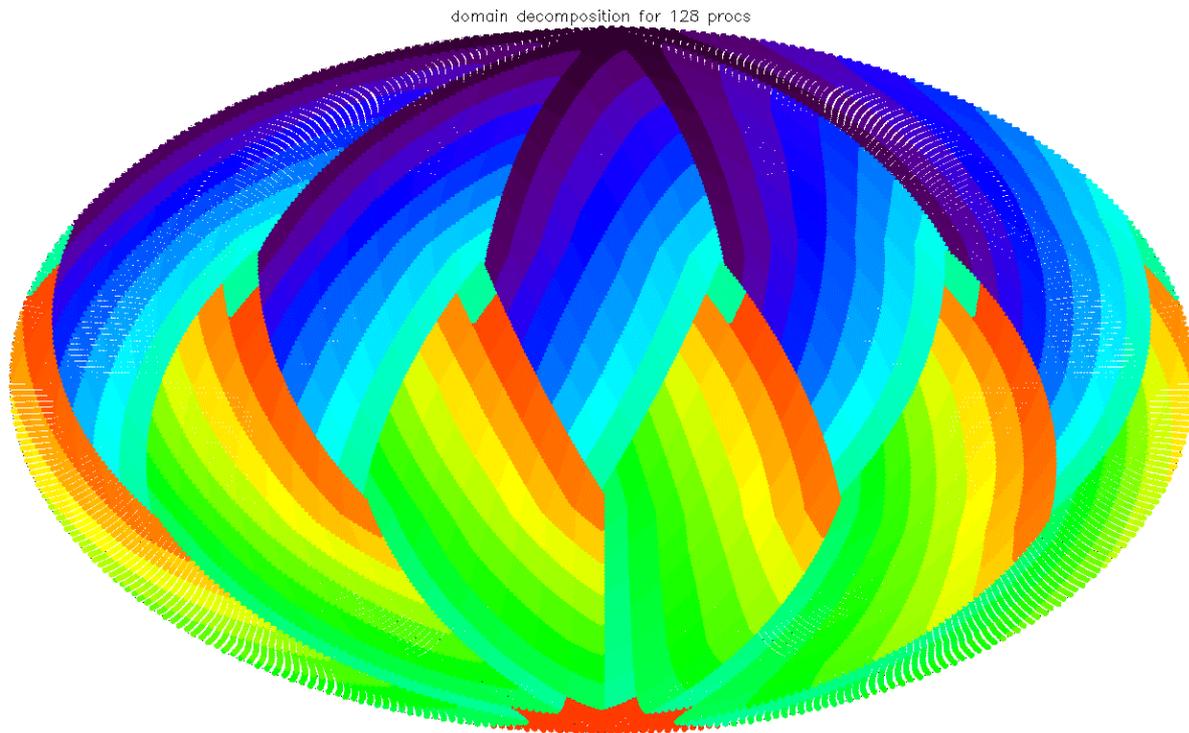
#### 3.2.5. Hardware

Für alle TERRA-Rechnungen dieser Arbeit wurden die Parallelrechner Cray T3E 600 und 1200 des John von Neumann Instituts für Computing (NIC) am Forschungszentrum Jülich benutzt. Die Gitterauflösung ist immer  $mt=64$ . Auf der T3E 1200 wurden jeweils 32 Prozessoren genutzt, auf der T3E 600 waren es 128. Auf T3E 600 brauchen die 6000 Zeitschritte eines durchschnittlichen Laufes etwa 8 Stunden. Da das Warteschlangensystem nur Jobs von 4 Stunden erlaubt, mußte bei allen Programmänderungen die Möglichkeit von Fortsetzungsläufen beachtet werden. Testrechnungen wurden auch auf der T3E der

### 3.2. Numerik

Technischen Universität Dresden und der SD64000 des Rechenzentrums der Universität Jena durchgeführt.

Die Auswertung der Konvektionsrechnungen erfolgte mit dem kommerziellen Programmpaket IDL (Interactive Data Language; <http://www.rsinc.com>) in verschiedenen Versionen, vorwiegend mit IDL 5.2. IDL arbeitet nicht parallel. Die meisten IDL-Programme benötigen bei den gegebenen Feldgrößen mindestens 256 MByte Hauptspeicher, manche auch 512 MByte. Ein normaler PC mit 1,4 GHz Prozessortakt und großer Festplatte hat sich hier als günstig erwiesen. Verschiedene IBM-RS6000-Workstations und die SD64000 arbeiten langsamer, bestenfalls proportional zur niedrigeren Taktfrequenz.



**Abb. (3.2-2):** Aufteilung der Kugel­fläche unter 128 Prozessoren bei  $nd=5$  und  $mt=64$ . Jeder Gitterpunkt wurde in der flächentreuen Projektion (Hammer-Aitoff) durch einen farbigen Punkt markiert. Jede Farbe entspricht einem anderen Prozessor.

#### 3.2.6. Progammtests

Einzelne Teile von TERRA wurden von Baumgardner (1983) auf innere Konsistenz getestet oder mit analytischen Lösungen verglichen. Da es für das gesamte Gleichungssystem der Konvektion in einer Kugelschale keine analytischen Lösungen gibt, kann die Plausibilität der numerischen Ergebnisse nur anhand von Benchmark-Tests beurteilt werden. Bunge et al. (1995, 1997) haben numerische Lösungen für Konvektion bei konstanter Viskosität mit den Ergebnissen von Glatzmaier (1988) verglichen. Die Abweichungen der Nusselt-Zahlen, Spitzengeschwindigkeiten und höchsten Temperaturen waren  $\leq 1,5\%$ .

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine Rechnung versuchsweise wiederholt (Modell 628: Abschnitt 3.4.4 und Anhang 1). Die Ergebnisse ließen sich nur prinzipiell -aber nicht exakt- reproduzieren. Vermutlich reagiert die stark nichtlineare Rheologie dieses Modells empfindlich auf kleine numerische Unterschiede. Diese treten immer auf. So kann z.B. die Aufteilung der einzelnen Rechengebiete auf die Prozessoren bei jedem Lauf unterschiedlich sein. Sie ist für den Nutzer nicht deterministisch. Dadurch entstehen unterschiedliche Abarbeitungsreihenfolgen, die zu leicht unterschiedlichen Ergebnissen führen. Diese kleinen Unterschiede können sich in stark nichtlinearen Systemen verstärken und die

### 3.2. Numerik

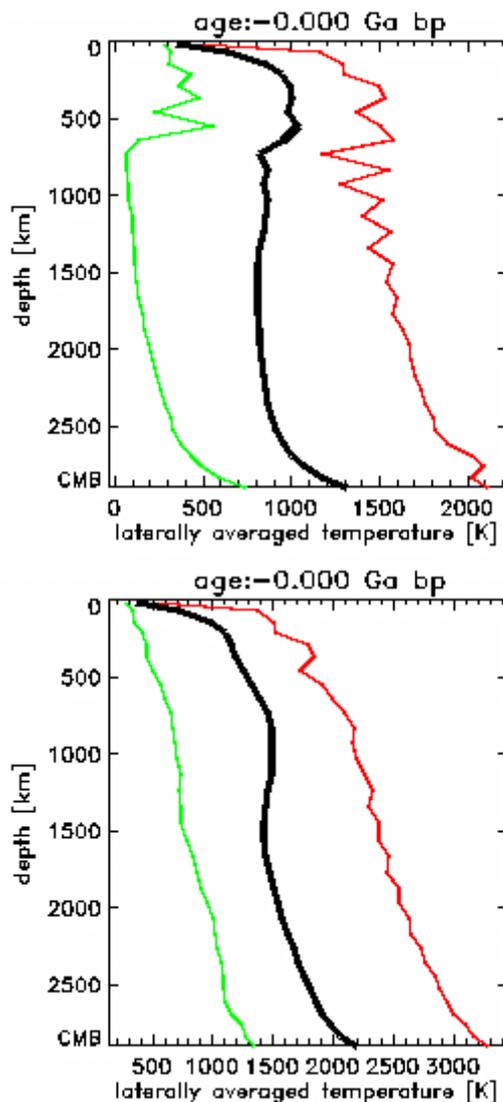
Reproduzierbarkeit von Ergebnissen beeinträchtigen. Eventuell lassen sich solche Effekte durch bessere Numerik reduzieren. Das würde aber auch nur zu einer Scheingenauigkeit führen, weil man dadurch lediglich willkürlich eine Lösung auswählt. Im Rahmen der möglichen Genauigkeit zur numerischen Darstellung des physikalischen Problems wären auch andere Lösungen möglich.

Die Abschätzung der Genauigkeit und Aussagekraft komplexer numerischer Simulationen ist ein allgemeines Problem. Eine Einführung und weiterführende Hinweise erhält man bei De Volder et al. (2002) und unter [http://www.bnl.gov/cdic/Sci\\_Projects/Computer\\_Sci/Uncert\\_Quant/uncert\\_quant.htm](http://www.bnl.gov/cdic/Sci_Projects/Computer_Sci/Uncert_Quant/uncert_quant.htm). Da es in dieser Arbeit (und in aktuellen Mantelkonvektionsmodellen überhaupt) eher um Prinziplösungen als um detaillierte Vergleiche mit der realen Erde geht, wurden keine weiteren Fehlerabschätzungen durchgeführt. Bei der Interpretation von Modellen ist also stets eine gewisse Vorsicht angebracht.

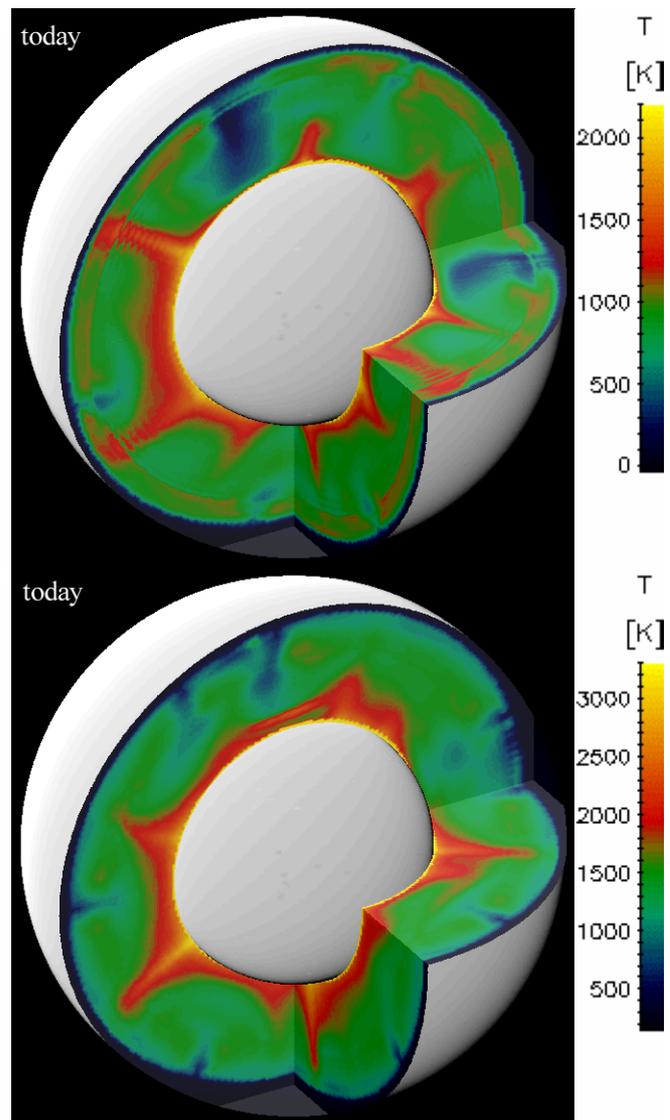
### 3.3. Programmänderung: Phasengrenzen

#### 3.3.1. Motivation

Bei der Entwicklung der in Walzer et al. (2003a) vorgestellten Programmvariante fiel mir im Frühjahr 2003 auf, dass minimale Temperaturwerte nahe dem absoluten Nullpunkt vorkommen. Manchmal lagen sie sogar darunter. Nach der Fertigstellung von Grafikprogrammen zur Darstellung von 3D Schnitten des Temperaturfeldes wurde deutlich, dass besonders im oberen Mantel unterhalb 410 km Tiefe physikalisch nicht begründete Temperaturanomalien auftreten (Abb. 3.3-1). Da in diesem Bereich die beiden in TERRA berücksichtigten Phasenübergänge von Olivin zu  $\beta$ -Spinell (410 km Tiefe) und  $\gamma$ -Spinell zu Perowskit (660 km Tiefe) liegen, mußte ein Problem mit deren Implementierung vermutet werden.



**Abb. 3.3-1:** Temperaturprofil am Ende einer Rechnung mit fehlerhafter Implementierung der Phasengrenzen (oben) und nach erfolgter Korrektur (unten). Die grüne und die rote Kurve stellen die Minimal- und die Maximaltemperatur in der jeweiligen Schale dar, die schwarze den lateral gemittelten Wert.



**Abb. 3.3-2:** Temperaturverteilung am Ende je einer Rechnung mit fehlerhafter (oben) und korrigierter (unten) Implementierung der Phasengrenzen. Ansonsten sind beide Modelle identisch.

### 3.3. Programmänderung: Phasengrenzen

#### 3.3.2. Behandlung der Phasengrenzen in TERRA

Zur Suche des Fehlers musste die Art der Implementierung der Phasengrenzen aus dem Quellcode herausgelesen werden. Das war aufwendig und wird deshalb hier für künftige Eingriffe in TERRA dokumentiert.

An den Phasenübergängen im Mantel erhöht sich mit der Tiefe die Dichte des Materials wesentlich stärker als durch die Zustandsgleichung eines homogenen Mediums gefordert wäre. Außerdem wird bei exothermen Übergängen latente Wärme freigesetzt und bei endothermen Übergängen aufgenommen. In Abtauchzonen ist der Übergang von Olivin zu  $\beta$ -Spinell exotherm und der von  $\gamma$ -Spinell zu Perowskit endotherm. Die Tiefe eines Phasenüberganges ist durch Druck und Temperatur festgelegt, sein dynamisches Verhalten durch die Clapeyron-Neigung:

$$(3.3-1) \quad \Gamma = \frac{dP}{dT}$$

Sie ist beim Übergang zu  $\beta$ -Spinell positiv und beim Übergang zu Perowskit negativ.

#### Ausbeulung der Phasengrenzflächen durch Advektion lateraler Temperaturunterschiede:

Durch laterale Temperaturunterschiede ist die Phasengrenzfläche von Olivin in kalten Gebieten nach oben ausgebeult. Dadurch ist dichtes Material von weniger dichtem umgeben und erfährt einen zusätzlichen Abtrieb. Der Übergang zu Perowskit wird in kalten Abtauchzonen nach unten verschoben und der resultierende Auftrieb wirkt der Abwärtsbewegung entgegen. Diese Folgen der Ausbeulung der Phasengrenzflächen sind im Erdmantel die dominierenden dynamischen Wirkungen der Phasenübergänge (Schubert et al., 2001). Die Ausbeulung liegt in der Größenordnung der radialen Gitterauflösung. Sie kann deshalb nicht direkt modelliert werden und der Auf- oder Abtrieb wird entsprechend Turcotte & Schubert (2002) wie folgt abgeschätzt:

$$(3.3-2) \quad \frac{dP}{dr} = \rho \cdot g$$

Aus der Division von (3.3-1) durch diese hydrostatische Grundgleichung folgt:

$$(3.3-3) \quad \frac{dr}{dT} = \frac{\gamma}{\rho g}$$

Die Tiefe der Phasengrenzfläche sei über einer Fläche  $A$  um  $\Delta r$  gegenüber dem mittleren Radius der Phasengrenzfläche versetzt. Der an dem unter- oder oberhalb der mittleren Fläche liegenden Volumen  $V$  angreifende, zusätzliche Auf- oder Abtrieb ist dann:

$$(3.3-4) \quad F_B = \Delta\rho \cdot V \cdot g = \Delta\rho \cdot A \cdot \Delta r \cdot g$$

Nach Integration von (3.3-3) kann man  $\Delta r$  ersetzen und erhält die in TERRA verwendete Form:

$$(3.3-5) \quad F_B = \Gamma \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot A \cdot \Delta T \quad \text{mit } \rho_{oben} - \rho_{unten} = \Delta\rho \ll \rho \approx \rho_{oben} \approx \rho_{unten}$$

Mit der entsprechenden geometrischen Wichtung wirkt  $F_B$  zusätzlich zu den sich aus (3.1-6) ergebenden Kräften an den über und unter der Phasengrenze liegenden Gitterschalen. Die Temperaturabhängigkeit der Clapeyron-Neigung (Hirose, 2002) wird noch nicht berücksichtigt. Diese würde sich nach aller Voraussicht kaum auf die Subduktion kühler Mantelbereiche auswirken, wohl aber auf den Aufstieg heißer Massen im Mantel.

#### Ausbeulung der Phasengrenzflächen durch Abgabe oder Aufnahme latenter Wärme:

Die zweite Wirkung von Phasenübergängen im Mantel beruht auf Temperaturänderungen durch Aufnahme oder Abgabe latenter Wärme. Dies verursacht auch eine Ausbeulung der Phasengrenzflächen. Beim exothermen Übergang in 410 km Tiefe in Abtauchzonen wird die durch Advektion entstandene Ausbeulung vermindert, beim endothermen Übergang in 660

### 3.3. Programmänderung: Phasengrenzen

km Tiefe wird die ursprüngliche Ausbeulung noch verstärkt. In beiden Tiefen behindert die latente Wärme kalte Abströme und warme Aufströme.

In TERRA ist die latente Wärme durch einen zusätzlichen Term in der Energiegleichung berücksichtigt. Es wird davon ausgegangen, dass zwischen beiden Phasen mechanisches und thermisches Gleichgewicht herrscht. Deshalb muß die freie Enthalpie  $E_f$  stetig übergehen:

$$(3.3-6) \quad (\delta E_f)_{p,T} = 0$$

Unter Berücksichtigung der Potentialeigenschaften von  $E_f$  folgt daraus (Kluge & Neugebauer, 1994) die Clausius-Clapeyron-Formel für den Übergang von Phase 1 in Phase 2:

$$(3.3-7) \quad \Gamma = \frac{dp}{dT} = \frac{S_2 - S_1}{V_2 - V_1} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{E_{latent}}{\Delta V \cdot T}$$

mit der Umwandlungswärme

$$(3.3-8) \quad T\Delta S = E_{12} \equiv E_{latent}$$

Das je Zeitschritt über oder unter der Fläche  $A$  umgewandelte Volumen  $V$  ergibt sich aus der radialen Strömungsgeschwindigkeit:

$$(3.3-9) \quad V = v_r \cdot \Delta t \cdot A$$

Die Volumenänderung ist:

$$(3.3-10) \quad \Delta V = \frac{M}{\rho_1} - \frac{M}{\rho_2} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)M}{\rho_1 \rho_2} \approx \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho} \cdot \frac{M}{\rho} = \frac{\Delta \rho}{\rho} \cdot V$$

Die in TERRA verwendete Formel für die pro Zeitschritt aufgenommene oder abgegebene latente Wärme folgt aus (3.3-7) und (3.3-10):

$$(3.3-11) \quad E_{latent} = T \cdot \frac{\Delta \rho}{\rho} \cdot \Gamma \cdot V$$

$E_{latent}/V\Delta t$  kommt mit der entsprechenden geometrischen Wichtung an den Gitterschalen ober- und unterhalb der Phasengrenzen als Quellterm zur Energiegleichung (3.1-2) hinzu. Aufgrund unterschiedlicher radialer Strömungsgeschwindigkeiten werden lateral verschiedene Temperaturänderungen bewirkt. Diese gehen dann in die Kräfteberechnung (3.3-5) mit ein.

Neben der Umwandlungswärme muß noch die mit der Volumenänderung verbundene Volumenarbeit in der Energiebilanz beachtet werden:

$$(3.3-12) \quad \Delta U = E_{latent} - p\Delta V$$

Wenn die Sprünge an den Phasengrenzen im Dichteprofil berücksichtigt sind, dann gehen sie analog zur allgemeinen Kompressibilität in die Energiegleichung ein und werden automatisch berücksichtigt. Im Falle eines Dichteprofiles ohne Phasenübergänge läßt sich deren Effekt nachträglich durch explizite Anwendung von (3.3-12) simulieren.

In der bis Mitte 2003 verwendeten TERRA-Version wurde die Volumenarbeit durch Sprünge im aus PREM gewonnenen Dichteprofil und zusätzlich explizit berücksichtigt. Dieser Fehler wurde korrigiert. Sofern nichts anderes angegeben ist, basieren die Modelle dieser Arbeit auf der neuen Programmversion. Leider konnte nur ein Teil der vorher gemachten Rechnungen wiederholt werden.

#### Thermische Ausdehnung oder Kontraktion durch Abgabe oder Aufnahme latenter Wärme:

Dieser kleine Effekt behindert kalte Ab- und heiße Aufströmungen durch die exotherme Phasengrenze. Er wirkt unterstützend auf Strömungen durch die endotherme Phasengrenze. Da die latenten Wärmen (3.3-11) über die Energiegleichung in Temperaturänderungen umgerechnet werden, wird die daraus folgende Dichteänderung wie jeder andere thermische Auftrieb behandelt und bei der Lösung der Erhaltungsgleichungen berücksichtigt.

### 3.4. Einführung einer viskoplastischen Fließspannung

#### 3.4.1. Motivation

Im Vergleich zu anderen terrestrischen Planeten ist es eine Besonderheit der Erde, dass die Konvektion im Mantel an der Oberfläche als Plattentektonik sichtbar wird. Die Ursachen für diese Besonderheit, die relevanten Rheologien und Mechanismen sind bis heute nicht vollständig verstanden. Subduktionsmodelle deuten darauf hin, dass die Gegenwart von Wasser ein entscheidender Faktor ist (Gerya & Yuen, 2002; Regenauer-Lieb & Kohl, 2003; Regenauer-Lieb & Yuen, 2003). Insbesondere könnte die Biegung abtauchender Platten auf Volumenausdehnung durch Serpentinbildung nach Wasseraufnahme zurückzuführen sein (Rüpke et al., 2003a). Die Bedeutung viskoelastischer Rheologie ist umstritten (Riedel, 2003). Inkompressible Strömungen können in einen poloidalen und einen toroidalen Anteil zerlegt werden (z.B. Yang, 1997). Konvergente und divergente Plattengrenzen zeigen poloidale Strömungen an, Transformstörungen toroidale. Poloidale Strömungen entstehen durch den konvektiven Wärmetransport im Mantel. Toroidale Strömungen tragen nicht zum Wärmetransport bei. Sie haben ihre Ursache in lateralen Viskositätsunterschieden und den Wechselwirkungen starrer Lithosphärenplatten. O'Connell et al. (1991) finden für das Geschwindigkeitsfeld der Erdoberfläche, dass die toroidale Energie 80 % der poloidalen beträgt. Toroidale Bewegungen beeinflussen wesentlich das Mischungsverhalten, da sie Material über die Grenzen poloidaler Konvektionszellen transportieren (Ferrachat & Ricard, 1998). Die Tiefenverteilung toroidaler Anteile im Erdmantel ist allerdings unklar, ebenso wie die Auswirkungen der toroidalen Oberflächenbewegungen auf das Mischungsverhalten in tieferen Schichten. Die Asthenosphäre könnte unter diesem Aspekt partiell entkoppelnd wirken.

Bis Anfang 2003 wurde in den 3D Konvektionsrechnungen unserer Gruppe (Walzer et al., 2003a) keine Lithosphäre modelliert. Im Folgenden wird ein erster Versuch beschrieben, Plattentektonik und toroidale Strömungen in unseren Modellen etwas besser zu berücksichtigen.

#### 3.4.2. Rheologisches Modell

Die unter 3.4.1 genannten, detaillierten Subduktionsmodelle wurden in 2D Geometrie durchgeführt. Aktuelle 3D und globale Modelle beschränken sich auf vergleichsweise einfache, nichtlineare Rheologien, die auf der mehr oder weniger selbstkonsistenten Einführung von Schwächezonen beruhen (Trompert & Hansen, 1998; Bercovici, 1998; Tackley, 2000a,b; Richards et al., 2001). Das von Richards et al. (2001) verwendete Modul ist auch in der in Jena verwendeten TERRA-Version vorhanden und wurde aktiviert.

In den oberen 285 km des Mantels wird dabei eine effektive Viskosität  $\eta_{eff}$  wie folgt eingeführt:

$$(3.4-1) \quad \eta_{eff} = \min \left[ \eta(P, T), \frac{\sigma_y}{2s} \right] \quad \text{für } s \leq 0,05 \cdot \frac{\sigma_y}{2\eta_0}$$

$$\eta_{eff} = \min \left[ \eta(P, T), \frac{\sigma_y}{6s} \right] \quad \text{für } s > 0,05 \cdot \frac{\sigma_y}{2\eta_0}$$

mit

$$(3.4-2) \quad s \equiv \sqrt{|\dot{\epsilon}_{II}|}$$

und

$$(3.4-3) \quad \frac{\sigma_y}{2\eta_0} = s_0 \frac{\eta}{\eta_0}$$

### 3.4. Einführung einer viskoplastischen Fließspannung

Die Fließgrenze  $\sigma_y$  wirkt erstmalig bei  $s_0$ ,  $\eta_0$  ist eine konstante Bezugsviskosität und  $\dot{\varepsilon}_{II}$  die zweite Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors  $e_{ij}$ :

$$(3.4-4) \quad \dot{\varepsilon}_{II} = e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2 - (e_{11}e_{22} + e_{11}e_{33} + e_{22}e_{33}) \\ = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2 \right] - \left[ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right]$$

Richards et al. (2001) weisen auf die Bedeutung einer niedrigviskosen Zone zwischen Lithosphäre und Übergangszone für die Entstehung plattigen Verhaltens hin. Sie grenzen die Parameterbereiche (Viskositätskontrast,  $\sigma_y$ ) für die Entstehung verschiedener tektonischer Regimes (stagnant lid, Plattentektonik, fließend) mittels 2D Modellen ein. Dann wird gezeigt, dass TERRA mit der entsprechenden Rheologie in begrenztem Maße auch plattige Geschwindigkeitsfelder liefert.

#### 3.4.3. Quantifizierung der Plattigkeit

Mir ist kein allgemein akzeptiertes Maß für die Plattigkeit des Geschwindigkeitsfeldes an der Erdoberfläche bekannt. In aktuellen Arbeiten (Richards et al., 2001; Walzer et al., 2003a, 2004a) nutzen diese Autoren lediglich ihren subjektiven Eindruck zur Beurteilung der Rechnungen. Deshalb wird im Folgenden ein Maß definiert, welches einen besseren Vergleich der Modelle dieser Arbeit untereinander ermöglicht.

Die möglichen tektonischen Regimes unterscheiden sich in der Verteilung von Verformungsraten über die Oberfläche. In einem Extremfall finden gar keine Verformungen statt (stagnant lid), im anderen verhält sich die gesamte Oberfläche wie eine zähe Flüssigkeit und wird überall verformt. Plattentektonik liegt zwischen diesen beiden Extremen. Ein großer Teil der Oberfläche ist von starren Platten bedeckt, die sich gegeneinander bewegen. Die Flächen hoher Deformationsgeschwindigkeiten sind im Wesentlichen auf die Plattengrenzen beschränkt und daher klein.  $s$  (vgl. 3.4-2) ist ein Maß für die Deformationsgeschwindigkeit an jedem Punkt der Oberfläche. Da die hier vorgestellten Konvektionsmodelle die Erde darstellen sollen, wird das Feld der Deformationsgeschwindigkeiten der realen jetzigen Erde als Maßstab genommen (Abb. 3.4-1). Je ähnlicher ein Konvektionsmodell diesem Maßstab ist, desto plattiger verhält sich seine Oberfläche. Dabei sollen die genauen Werte der realen Deformationsgeschwindigkeiten nicht überbewertet werden. Deshalb wird über  $s$  die Fläche

$$(3.4-5) \quad A(s) = \int_0^s A(s_i) ds_i$$

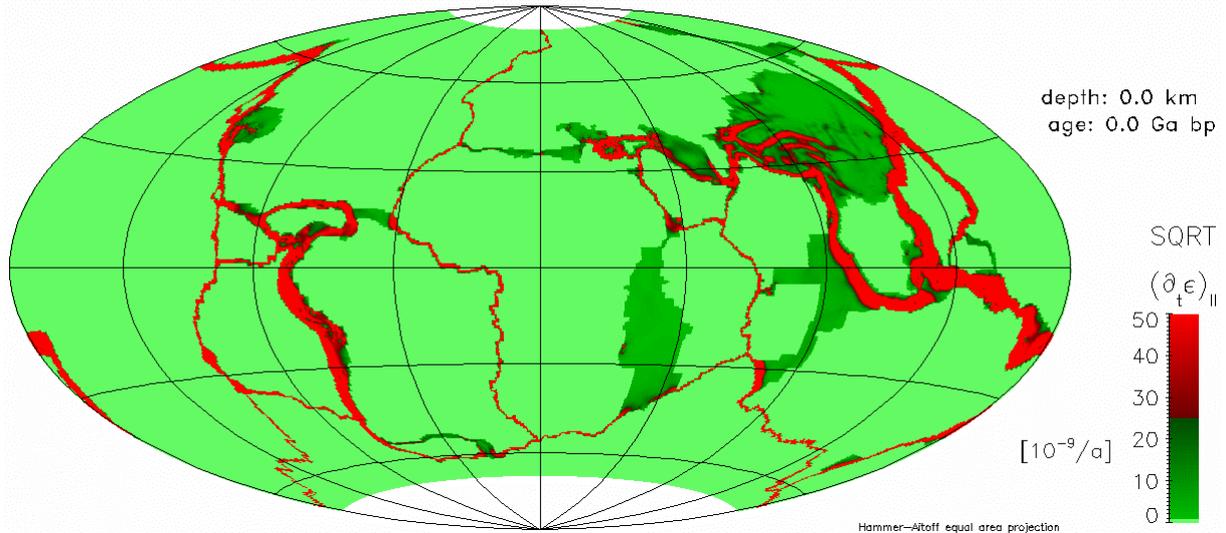
aufgetragen, auf der die Deformationsgeschwindigkeiten kleiner als  $s$  sind (Abb. 3.4-2).  $A(s_i)$  ist die Fläche mit einer konkreten Deformationsgeschwindigkeit. Außerdem mußte die Bewertung der Ähnlichkeit zur realen Erde den Unzulänglichkeiten der Konvektionsmodelle angepasst werden, um Unterschiede zwischen den Modellen hervorzuheben. Es treten kaum starre Bereiche und keine hohen  $s$ -Werte auf. Die vorkommenden  $s$ -Werte werden auf den jeweiligen Wertebereich  $s \in [s_{\min}, s_{\max}]$  normiert.

$$(3.4-6) \quad \tilde{s} = \frac{s - s_{\min}}{s_{\max} - s_{\min}}$$

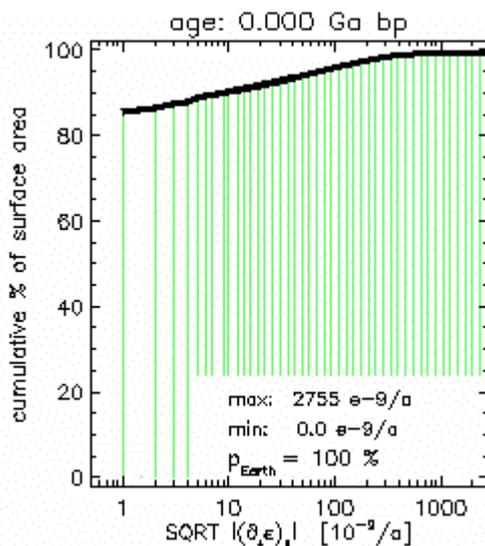
Damit wird nur die Verteilung der  $s$ -Werte über der Fläche zur Beurteilung der Plattigkeit herangezogen. Aus Abb. 3.4-2 ist erkennbar, dass die kumulative Verteilung der Fläche über  $s$  bei kleinen  $s$ -Werten auf der Erde weitgehend logarithmisch ist<sup>1)</sup>. Große Verformungsraten

<sup>1)</sup> Die Suche nach einer Gesetzmäßigkeit sei hiermit angeregt. Der Gedanke wird in dieser Arbeit aber nicht weiter verfolgt.

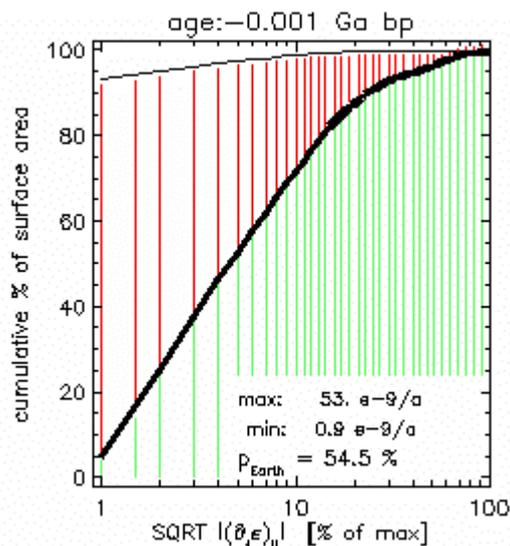
### 3.4. Einführung einer viskoplastischen Fließspannung



**Abb. 3.4-1:** Verteilung von  $s$  auf der Erdoberfläche. Die Daten für diese Darstellung, insgesamt 13345411 Punkte, wurden am 9.11.2003 von [http://sps.unavco.org/crustal\\_motion/dedt/](http://sps.unavco.org/crustal_motion/dedt/) (Kreemer et al., 2002) geladen. Sie waren aus verschiedenen Beobachtungen zusammengestellt worden, insbesondere aus dem Geschwindigkeitsfeld. Das eigentliche Modell der Deformationsgeschwindigkeiten umfaßt nur die wesentlichen tektonischen aktiven Gebiete. Die hellgrünen Flächen wurden als starr angenommen, von den Polgebieten gibt es keine Daten. Die Farbskala wurde zur besseren Vergleichbarkeit mit entsprechenden Bildern aus Konvektionsrechnungen auf den Bereich niedriger  $s$ -Werte beschränkt. An den Plattenrändern treten Werte bis zu  $2755 \cdot 10^{-9}/a$  auf (Abb. 3.4-2).



**Abb. 3.4-2:** Kumulative Verteilung von  $s$  auf der realen Erde. In dem zugrunde liegenden Modell von Kreemer et al. (2002), Abb. 3.4-1, werden über 80 % der heutigen Erdoberfläche als starr ( $s=0$ ) angesehen. Die Gebiete hoher Deformationsgeschwindigkeiten sind klein und an den Plattengrenzen konzentriert.



**Abb. 3.4-3:** Kumulative Verteilung von  $s$  an der Oberfläche eines typischen Konvektionsmodells dieser Arbeit. Die Kurve der realen Erde ist zum Vergleich als dünne Linie angegeben. Das Verhältnis von gemeinsamer Fläche (grün) zur Gesamtfläche unter beiden Linien (rot + grün) wird als Maß der Plattigkeit ( $p_{Earth}$ ) verwendet.

treten seltener auf. Um die Sensitivität des Maßes zu erhöhen, wird bei seiner Berechnung die  $s$ -Achse logarithmisch skaliert. Damit werden die auftretenden  $s$ -Werte weitgehend entsprechend der von ihnen eingenommenen Fläche gewichtet. Das hier verwendete Maß der Plattigkeit ( $p_{Earth}$ ) ist in Abb. 3.4-3 veranschaulicht. Es bewertet allerdings nur, wie stark die Lokalisierung der Flächen hoher Verformung ist. Die Verteilung oder Form der Zonen geht nicht ein. Das ist ein Nachteil von  $p_{Earth}$

### 3.4. Einführung einer viskoplastischen Fließspannung

Numerische Berechnung von  $p_{Earth}$ :

Die  $\tilde{s}$ -Werte sind nur für diskrete Punkte der Erdoberfläche gegeben. Zuerst wird jedem Punkt eine Fläche entsprechend dem jeweiligen Gitter zugeordnet. Da für die Polregionen der realen Erde keine Daten verfügbar sind, wurden alle Teilflächen mit der jeweiligen Gesamtfläche des Modells normiert.

Damit kann für jedes Intervall  $[\tilde{s}_i - \Delta\tilde{s}, \tilde{s}_i]$  die zugehörige Gesamtfläche bestimmt und anschließend  $A(\tilde{s})$  nach (3.4-5) durch Summation berechnet werden. Die Summation beginnt bei  $\tilde{s} = \Delta\tilde{s}$  und endet beim maximalen Wert  $\tilde{s}_{max} = 1$ . Es gilt hier  $\Delta\tilde{s} = 1e - 9/a$ . Damit ergeben sich die Kurven  $A_{Earth}(\tilde{s})$  für die reale Erde und  $A_m(\tilde{s})$  für das Konvektionsmodell. Die Plattigkeit ist dann:

$$(3.4-6) \quad p_{Earth} = \frac{\sum_i \min \left[ A_{Earth} \left( \tilde{s}_i - \frac{\Delta\tilde{s}_i}{2} \right), A_m \left( \tilde{s}_i - \frac{\Delta\tilde{s}_i}{2} \right) \right] \cdot [\log_{10}(\tilde{s}_i) - \log_{10}(\tilde{s}_i - \Delta\tilde{s}_i)]}{\sum_i \max \left[ A_{Earth} \left( \tilde{s}_i - \frac{\Delta\tilde{s}_i}{2} \right), A_m \left( \tilde{s}_i - \frac{\Delta\tilde{s}_i}{2} \right) \right] \cdot [\log_{10}(\tilde{s}_i) - \log_{10}(\tilde{s}_i - \Delta\tilde{s}_i)]}$$

Sie wird in dieser Arbeit als Prozentwert angegeben. Ein Wert von 100 % würde vollkommene Übereinstimmung mit der Verteilung (aber nicht mit den Werten!) auf der Erde bedeuten.

#### Spektrale Analyse toroidaler und poloidaler Anteile

Nur solenoidale Geschwindigkeitsfelder können exakt in einen toroidalen und einen poloidalen Anteil zerlegt werden. In der vorliegenden Arbeit werden kompressible Modelle behandelt. Die Zerlegung wird trotzdem durchgeführt und ist als Abschätzung zu verstehen. Insbesondere können verschiedene Modelle untereinander hinsichtlich der toroidalen Geschwindigkeitsanteile verglichen werden, da die Kompressibilität nicht variiert wird.

Nach Zerlegung des Geschwindigkeitsfeldes in toroidale und poloidale Anteile lassen sich die jeweiligen Teile auf Kugelflächen spektral analysieren. Für Zerlegung und spektrale Auswertung wird das Programm (sphmnx) von Yang (1997) benutzt. Die verwendeten Verfahren sind in der genannten Arbeit ausführlich beschrieben und werden hier nicht wiederholt.

#### 3.4.4. Testrechnungen

Modell	$c_t$	$\sigma_y$ [Pa]	$T_m(r_E)$ [K]	$\Gamma_{410}$ [Pa/K]	$\Gamma_{660}$ [Pa/K]	$\eta(r_E)$ [Pas]	$\eta_{min}$ [Pas]	$v_{max}(r_E)$ [cm/a]	$p_{Earth}$ [%]
Walzer et al. (2003a)	0 - 2	0	0	3,0e6	-4,0e6	1e22,6	1e21		
624	1	1,4e8	0	3,0e6	-4,0e6	1e22,6	1e21	2,7	36,6
625	0 - 2	1,4e8	0	3,0e6	-4,0e6	1e22,6	1e21	2,2	34,0
626	1	1,4e8	0	3,0e6	-4,0e6	1e24	1e21	1,2	48,0
627	1	1,4e8	0	3,0e6	-4,0e6	1e23,5	1e21	2,1	44,7
628	1	1,8e8	0	1,5e6	-2,0e6	1e24	1e21	1,7	52,9
629	1	1,0e8	0	1,5e6	-2,0e6	1e24	1e21	1,8	55,8
630	1	1,8e8	1824	1,5e6	-2,0e6	1e24	1e21	1,4	46,5

**Tab. 3.4-I:** Testrechnungen zur Verbesserung der Plattigkeit der Modelloberflächen. Weitere Ergebnisse sind in Anhang 1 zusammengefasst.  $c_t = ,0 - 2'$  bedeutet, dass nur im hochviskosen Teil des unteren Mantels temperaturbedingte laterale Viskositätsänderungen erlaubt sind, dort aber bis  $c_t = 2$ .  $c_t = 1$  gilt im gesamten Mantel.  $T_m(r_E) = 1824$  bedeutet, dass (3.1-5) mit  $\{T_m(r) = T_m(r_E) + 1,8K/km [r_E - r]\}$  im oberen Drittel des Mantels aktiviert war. Die Viskositätswerte stammen vom Anfang der Rechnung. Ansonsten stimmen die Modelle mit dem Grundmodell von Walzer et al. (2003a) überein.

### 3.4. Einführung einer viskoplastischen Fließspannung

Leider wurde das 3D Modell in Richards et al. (2001) nur sehr ungenau beschrieben. Deshalb war die in Tab. 3.4-I und Anhang 1 beschriebene Testreihe nötig um herauszufinden, welche Änderungen an Viskositätsmodell und Fließspannung die Plattigkeit der Modelle verbessern. Ausgangspunkt war das Viskositätsprofil von Walzer et al. (2003a), da es die von Richards et al. (2001) geforderte niedrigviskose Zone zwischen Lithosphäre und Übergangszone bereits enthielt. Verändert wurden die radialen Viskositätskontraste, die Temperaturabhängigkeit der Viskosität (Faktor  $c_t$ , Gleichung 3.1-13) und  $\sigma_y$ .

Mit den Ergebnissen wurde gezeigt, dass sich die Plattigkeit der Oberfläche des zentralen Modells von Walzer et al. (2003a) durch Einführung einer viskoplastischen Fließspannung in Kombination mit einer steiferen Lithosphäre und durchgehend (schwach) lateral temperaturabhängiger Viskosität verbessern läßt. Walzer et al. (2003b, 2004b) haben danach weitere Versuche zur Verbesserung der Plattigkeit unternommen. Durch die Beseitigung des Fehlers in der Implementierung der Phasengrenzen (vgl. 3.3) und durch die Änderung der anfänglichen Konvergenztoleranz des Lösers (Hendel) konnte die numerische Stabilität erhöht werden. Damit wurde die Einführung realistischerer Viskositätsprofile ermöglicht. Einige Modelle in Kapitel 7 sind mit diesen neuen Profilen gerechnet worden. Obwohl inzwischen insgesamt eine wesentliche Verbesserung gegenüber Walzer et al. (2003a) erreicht wurde, sind die Modelle noch weit davon entfernt, die Plattentektonik der Erde zu reproduzieren. Die Platten sind nicht vollständig starr, die Plattengrenzen sind zu breit, Subduktion ist weitgehend symmetrisch und es gibt kaum Transformstörungen. Die toroidalen Anteile des Geschwindigkeitsfeldes an der Oberfläche konnten nicht wesentlich erhöht werden.

In zukünftigen Modellen sind Verbesserungen durch die Beachtung der Freisetzung elastischer Energie, von Rekristallisationseffekten und der Gegenwart von Volatilen zu erwarten (Tackley, 2000). Diese kleinräumigen Effekte erfordern sehr hohe numerische Auflösungen.

Leider war in den Modellen 624 – 630 noch der in Kapitel 3.3 beschriebene Fehler vorhanden und sie sind für weitere Auswertungen wertlos (die Variation des Einflusses der Phasengrenzen in den Modellen 628 – 630 hat aber zum Auffinden des Fehlers beigetragen).

### 3.5. Programmerweiterung: Kernevolution

#### 3.5.1. Motivation

Stacey (1992) argumentiert, dass der Wärmetransport durch Plumes von der CMB einer sich selbst stabilisierenden Rückkopplung unterliegt. Der Wärmefluss vom Kern in den Mantel wäre dann zeitlich nahezu konstant. Die Existenz eines magnetischen Feldes durch Dynamoprozesse im flüssigen Erdkern wird an die Existenz eines Innenkerns gekoppelt. Ein zu hoher Wärmestrom hätte zur Folge, dass der Innenkern zu früh beginnt auszufrieren. Das widerspräche paläomagnetischen Beobachtungen. Ein zu geringer Wärmestrom ließe aus thermodynamischen Gründen keinen Dynamo zu. Somit ist der mögliche Wärmestrom an der CMB nach oben und unten begrenzt. Stevenson et al. (1983) und Schubert et al. (2001) favorisieren auch einen zeitlich konstanten CMB-Wärmestrom, zumindest für die zweite Hälfte der Erdevolution. Deshalb wurde in den Modellen unserer Gruppe (Walzer et al., 2003a, 2004a) –und damit auch in einigen Modellen dieser Arbeit– als thermische Randbedingung an der CMB bis vor kurzem ein konstanter Wärmestrom von  $28,9 \text{ mW/m}^2$  (Anderson, 1998) vorgegeben.

Die Temperatur an der CMB ( $T_{CMB}$ ) kann für Modelle der Mantelevolution als räumlich konstant angesehen werden. Laterale Temperaturunterschiede sind aufgrund der schnellen Konvektionsströmungen ( $\sim 1 \text{ cm/s}$ ) im niedrigviskosen Außenkern ( $\sim 10 \text{ Pas}$ ) kurzlebig. Das langsame Festkörperkriechen im Mantel ( $< 10 \text{ cm/a}$ ) reagiert nur auf die über einen längeren Zeitraum gemittelten Temperaturwerte. Die Zeitschrittlänge der Mantelmodelle ist ein Maß für die Zeitskala der Konvektion und damit für einen sinnvollen Mittelungszeitraum. Sie hängt von der höchsten Strömungsgeschwindigkeit im Mantel und der Gitterauflösung ab und liegt bei den hier vorgestellten Modellen in der Größenordnung von 500000 Jahren. Der Wärmestrom über die CMB ( $q_{CMB}$ ) ist durch den Temperaturgradienten an der Grenze und die Wärmeleitfähigkeit auf der Mantelseite ( $k_m$ ) bestimmt. Die Fähigkeit, Temperaturunterschiede durch Wärmetransport auszugleichen, wird hier als effektive Wärmeleitfähigkeit bezeichnet. Sie beinhaltet alle Arten des Wärmetransports (Advektion, Konduktion, Strahlung) und ist aufgrund der schnellen Strömungen im Außenkern wesentlich größer als im angrenzenden Mantel. Sie wirkt nicht limitierend auf  $q_{CMB}$ . Aus der allgemeinen Formel

$$(3.5-1) \quad \vec{q} = -k\nabla T$$

folgt deshalb mit

$$(3.5-2) \quad \left. \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right|_{r=r_{CMB}} = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \right|_{r=r_{CMB}} = 0$$

für den Betrag des Wärmestroms an der CMB:

$$(3.5-3) \quad q_{CMB} = -k_m \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_{CMB}}$$

Im diskreten TERRA-Gitter ist (3.5-3) für jeden Gitterpunkt wie folgt umgesetzt:

$$(3.5-4) \quad q_{CMB} = -k_m \frac{T_{i+1} - T_i}{r_{i+1} - r_i}$$

Dabei ist  $r_i=r_{CMB}$  und  $r_{i+1}$  der Radius der oberhalb von  $r_i$  liegenden Gitterschale.  $T_i$  und  $T_{i+1}$  sind die Temperaturen zweier Gitterpunkte der entsprechenden Gitterschalen. Da die Manteltemperaturen  $T_{i+1}$  lateral unterschiedlich sind, impliziert diese Umsetzung eines räumlich (und zeitlich) konstanten Wärmestroms lateral unterschiedliche Temperaturen  $T_i=T_{CMB}$ . Das ist physikalisch falsch und muß bei der Interpretation der so gerechneten Modelle beachtet werden: In Bereichen hoher Manteltemperaturen sind auch die CMB-Temperaturen erhöht, um den gleichen Wärmestrom zu gewährleisten (Abb. 5.2-5). Das könnte sich stabilisierend auf Aufstiegszonen auswirken. Walzer et al. (2003a) haben zur Überprüfung des Einflusses dieser thermischen Randbedingung (nicht aus physikalischen

### 3.5. Programmerweiterung: Kernevolution

Beweggründen) vergleichsweise Modelle mit räumlich und zeitlich konstanter  $T_{CMB}$  gerechnet und nur geringe Änderungen der Ergebnisse festgestellt. Allerdings ist eine zeitlich konstante Temperatur an der CMB auch sehr unwahrscheinlich, wegen der exponentiell abklingenden, radiogenen Heizung des Erdinneren, aber auch wegen der an Komatiiten nachgewiesenen säkularen Abkühlung des obersten Mantels.

Die genannten Probleme ließen sich einfach umgehen, indem die lateral gemittelte Temperatur der  $i$ -ten Gitterschale  $\langle T_{i+1} \rangle_{g,\varphi}$  in (3.5-4) eingesetzt und  $T_{CMB}$  entsprechend dem vorgegebenen Wärmestrom berechnet wird. Diese Temperatur kann dann als thermische Randbedingung für jeden Gitterpunkt (lateral konstant) an der CMB vorgegeben werden. Sie müßte regelmäßig neu bestimmt werden, da  $\langle T_{i+1} \rangle_{g,\varphi}$  zeitlich veränderlich ist. Diese Methode ist zwar besser als die im Programm umgesetzten, aber auf die schlecht abgesicherte und grobe Abschätzung von  $q_{CMB}$  als Eingabeparameter angewiesen.

Die physikalisch sauberste Methode wäre die gleichzeitige Lösung aller Bilanzgleichungen von Kern und Mantel. Das ist mit der heutigen Rechentechnik leider noch nicht möglich. Deshalb wurde von mir der in der Planetologie verbreitete Ansatz (z.B. Breuer, 2003) gewählt, ein 3D (oder 2D) Mantelkonvektionsmodell mit einem parametrisierten Modell der Kernevolution zu koppeln. Allerdings sind viele Parameter des Erdkerns nur sehr ungenau bekannt. Die Druckbereiche in den Kernen kleinerer Himmelskörper (Mars, Mond) sind experimentell besser zugänglich als für den Erdkern. Das könnte ein Grund dafür sein, dass es erst wenige Versuche gibt, die Kernevolution als Randbedingung der Mantelkonvektion der Erde zu berücksichtigen (Steinbach et al., 1993; Honda & Yuen, 1994; Yuen et al., 1995; Honda & Iwase, 1996). In den genannten Arbeiten wird die Kernevolution nur sehr ungenau behandelt. Ein ausfrierender Innenkern wird dort nicht berücksichtigt und diese Konvektionsmodelle haben kartesische Geometrie. Walzer et al. (2003b, 2004b) haben die Idee übernommen,  $T_{CMB}$  aus der Energiebilanz des Kerns zu bestimmen. Der Innenkern ist bei ihrer Implementation noch nicht berücksichtigt. Unabhängig davon wurde im Rahmen dieser Arbeit die vollständige Energiebilanz des Erdkerns in Anlehnung an Labrosse (2003) in TERRA eingebaut und in einigen Modellen zur Bestimmung von  $T_{CMB}(t)$  benutzt. Soweit mir bekannt ist, wird in der vorliegenden Arbeit zum ersten Mal ein weitgehend vollständiges Modell der Kernevolution mit einem dynamischen Mantelkonvektionsmodell gekoppelt.

#### 3.5.2. Physikalisches Modell

Die Energiebilanz je Zeiteinheit des Kerns mit Innenkern ist:

$$(3.5-5) \quad Q_{CMB} = Q_{cooling} + Q_{radiogenic} + Q_{latent} + Q_{gravi} + Q_{ICB}$$

Die über die CMB abgegebene oder aufgenommene Wärmeleistung ( $Q_{CMB}$ ) wird durch folgende Quellen gespeist: die säkulare Abkühlung ( $Q_{cooling}$ ) des Außenkerns, die Wärmeleistung aus dem Zerfall radioaktiver Isotope im Außenkern ( $Q_{radiogenic}$ ), die beim Ausfrieren des Innenkerns freiwerdende latente Wärmeleistung ( $Q_{latent}$ ), die je Zeiteinheit in Wärme umgewandelte potenzielle Energie der Differenziation in spezifisch schwereres Innenkernmaterial und die Anreicherung leichter Elemente im Außenkern ( $Q_{gravi}$ ) und die Wärmeleistung der Innenkerngrenze ( $Q_{ICB}$ ). Ohmsche und viskose Dissipation tauchen nicht in der globalen Energiebilanz auf, da sie intern durch die Arbeit von Auftriebskräften ausgeglichen werden (Backus, 1975; Hewitt et al., 1975). Der als Randbedingung für Mantelkonvektion relevante, über einen längeren Zeitraum gemittelte Zustand des Kerns wird als hydrostatisch, isentropisch und der flüssige Teil als chemisch homogen vorausgesetzt. Die beiden letzten Bedingungen bedeuten, dass das Temperaturprofil einer Adiabate folgt (Braginsky & Roberts, 1995). Labrosse (2003) benutzt:

$$(3.5-6) \quad T_{adb}(r,t) = T_s(r_{IC}) \exp\left[\frac{r_{IC}^2 - r^2}{L_T^2}\right] \quad \text{mit Innenkern}$$

### 3.5. Programmerweiterung: Kernevolution

$$(3.5-7) \quad T_{adb}(r, t) = T_c \exp\left[\frac{-r^2}{L_T^2}\right] \quad \text{ohne Innenkern}$$

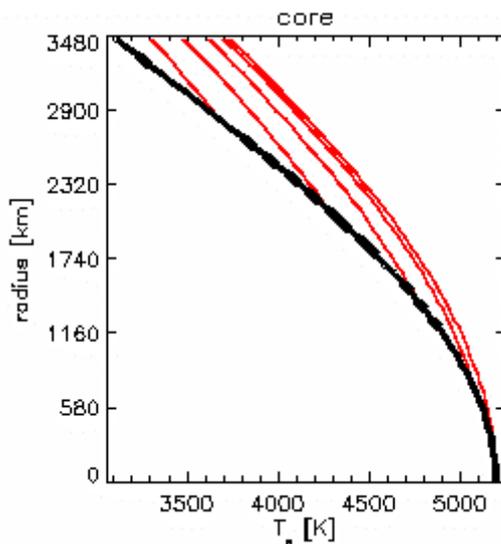
Dabei ist  $L_T$  wie folgt definiert:

$$(3.5-8) \quad L_T = \sqrt{\frac{3c_{p,core}}{2\pi\alpha_c\rho_c G}}$$

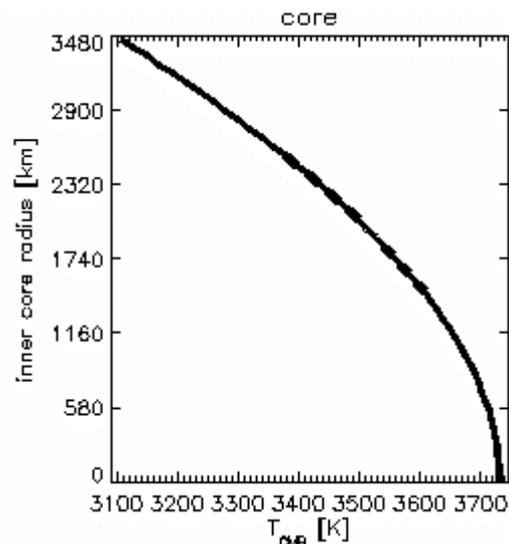
Die Erstarrungstemperatur im Kern ist (Labrosse et al., 2001):

$$(3.5-9) \quad T_s(r) = T_{s0} \exp\left[-2\left(1 - \frac{1}{3\gamma}\right)\frac{r^2}{L_T^2}\right]$$

Sobald die Kerntemperatur im Zentrum unter die Erstarrungstemperatur sinkt, beginnt ein Innenkern auszufrieren. Der Zusammenhang zwischen Erstarrungstemperatur, adiabatischen Profilen und der Temperatur an der CMB ist in den Abbildungen 3.5-1 und 3.5-2 dargestellt.



**Abb. 3.5-1:** Profil der Erstarrungstemperatur im Erdkern nach (3.5-9) mit den Werten von (3.5-1), aber  $T_{s0} = 5200$  K.  $T_s(r)$  legt den Innenkernradius fest. Von verschiedenen Innenkernradien ausgehende Adiabaten sind rot eingezeichnet.



**Abb. 3.5-2:** Abhängigkeit der Temperatur an der CMB vom Innenkernradius. Diese Abbildung wurde mit den gleichen Werten wie (3.5-1) berechnet.

Die Terme  $Q_{cooling}$ ,  $Q_{latent}$  und  $Q_{gravi}$  hängen vom Radius des Innenkerns ( $r_{IC}$ ) ab. Die Energiebilanz des Innenkerns ( $Q_{ICB}$ ) setzt sich aus radiogener Heizung und säkularer Abkühlung zusammen. Sie wird im Folgenden auf die entsprechenden Terme  $Q_{radiogenic}$  und  $Q_{cooling}$  des Außenkerns aufgeteilt, die dann den gesamten Kern darstellen. Der Radius des Innenkerns läßt sich aus der folgenden Differenzialgleichung bestimmen:

$$(3.5-10) \quad Q_{CMB}(t) = \left\{ P_{cooling+ICB}(r_{IC}) + P_{latent}(r_{IC}) + P_{gravi}(r_{IC}) \right\} \cdot \frac{dr_{IC}}{dt} + Q_{radiogenic}$$

Dabei ergeben sich die Terme  $P_*(r_{IC})$  aus den entsprechenden Termen der Energiebilanz, haben die Dimension [1 J/m] und beschreiben die freigesetzte Energie je Meter Radiuszunahme des Innenkerns. Solange kein Innenkern vorhanden ist, entfallen die drei letzten Terme der rechten Seite von Gleichung (3.5-5). Die Temperatur im Erdmittelpunkt ergibt sich in diesem Falle durch Lösung der Differenzialgleichung:

$$(3.5-11) \quad Q_{CMB} = Q_{cooling} + Q_{radiogenic} = -2\pi \cdot c_{p,core} \rho_c L^3 I \frac{dT_c}{dt} + Q_{radiogenic}$$

$L$  ist eine kombinierte Längenskala

### 3.5. Programmerweiterung: Kernevolution

$$(3.5-12) \quad L = \frac{L_T L_\rho}{\sqrt{L_T^2 + L_\rho^2}}$$

und hängt neben  $L_T$  noch von der Kompressions-Längenskala ( $L_\rho$ ) ab:

$$(3.5-13) \quad L_\rho = \sqrt{\frac{3K_0}{2\pi G \rho_0 \rho_c} \left( \ln \frac{\rho_c}{\rho_0} + 1 \right)}$$

Die Funktion  $I$  folgt aus der Integration von  $r^2 \exp[-r^2 / L^2]$ :

$$(3.5-14) \quad I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} \left[ \frac{r_{CMB}}{L} \right] - \frac{r_{CMB}}{L} \exp \left[ -\frac{r_{CMB}^2}{L^2} \right]$$

mit

$$(3.5-15) \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp[-t^2] \cdot dt$$

Aus Gleichung (3.5-7) wird mit  $T(r=0)$  zuerst die Temperatur im Erdmittelpunkt ( $T_c$ ) berechnet und dann  $T_{CMB}(t) = T_{adb}(r_{CMB}, t)$ . Sobald ein Innenkern vorhanden ist, wird mit (3.5-10) dessen Radius bestimmt und daraus mit (3.5-6) die Temperatur an der CMB  $T_{CMB}(t) = T_{adb}(r_{CMB}, t)$ .

Im Folgenden werden die einzelnen Terme von Gleichung (3.5-10) näher erläutert. Die verwendeten Zahlenwerte und Symbole sind in Tabelle (3.5-I) und in Anhang 2 zusammengefasst.

Das Temperaturprofil im flüssigen äußeren Kern ist adiabatisch. Die säkulare Abkühlung des Innenkerns liefert nur einen geringen Beitrag zur Energiebilanz, folgt aber auch etwa einer Adiabate (Labrosse et al., 2001). Der damit berechnete Wert für  $P_{cooling}$  liegt an der unteren Grenze des Möglichen. Die Adiabate des Kerns ist an der Erstarrungstemperatur beim Radius der Innenkerngrenze verankert. Die säkulare Abkühlung des gesamten Kerns ist deshalb vom Wachstum des Innenkerns abhängig und es folgt:

$$(3.5-16) \quad P_{cooling+ICB}(r_{IC}) = 4\pi \cdot L^3 \cdot \rho_c \cdot c_{p,core} \cdot T_{s0} \cdot \left( 1 - \frac{2}{3\gamma} \right) \frac{r_{IC}}{L_T^2} \exp \left[ \left( \frac{2}{3\gamma} - 1 \right) \frac{r_{IC}^2}{L_T^2} \right] \cdot I$$

Bei künftigen Verbesserungen dieses Modells könnte noch die endliche Leitfähigkeit des Innenkerns berücksichtigt werden (Glatzmaier & Roberts, 1995). Die latente Wärme ist proportional zur Volumenzunahme des Innenkerns:

$$(3.5-17) \quad P_{latent}(r_{IC}) = 4\pi \cdot r_{IC}^2 \cdot \rho(r_{IC}) \cdot T_s(r_{IC}) \cdot \Delta S$$

Die radiusabhängige Erstarrungstemperatur  $T_s$  ergibt sich aus (3.5-9). Da das Dichteprofil aus PREM (Dziewonski & Anderson, 1981) nicht für frühere Zeiten gilt, wird hier ein anderer Ansatz verwendet (Labrosse, 2001):

$$(3.5-18) \quad \rho = \rho_c \exp \left[ -\frac{r^2}{L_\rho^2} + O \left( \frac{r^4}{L_\rho^4} \right) \right]$$

Beim Ausfrieren des Innenkerns konzentrieren sich die leichten Elemente im Außenkern. Dies kann durch einen chemischen Ausdehnungskoeffizienten beschrieben werden. Unter der Annahme eines konstanten Ausdehnungskoeffizienten läßt sich zeigen, daß die dabei freigesetzte Energie gleich der Änderung der Schwereenergie durch die Massenumverteilung ist (Braginsky & Roberts, 1995). Die Freisetzung leichter Elemente an der Innenkerngrenze (ICB) ist proportional zum Wachstum des Innenkerns und es gilt in erster Näherung (Labrosse, 2001):

### 3.5. Programmerweiterung: Kernevolution

$$(3.5-19) \quad P_{\text{gravi}}(r_{IC}) = \frac{8\pi^2}{3} G \cdot \Delta\rho_{ICB} \cdot \rho_c \cdot r_{IC}^2 \cdot r_{CMB}^2 \cdot \left( \frac{3}{5} - \frac{r_{IC}^2}{r_{CMB}^2} \right)$$

Es ist umstritten, welche radioaktiven Elemente im Kern vorkommen und in welcher Konzentration. Kosmochemische Gründe sprechen für  $^{40}\text{K}$ , es gibt aber auch andere Möglichkeiten (Labrosse, 2001). In der vorliegenden Arbeit wird nur  $^{40}\text{K}$  berücksichtigt, Änderungen könnten aber leicht im Programm umgesetzt werden. Die diskutierten Kaliumkonzentrationen ( $a_{\mu 1, \text{core}}$ ) reichen von vernachlässigbar (Oversby & Ringwood, 1972) bis zu 1500 ppm (Roberts et al., 2003). Die neuesten experimentellen Ergebnisse (Gessmann & Wood, 2002; Rama Murthy et al., 2003) sprechen für etwa 100 ppm. Die zeitlich abnehmende Wärmeleistung durch den Zerfall von Radionukliden ist:

$$(3.5-20) \quad Q_{\text{radiogenic}} = a_{\mu 1, \text{core}} a_{if1} H_{01} \exp\left[\frac{t_{\text{ev}} - t_{\text{rad}} - t}{\tau_1}\right] \cdot m_{\text{core}}$$

Parameter	Wert	Quellen, Bemerkungen
$r_{CMB}$	$3480 \pm 5 \text{ km}$	PREM; Toleranz aus Abschätzung CMB-Topographie (Labrosse, 2003)
$r_{IC}$	$1221 \pm 1 \text{ km}$	PREM; Toleranz aus Abschätzung ICB-Topographie (Labrosse, 2003)
$\rho_c$	$12,5 \pm 0,55 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$	PREM; Dichtesprung an ICB abgezogen; Toleranz nach Bolt (1991)
$\Delta\rho_{ICB}$	$500 \pm 100 \text{ kg/m}^3$	PREM, nach Abzug von 1,7% Dichteänderung durch Gefrieren (Poirier & Shankland, 1993; Laio et al., 2000); Toleranzabschätzung: Labrosse (2003)
$\rho_0$	$7,5 \pm 0,1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$	5% niedriger als die Dichte reinen Eisens (Labrosse, 2003)
$L_\rho$	$7400 \pm 150 \text{ km}$	Berechnung von Labrosse (2003) aus PREM-Werten
$\alpha_c$	$1,3 \pm 0,1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$	Berechnung von Labrosse (2003) aus PREM-Werten
$c_{p, \text{core}}$	$850 \pm 80 \text{ J/kg K}$	Stacey (1993); Toleranzabschätzung von Labrosse (2003)
$\Delta S$	$118 \pm 12 \text{ J/kg K}$	Poirier & Shankland (1993)
$\gamma$	$1,5 \pm 0,2$	Alfè et al. (2002)
$a_{\mu 1, \text{core}}$	0 - 1500 ppm $O(100 \text{ ppm})$	Extrema: Oversby & Ringwood (1972); Roberts et al. (2003) wahrscheinlich: Gessmann & Wood (2002); Rama Murthy et al. (2003)
$T_{s0}$	$5270 \pm 500 \text{ K}$	Poirier & Shankland (1993)
$I$	0.19880081	aus (3.5-14) numerisch bestimmt
$L$	4680 km	aus (3.5-12) berechnet
$L_T$	$6042 \pm 1400 \text{ km}$	Labrosse (2003)
$L_\rho$	$7400 \pm 150 \text{ km}$	Labrosse (2003)
$m_{\text{core}}$	$1.943e24 \text{ kg}$	Fowler (1990)
$G$	$6687,3 \pm 9,4 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$	Schwarz et al. (1998)
$a_{if1}$	0.000119	wie in Walzer et al. (2003b)
$H_{01}$	$0,272 \cdot 10^{-3} \text{ W/kg}$	wie in Walzer et al. (2003b)
$\tau_1$	2015,3 Ma 1805.0 Ma	wie in Walzer et al. (2003b) Blum (1995)
$t_{\text{rad}}$	4,565 Ga	wie in Walzer et al. (2003b)
$t_{\text{ev}}$	4,490 Ga	wie in Walzer et al. (2003b)

**Tab. (3.5-1):** Parameterwerte der Kernmodelle. Die Abkürzung PREM bezieht sich auf das seismische Modell von Dziewonski & Anderson, 1981.

#### 3.5.3. Numerische Umsetzung in TERRA

Das Modell der Kernevolution ist hauptsächlich im neu geschriebenen Unterprogramm earthcmb.f kodiert. Die Kernparameter müssen in diesem Unterprogramm vor dem Kompilieren eingegeben werden. Die zeitliche Entwicklung des Temperaturfeldes wird in TERRA mit einem Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung berechnet, die zeitliche Entwicklung von  $T_{CMB}$  in earthcmb.f auch. Die Aufrufe von earthcmb.f sind so mit den Runge-Kutta-Schritten in TERRA synchronisiert, dass für die Berechnung von  $q_{CMB}$  jeweils das aktuellste Temperaturfeld zur Verfügung steht. Zusammen mit den Eingabeparametern ist der Zustand des Kerns eindeutig durch  $T_{CMB}$  bestimmt. Zur Minderung des Programmieraufwandes und

### 3.5. Programmerweiterung: Kernevolution

aus Genauigkeitsgründen wird  $r_{IC}$  zusätzlich zur Charakterisierung des Kerns genutzt. Das hat allerdings den Nachteil, dass  $r_{IC}$  ein zusätzlicher Eingabeparameter für Fortsetzungsläufe ist. Deshalb wurde das Feld `propr` von 20 auf 30 Elemente erweitert und die Kompatibilität zwischen neuen und alten TERRA-Ausgaben geht verloren. `Earthcmb.f` schreibt die Kernparameter regelmäßig (alle 10 Zeitschritte) in die Datei `cmb$lauf`, die dann mit IDL-Programmen ausgewertet werden kann.

Um den Einbau von `earthcmb.f` in andere Programmversionen zu erleichtern, werden im Folgenden einige Aspekte der numerischen Umsetzung näher erläutert. Gleichung (3.5-4) stellt die einfachste Näherung zur Bestimmung von  $q_{CMB}$  in einem diskreten Gitter dar. Da die Kernevolution kritisch vom Wärmestrom über die CMB abhängt, ist es sinnvoll, diesen etwas genauer zu ermitteln. Hier wird davon ausgegangen, dass der Wärmetransport über die CMB durch radiale Konduktion in der untersten Schicht des Mantels bestimmt ist. Deshalb kann  $q_{CMB}$  aus einem konduktiven Profil zwischen den lateral gemittelten Temperaturen  $\langle T_i \rangle_{g,\varphi} = T_{CMB}$  und  $\langle T_{i+1} \rangle_{g,\varphi}$  in der darüber liegenden Gitterebene abgeschätzt werden. Der radiale Teil der Wärmeleitungsgleichung

$$(3.5-21) \quad \frac{\partial \langle T \rangle_{g,\varphi}}{\partial t} = \kappa_m \Delta_r \langle T \rangle_{g,\varphi} + \frac{\kappa_m}{k_m} \cdot H = \frac{\kappa_m}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \langle T \rangle_{g,\varphi}}{\partial r} \right) + \frac{\kappa_m}{k_m} \cdot H$$

hat die stationäre ( $\frac{\partial \langle T \rangle_{g,\varphi}}{\partial t} = 0$ ) Lösung

$$(3.5-22) \quad \langle T \rangle_{g,\varphi}(r) = \langle T_{i+1} \rangle_{g,\varphi} + \left[ \langle T_i \rangle_{g,\varphi} - \langle T_{i+1} \rangle_{g,\varphi} \right] \cdot \left[ \left( \frac{1}{r} \right) \left( \frac{r_i r_{i+1}}{r_{i+1} - r_i} \right) - \left( \frac{r_i}{r_{i+1} - r_i} \right) \right]$$

Die innere Heizung des Mantels ( $H=0$ ) wird bei der Herleitung des konduktiven Profils vernachlässigt, da sie in TERRA schon in die Berechnung der  $T_{i+1}$  eingeht. Mit (3.5-22) ändert sich (3.5-4) an der CMB zu:

$$(3.5-23) \quad \langle q_{CMB} \rangle_{g,\varphi} = -k_m \frac{\partial \langle T \rangle_{g,\varphi}}{\partial r} \Big|_{r=r_i} = -k_m \left( \frac{\langle T_{i+1} \rangle_{g,\varphi} - \langle T_i \rangle_{g,\varphi}}{r_{i+1} - r_i} \right) \left( \frac{r_{i+1}}{r_i} \right)$$

Nach der Berechnung der gesamten Wärmeleistung des Kerns

$$(3.5-24) \quad Q_{CMB} = 4\pi \cdot r_{CMB}^2 \cdot \langle q_{CMB} \rangle_{g,\varphi}$$

und der radiogenen Heizung ( $Q_{radiogenic}$ ) werden für jeden Runge-Kutta-Schritt drei Hauptfälle unterschieden. Es werden auch die Fälle berücksichtigt, die in der Erdevolution wahrscheinlich noch nicht vorgekommen sind. Für andere Planeten, z.B. für Mars, kann kein Fall ausgeschlossen werden und der Code läßt sich dann leichter anpassen. Der Innenkernradius ( $r_{IC}$ ) entscheidet darüber, welche Bilanzgleichung für den aktuellen Zeitschritt benutzt wird. Wenn sich bei der folgenden Berechnung zeigt, dass sich der Zustand des Innenkerns ändert, so bekommt  $T_{CMB}$  den der Zustandsänderung entsprechenden Grenzwert zugewiesen. Bei diesen Nebenfällen wird  $r_{IC}$  nicht exakt aus den Bilanzgleichungen berechnet, sondern erhält willkürlich einen Wert am Anfang des jeweils neuen Bereiches. Dieser Innenkernradius dient dann als Indikator, um beim nächsten Zeitschritt eine andere Bilanzgleichung zu verwenden. Es gilt:

$$n \Rightarrow t$$

$$(3.5-26) \quad n + \frac{1}{2} \Rightarrow t + \frac{\Delta t}{2}$$

$$n + 1 \Rightarrow t + \Delta t$$

$n+*$  kann sowohl  $n + \frac{1}{2}$  als auch  $n + 1$  heißen. Es folgt eine Skizze der Algorithmen für die einzelnen Fälle. Wärmeströme vom Kern in den Mantel sind per definitionem positiv.

### 3.5. Programmerweiterung: Kernevolution

kein Innenkern vorhanden (Abkühlung oder Aufheizung):  $r_{IC} \leq 0$

- [1] Berechnung  ${}^n Q_{CMB}$  aus  ${}^n T$  ... mit (3.5-24)
- [2]  $f_1 = \frac{{}^n Q_{radiogenic} - {}^n Q_{CMB}}{2\pi \cdot c_{p,core} \rho_c L^3 I}$  ... mit (3.5-11)
- [3]  ${}^n T_c = {}^n T_{CMB} \exp\left[\frac{r_{CMB}^2}{L_T^2}\right]$  ... mit (3.5-7)
- [4]  ${}^{n+1/2} T_c = {}^n T_c + \frac{\Delta t}{2} \cdot f_1$  ... erster Runge-Kutta-Schritt
- [5]  ${}^{n+1/2} T_{CMB} = {}^{n+1/2} T_c \exp\left[\frac{-r_{CMB}^2}{L_T^2}\right]$
- [6] Berechnung  ${}^{n+1/2} T$  mit  ${}^{n+1/2} T_{CMB}$  als Randbedingung  
(erster Runge-Kutta-Schritt zur Lösung der Energiegleichung in TERRA)
- [7] Berechnung  ${}^{n+1/2} Q_{CMB}$  aus  ${}^{n+1/2} T$
- [8]  $f_2 = \frac{{}^{n+1/2} Q_{radiogenic} - {}^{n+1/2} Q_{CMB}}{2\pi \cdot c_p \rho_c L^3 I}$  ... aus (3.5-11)
- [9]  ${}^{n+1} T_c = {}^{n+1/2} T_c + \Delta t \cdot f_2 - \frac{\Delta t}{2} \cdot f_1$  ... zweiter Runge-Kutta-Schritt
- [10]  ${}^{n+1} T_{CMB} = {}^{n+1} T_c \exp\left[\frac{-r_{CMB}^2}{L_T^2}\right]$
- [11] Berechnung  ${}^{n+1} T$  mit  ${}^{n+1} T_{CMB}$  als Randbedingung  
(zweiter Runge-Kutta-Schritt zur Lösung der Energiegleichung in TERRA)

I.a Innenkern beginnt auszufrieren:  ${}^{n+*} T_c \leq T_{s0}$

Sobald bei [4] oder [9] in Fall I. festgestellt wird, dass ein Innenkern beginnt auszufrieren, ändern sich die Schritte [4] und [5] bzw. [9] und [10] zu:

[4 oder 9]  ${}^{n+*} T_c = T_{s0}$  und  ${}^{n+*} r_{IC} = \Delta r$  ... Festlegung

[5 oder 10]  ${}^{n+*} T_{CMB} = T_{s0} \exp\left[\frac{-r_{CMB}^2}{L_T^2}\right]$

II. Innenkern vorhanden und wachsend:  $r_{IC} > 0$  und  $Q_{CMB} - Q_{radiogenic} \geq 0$

[1] Berechnung  ${}^n Q_{CMB}$  aus  ${}^n T$

[2]  $\int_t^{t+\Delta t/2} Q_{total} dt \approx \left( {}^n Q_{CMB} - {}^n Q_{radiogenic} \right) \cdot \frac{\Delta t}{2} = {}^n E$  ... Energiebilanz [J]

[3]  ${}^n E = \int_{{}^n r_{IC}}^r \{P_{cooling+ICB}(r_{IC}) + P_{latent}(r_{IC}) + P_{gravi}(r_{IC})\} \cdot dr_{IC} = \int_{{}^n r_{IC}}^r \{P(r_{IC})\} \cdot dr_{IC}$

Dieses Integral wird numerisch durch die Summation kleiner Intervalle gelöst:

### 3.5. Programmerweiterung: Kernevolution

$${}^n E = \sum_{i=0}^k \left\{ P \left( {}^n r_{IC} + \frac{\Delta r_{IC}}{2} + i \cdot \Delta r_{IC} \right) \right\} \cdot \Delta r_{IC}$$

Die Berechnung von  $P(r_{IC})$  erfolgt in der Mitte jedes Intervalls. Sobald  ${}^n E$  erreicht ist, bricht die Summation ab. Der neue Innenkernradius ist:

$$[4] \quad {}^{n+\frac{1}{2}} r_{IC} = {}^n r_{IC} + (k+1) \cdot \Delta r_{IC}$$

$$[5] \quad \text{Berechnung } T_s({}^{n+\frac{1}{2}} r_{IC}) \text{ mit (3.5-9)}$$

$$[6] \quad {}^{n+\frac{1}{2}} T_{CMB} = T_s({}^{n+\frac{1}{2}} r_{IC}) \exp \left[ \frac{{}^{n+\frac{1}{2}} r_{IC}^2 - r_{CMB}^2}{L_T^2} \right] \quad \dots \text{ mit (3.5-6)}$$

Beim zweiten Runge-Kutta-Schritt wird von  ${}^{n+\frac{1}{2}} Q_{CMB}$ ,  ${}^{n+\frac{1}{2}} Q_{radiogenic}$  und  ${}^{n+\frac{1}{2}} r_{IC}$  ausgegangen. Ansonsten verläuft die Berechnung von  ${}^{n+1} T_{CMB}$  analog zu der von  ${}^{n+\frac{1}{2}} T_{CMB}$ . Die Synchronisation mit den Runge-Kutta-Schritten von TERRA erfolgt wie in Fall I.

#### II.a Kern friert völlig aus: $r_{IC} \geq r_{CMB}$

Sobald bei [4] in Fall II. festgestellt wird, dass der Innenkern die Größe des gesamten Kerns erreicht, ändern sich [4] und [6] zu:

$$[4] \quad {}^{n+*} r_{IC} = r_{CMB} + dr \quad \dots \text{ Nutzung als Indikator}$$

$$[6] \quad {}^{n+*} T_{CMB} = T_s(r_{CMB})$$

#### III. Innenkern vorhanden und schrumpfend: $r_{IC} > 0$ und $Q_{CMB} - Q_{radiogenic} < 0$

Der Algorithmus ist analog zu Fall II., außer Schritt [3]:

$$[3] \quad {}^n E = \sum_{i=0}^k \left\{ -P \left( {}^n r_{IC} - \frac{\Delta r_{IC}}{2} - i \cdot \Delta r_{IC} \right) \right\} \cdot \Delta r_{IC}$$

#### III.a Innenkern schmilzt wieder vollkommen: $r_{IC} \leq 0$

Sobald bei [4] in Fall III. festgestellt wird, dass der Innenkern verschwindet, ändern sich [4] und [6] zu:

$$[4] \quad {}^{n+*} r_{IC} = -dr \quad \dots \text{ Nutzung als Indikator}$$

$$[6] \quad {}^{n+*} T_{CMB} = T_{s0} \exp \left[ \frac{-r_{CMB}^2}{L_T^2} \right] \quad \dots \text{ mit (3.5-7)}$$

#### IV. völlig gefrorener Kern heizt sich auf oder kühlt ab: $r_{IC} > r_{CMB}$

Für den Innenkern wird weiterhin ein adiabatisches Temperaturprofil angenommen und die Berechnung von  $T_{CMB}$  erfolgt analog zu Fall I. Das impliziert auch, dass die effektive Wärmeleitfähigkeit des festen Kerns wesentlich größer als die des Mantels ist. Sollte diese Voraussetzung nicht erfüllt sein, müßte für den Kern separat eine Wärmeleitungsgleichung gelöst werden. Da Fall IV für Erdmodelle sehr unwahrscheinlich ist, wurde er vorerst nicht genauer ausgearbeitet. Selbst die Parameter sind die gleichen wie bei Fall I.

### 3.5. Programmerweiterung: Kernevolution

IV.a völlig gefrorener Kern beginnt zu schmelzen:  $T_{CMB} \geq T_s(r_{CMB})$

Sobald bei [5] oder [10] in Fall IV. festgestellt wird, dass ein Außenkern entsteht, ändert sich Schritt [5] bzw. [10] zu:

[5 oder 10]  ${}^{n+*}T_{CMB} = T_s(r_{CMB})$  und  ${}^{n+*}r_{IC} = r_{CMB} - dr$  ... Festlegung

Bei Erdmodellen tritt in der Regel nur der Übergang I.a auf. Die Bilanzgleichungen werden also in nur einem halben Zeitschritt ( $\Delta t/2$ ) nicht exakt gelöst. Der dadurch verursachte Fehler kann in der Größenordnung von  $Q_{CMB} \cdot \Delta t/2$  liegen und ist in Hinblick auf die gesamte Erdevolution ( $\sim 5000 \Delta t$ ) vernachlässigbar.

#### **3.6. Programmiererweiterung: Anfangsbedingung**

Als Anfangsbedingung wird ein Temperaturfeld mit kleiner Störung vorgegeben (vgl. 3.1.3). Bei der Auswertung zeigte sich bei den meisten Modellen, dass der Mantel sich am Anfang der Rechnung erst einmal aufheizt. Das widerspricht Arbeiten über die frühe Evolution der Erde (Agee & Walker, 1988; Abe, 1997). Diese gehen davon aus, dass die höchsten Temperaturen am Anfang der Mantelevolution auftraten. Die Existenz eines frühen Magmaozeans ist nicht ausgeschlossen. Die Anfangstemperaturen der meisten Modelle in Kapitel 5 sind also zu niedrig. Dieses Problem ließe sich z.B. einfach beheben, indem die jeweils verwendete Schmelzpunktkurve als Startprofil der Temperatur festgelegt wird.

Die Auswertung der Geschwindigkeitsfelder zeigt aber außerdem, dass die Strömungsgeschwindigkeiten am Anfang meist erst langsam zunehmen. Deshalb wird hier vorgeschlagen, das Konvektionsmodell am Anfang erst eine ausreichende Anzahl von Zeitschritten mit der radiogenen Heizleistung und der CMB-Temperatur laufen zu lassen, die für den Anfang der Mantelevolution angenommen werden.

Der Aufwand für die Implementierung dieses Vorschlages war nicht sehr hoch. Es wurden lediglich zwei Unterprogramme geschrieben, die vor der eigentlichen Zeitschleife von TERRA aufgerufen werden. Die Anzahl der ‚primordialen‘ Zeitschritte ist eine Eingabegröße. Die Methode findet zwar eine individuell zu jedem Modell passende Startbedingung, braucht aber zusätzliche Rechenzeit. Aufwand und Nutzen müssen von Fall zu Fall abgewogen werden. Da bis jetzt erst zwei Läufe mit dieser Programmiererweiterung gemacht wurden, liegen noch nicht genug Erfahrungen vor, wieviel Zeitschritte sinnvoll sind.

### **4. Entstehung und Bewegung passiver Heterogenitäten**

Diese Arbeit ist ein Beitrag zur Entwicklung eines Modells des Erdmantels, das geophysikalische und geochemische Beobachtungen simultan reproduziert. Die Beobachtungen entstehen aus dem Zusammenspiel von thermischer Konvektion, stofflicher Differenziation und dem Verrühren der entstandenen Heterogenitäten im Mantel. Es wird also noch eine Möglichkeit zur Beschreibung chemischer Felder benötigt. Obwohl die chemischen Felder prinzipiell auf die Konvektion rückwirken können<sup>1)</sup>, beschränkt sich die vorliegende Arbeit noch auf die Advektion passiver Heterogenitäten und berücksichtigt auch keine chemischen Erhaltungsgleichungen.

#### **4.1. Marker**

##### **4.1.1. Methoden zur Beschreibung chemischer Felder**

Van Keken et al. (1997) vergleichen die drei bekannten Methoden zur Beschreibung chemischer Felder in thermischer Konvektion: die Feldmethode, die Markerkettenmethode und die Markermethode.

Feldmethode: Dieser Ansatz behandelt jede chemische Eigenschaft als ein kontinuierliches Feld, gegebenenfalls mit Quellen und Senken. Analog zum Temperaturfeld können dann Standardverfahren zur Lösung parabolischer Differenzialgleichungen für die Advektion des Feldes benutzt werden. Ein Problem bei dieser Methode ist die immer auftretende numerische Diffusion. Im Gegensatz zur thermischen ist chemische Diffusion bei der Mantelevolution aber klein und sollte nicht noch numerisch verstärkt werden. Da außerdem für jede chemische Eigenschaft eine eigene Feldgleichung aufgestellt und gelöst werden muss, ist die Methode nicht sehr variabel. Sie hat aber den Vorteil, dass die Chemie auf dem gleichen eulerschen Gitter behandelt wird wie die thermische Konvektion. Deshalb kann der Rechenaufwand geringer als bei den anderen Methoden sein, besonders bei der Beschreibung einer aktiven Komponente.

Markermethode: Ein Marker ist ein infinitesimales Partikel, das sich mit der Strömung bewegt und dabei chemische Information trägt. Es ist passiv, wenn es die Strömung nicht beeinflusst. Markermethoden berechnen die Trajektorien  $\vec{x}(t)$  von Markern aus dem Geschwindigkeitsfeld:

$$(4.1-1) \quad \vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

Die Markerpositionen sind also nicht mehr an das eulersche Gitter gebunden. Neben der zeitlichen Integration ist jetzt eine Zuordnung des Markers zum Gitter und eine Interpolation des Geschwindigkeitsfeldes auf die Markerpositionen nötig. Bei aktiven Komponenten kommt noch eine Interpolation der Markereigenschaften auf das eulersche Gitter hinzu. Das ist rechenaufwändig, aber die numerische Diffusion bleibt klein. Jeder Wechsel zwischen eulerschem und lagrangeschem (= Markerpositionen) Gitter führt allerdings zu einem als Rauschen zu charakterisierenden Fehler (vgl. 4.1.2). Da jedem Marker ohne großen Mehraufwand verschiedene chemische Eigenschaften zugeordnet werden können, ist die Methode sehr flexibel und wird in dieser Arbeit angewandt. Außerdem ist so eine Übertragung der bei Walzer & Hendel (1997a, b, 1999a) verwendeten Markeralgorithmen auf die 3D sphärischen Modelle möglich.

---

<sup>1)</sup> z.B. über ortsabhängige Heizleistung, Massendichte, Viskosität etc.

## 4.1. Marker

Markerkettenmethode: Hierbei wird nur die Grenzfläche (Linie in 2D) zwischen chemisch unterschiedlichen Gebieten durch Marker beschrieben. Wenn sich zwei benachbarte Marker zu weit voneinander entfernen, wird zwischen ihnen ein neuer Marker eingefügt. Die Methode ist genauer als die beiden anderen und für kleine Verformungen auch am wenigsten aufwändig. Allerdings wächst die Grenzfläche –und damit die Markerzahl– in chaotischen Strömungen exponentiell in der Zeit. Daher ist die Methode für lange Evolutionsrechnungen nicht geeignet, insbesondere, wenn eher großräumige Strukturen interessieren.

### 4.1.2. Markermodul in TERRA

In der Ausgangsversion von TERRA war ein Markerverfahren zur Beschreibung von Platten an der Oberfläche enthalten. Mit dessen Erweiterung auf den ganzen Mantel war bereits begonnen worden, als ich von D. Stegman (damals UC Berkeley) ein schon fast fertiges Markermodul übernehmen konnte. Die Entwicklung eines eigenen Moduls habe ich daraufhin abgebrochen, mit der Einarbeitung in Stegmans Modul begonnen, bei Debugging und Programmierung geholfen und die Testung des neuen Moduls übernommen.

Numerik: Da eine Rückkopplung der Marker auf die Strömung prinzipiell möglich sein soll, wird die Markerbewegung simultan mit der Konvektionsberechnung und im gleichen Parallelisierungsschema durchgeführt. Im Gegensatz dazu sind Methoden, welche die Markerbewegung anhand abgespeicherter Geschwindigkeitsfelder ins Postprocessing verlegen (Schmalzl, 1996; Stemmer, 2001), nur für passive Marker nutzbar.

Wie TERRA zur zeitlichen Integration der Temperaturgleichung, benutzt auch das Markermodul ein Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung zur Bewegung der Marker im Geschwindigkeitsfeld (vgl. 3.5.3). Die Interpolation der Geschwindigkeiten vom Ikosaedergitter an die Markerpositionen ist auch zweiter Ordnung. Da die FE-Methode in TERRA auf linearen Basisfunktionen beruht, wären höhere Genauigkeiten nur scheinbar. Die Marker sind Zellen des Ikosaedergitters zugeordnet. Sobald ein Marker seine Zelle verlässt, wird er entsprechend markiert und der in Bewegungsrichtung angrenzenden Zelle zugeordnet. Eine Bewegung über mehrere Gitterpunkte ist durch das in TERRA beachtete Stabilitätskriterium von Courant-Friederich-Levy (Press et al., 1992) ausgeschlossen. Durch diese ‚Adressierung‘ ist der Aufwand für die Zuordnung der Marker zum eulerschen Gitter gering. Insbesondere wird die Kommunikation zwischen verschiedenen Prozessoren auf das Nötigste beschränkt. Jeder Marker kann neben seinen drei Ortskoordinaten weitere Eigenschaften zugeordnet bekommen. Im Falle aktiver Marker werden die Eigenschaften auf das Ikosaedergitter interpoliert und können zur Beeinflussung der Konvektionsrechnung genutzt werden.

Rauschen: Jeder Marker repräsentiert am Anfang ein Volumen, das sich aus der Initialisierungsgeometrie ergibt. Masse und chemische Eigenschaften dieses Volumens kann man sich im infinitesimal kleinen Marker konzentriert vorstellen. Das ursprüngliche Volumen wird im Laufe der Rechnung verformt, man hat aber nur die Information über einen Punkt - die Markerposition. Im Extremfall ist der Schwerpunkt des ursprünglichen Volumens irgendwann weit von der Markerposition entfernt. Das kann dazu führen, dass sich Marker in bestimmten Gitterzellen häufen, während andere Zellen keinen oder nur wenige Marker enthalten. Je mehr Marker man verwendet, umso geringer ist dieses prinzipielle Problem der Markermethode.

Im TERRA-Markermodul wird am Anfang der Rechnung festgelegt, wie viele Marker eine Gitterzelle maximal aufnehmen kann<sup>1)</sup>. Wenn bei der Rechnung chemische Bilanzen wichtig

---

<sup>1)</sup> Die konkrete Wahl der Parameter ist ein Kompromiss zwischen initialisierten Marken ( $mp$ ), der maximalen Markerzahl je Gitterpunkt ( $np$ ) und der Anzahl der Markerattribute ( $na$ ). Der Speicherbedarf ist proportional zu  $na*np$ . Je Zeitschritt kann ein Gitterpunkt höchstens  $mp$  neue Marker aufnehmen.

## 4.1. Marker

sind (aktive Marker), werden die chemischen Eigenschaften überschüssiger Marker gleichmäßig auf die restlichen Marker der Zelle verteilt. Wenn es nur auf die Ortsinformation ankommt (passive Marker in dieser Arbeit), werden überschüssige Marker gelöscht. Der damit verbundene Masseverlust ist ein Maß für die Genauigkeit der Feldbeschreibung. Welcher Marker aufgeteilt oder gelöscht wird, hängt von der numerischen Reihenfolge ab und ist physikalisch zufällig. Wenn die Markerzahl in einem Gitterpunkt unter einen kritischen Wert fällt, werden die restlichen Marker halbiert. Alter und neuer Marker haben jeweils die halbe Masse des alten Markers. Alte Marker behalten alle anderen Attribute. Neue Marker bekommen die mittleren chemischen Attribute der umgebenden Gitterpunkte und werden an physikalisch zufälligen Stellen der Zelle eingesetzt. Bei aktiven Markern ist dieser Algorithmus nötig, um chemische Felder im eulerschen Gitter immer vollständig zu beschreiben. Wenn es nur auf die Ortsinformation ankommt, kann er schädlich sein. In dieser Arbeit wird er nicht benutzt.

### 4.1.3. Tests des Markermoduls

Stationäre Advektion: Es werden stationäre Geschwindigkeitsfelder vorgegeben und die Abweichungen der Markertrajektorien von den analytisch berechneten gemessen. Wenn das Geschwindigkeitsfeld der Rotation eines starren Körpers um eine Achse durch den Kugelmittelpunkt entspricht, dann ist die Abweichung der Abstand zwischen Start- und Endpunkt nach einer Umdrehung. Wenn das Geschwindigkeitsfeld räumlich konstant ist, wird die Abweichung vom berechneten Weg beim jeweiligen Austrittspunkt aus dem Mantel gemessen. Die Abweichungen aller Marker werden mit der theoretischen Weglänge normiert und statistisch ausgewertet. Alle Tests wurden auf 128 Prozessoren der Jülicher Cray T3E600 mit der in dieser Arbeit durchgängig verwendeten Auflösung (vgl. Tab. 3.2-I)  $mt = 64$ ,  $np = 12$ ,  $mp = 8$  und 2621440 Markern durchgeführt. Die einzelnen Ergebnisse sind in Tabelle 4.1-I zusammengefasst.

Rotation um Achse	Translation entlang Achse	Lauf	$\Delta t$	Ge-löschte	min. Ab- weichung [%]	mittlere Abweichung [%]	max. Ab- weichung [%]
z		521	0,0005	0	0,003049	0,004219	0,005075
z		522	0,002	0	0,000344	0,001602	0,002622
z		523	0,0025	0	0,000036	0,000532	0,001704
z		524	0,004	0	Absturz (Courant-Kriterium verletzt)		
z		509	0,001	0	0,002556	0,003725	0,004579
-z		510	0,001	0	0,002556	0,003725	0,004578
y		511	0,001	0	0,002868	0,003872	0,004842
-y		512	0,001	0	0,002870	0,003872	0,004828
x		513	0,001	0	0,002820	0,003849	0,004735
-x		514	0,001	0	0,002820	0,003849	0,004735
	z	515	0,001	409	0	0	0
	-z	516	0,001	409	0	0	0
	y	517	0,001	60	0	0	0
	-y	518	0,001	58	0	0	0
	x	519	0,001	68	0	0	0
	-x	520	0,001	68	0	0	0

**Tab. 4.1-I:** Genauigkeit der Markerbewegung in stationären Geschwindigkeitsfeldern. Das Courant-Kriterium besagt, dass ein Marker je Zeitschritt höchstens in die Umgebung eines benachbarten Gitterpunktes wechseln darf. Bei Rotation ist es  $\Delta t \approx 0,0031$  und bei Translation  $\Delta t \approx 0,0062$ . Bei Konvektionsrechnungen wird die Zeitschrittweite entsprechend dem globalen Maximum der Geschwindigkeit festgelegt. Da sie an den meisten Punkten niedriger ist, wurden hier auch kleinere Zeitschrittweiten gewählt.

## 4.1. Marker

Ein Marker, der sich 4,49 Ga mit 3,9 cm/a bewegt, würde also weniger als 10 km von seiner Bahn abweichen. Dieser Fehler ist vernachlässigbar. Da die zeitliche Integration mit den gleichen Standardverfahren wie bei der Konvektionsberechnung erfolgt, wurde auf Tests mit zeitlich veränderlichen Geschwindigkeitsfeldern verzichtet.

Gelöschte: Die Masse, die von allen Markern repräsentiert wurde, die während einer Evolutionsrechnung gelöscht worden waren, ist bei jedem Modell (Abb. 5.\*-25) mit angegeben. Sie liegt meist unter 2 %.

Markerabdeckung: Zur Auswertung werden die Marker in ein kartesisches Gitter einsortiert. Dessen Gitterweite ist mit 125 km der des hier verwendeten Ikosaedergitters ähnlich. Der Prozentsatz von Zellen ohne Marker am Ende der Evolutionsrechnung ist bei jedem Modell (Abb. 5.\*-29) unter ‚void cells‘ angegeben. Er ist meist kleiner als 2 %. Bei einer Gitterweite von 100 km sinkt die Markerabdeckung im Referenzmodell (Walzer et al., 2003a) auf etwa 91 %, bei 150 km steigt sie auf 99 % und bei 225 km ist sie 100 %. Dabei wurden von jedem Marker durchschnittlich 21255 km zurückgelegt, maximal 34522 km und minimal 3963 km.

### 4.1.4. Unterscheidbare Marker

Im Rahmen dieser Arbeit sollte anfangs die Entstehung der DUPAL-Anomalie untersucht werden. Das wurde später aufgegeben, weil die Konvektionsmodelle noch nicht erdähnlich genug sind. Die entwickelte Methodik könnte allerdings für andere Studien interessant sein und wird deshalb kurz skizziert. Jeder Marker erhält eine eindeutige Nummer. Diese behält er während der ganzen Evolutionsrechnung. Diese Nummer wird zusammen mit den Positionsdaten und anderen Attributen zu den interessierenden Zeitpunkten vom Programm ausgegeben. Im Nachhinein können dann z.B. im jüngsten Ausgabeschritt ausgewählte räumliche Bereiche markiert werden. Die Nummern der darin liegenden Marker werden gespeichert und dienen zum Auffinden der Herkunftsbereiche des markierten Volumens in früheren Zeitschritten.

Durch die Auswertung des Abstandes zwischen verschiedenen Markern zu zwei Zeitpunkten der Rechnung lassen sich möglicherweise auch konvektiv isolierte Bereiche finden: Marker, die am Anfang benachbart sind, sollten in einem konvektiv isolierten Bereich auch am Ende Nachbarn sein. Das wäre eine Alternative zu den von Haller (2001a, b) vorgeschlagenen Methoden.

### 4.2. Beschreibung von Vermischung

Da stoffliche Diffusion für die Evolution großräumiger Heterogenitäten im Erdmantel vernachlässigbar ist, wird hier nur das Verrühren durch konvektive Strömungen betrachtet (vgl. 2.3.1). Es gibt keine allgemeine Theorie der Vermischung, weder für den Zustand noch für den Prozess. Im Folgenden werden zunächst einige der für die Untersuchung des Mischungsverhaltens von Mantelkonvektionsmodellen gebräuchlichen Methoden, ihre Vor- und Nachteile skizziert. Dann wird speziell auf die in dieser Arbeit entwickelten Methoden zur Beschreibung des Mischungszustandes eingegangen. Die Auswahl der Methodik zur Mischungsbeschreibung orientiert sich vor allem an dem Ziel, für die Entwicklung eines Konvektions-Differenzierungs-Modells des Erdmantels sinnvoll zu sein. Insbesondere sollte die Auswertung im Postprocessing möglich sein und kaum Ressourcen während der Konvektionsrechnung benötigen.

#### 4.2.1. Methoden im Überblick

Auswertung einzelner Trajektorien: Die offensichtlichste Methode zur Veranschaulichung des Stofftransportes ist die Darstellung von Markertrajektorien. Sie wird z.B. von Schmalzl (1996) und van Keken & Zhong (1999) angewandt. Auch im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Programm zur Darstellung von Markertrajektorien entwickelt. Es wird aber nur zu Illustrationszwecken (Abb. 4.2-1) eingesetzt, da die Darstellung einzelner Bahnen kein umfassendes Bild vom Prozess der Vermischung liefert. Pro Lauf werden in dieser Arbeit über 2 Millionen Markerbahnen berechnet und es wäre Zufall, eine repräsentative Auswahl zu treffen.

In Poincaré-Schnitten werden die Schnittpunkte einer Trajektorie mit einer Ebene dargestellt. Diese Methode ist nur für stationäre Strömungen sinnvoll und das Problem der Markerauswahl bleibt.

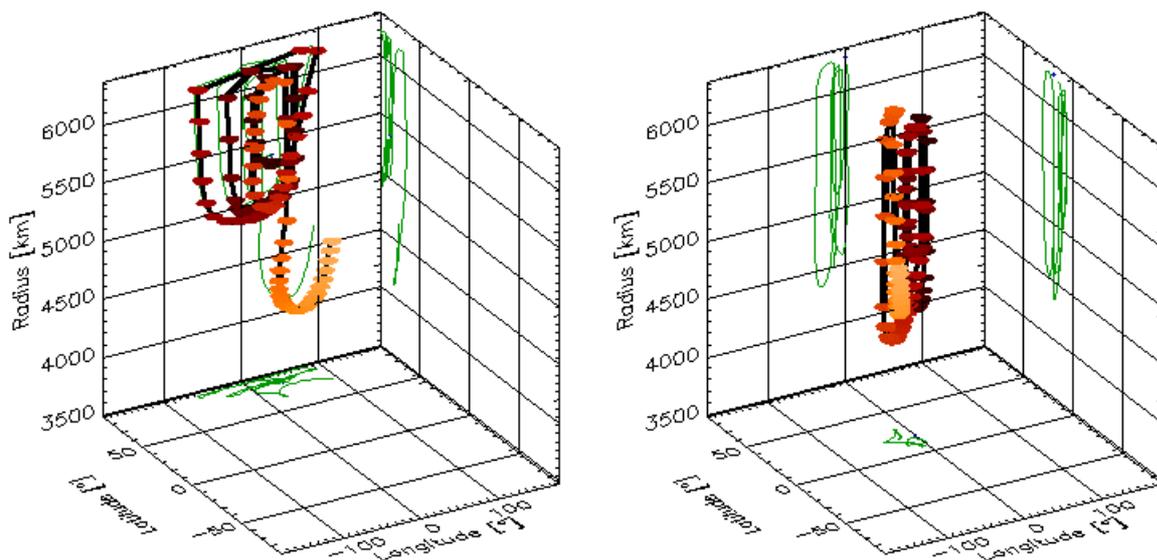


Abb. 4.2-1: Spur zweier Marker im reproduzierten Referenzmodell von Walzer et al. (2003a). Zwischen zwei Punkten liegen jeweils 50 Ma. Junge Punkte sind heller als alte.

Lokale Verformungsmessung: In diese Kategorie fallen Methoden, bei denen die zeitliche Entwicklung der Verformung entlang jeder Trajektorie integriert wird. Um speziell Gebiete exponentiellen Wachstums zu erkennen, werden Ljapunov-Exponenten definiert (siehe z.B. Ferrachat & Ricard, 1998). Man kann entweder die Zeit messen, die zur Vergrößerung des Anfangsabstandes zweier Punkte um einen festen Faktor nötig ist (finite-size Lyapunov

## 4.2. Beschreibung von Vermischung

exponent = FSLE) oder die Verformung, die in einer festgelegten Zeit erreicht wird (finite-time Lyapunov exponent = FTLE). Beide messen die lokalen Mischungseigenschaften der Strömung. Der FTLE ist am besten zum Auffinden dynamisch ausgezeichneter Gebiete (reguläres vs chaotisches Mischungsverhalten) geeignet (Farnetani & Samuel, 2003). Die Grenzen zwischen Gebieten verschiedenen Mischungsverhaltens und Separatrizes der Strömung können durch die Identifikation anziehender und abstoßender Linien (2D) oder Flächen (3D) gefunden werden (Haller, 2001a,b,c; Haller & Poje, 1998; Haller & Yuan, 2000). Die genannten Methoden können prinzipiell zur Untersuchung aperiodisch zeitabhängiger Strömungen eingesetzt werden.

Die Suche nach lagrangeschen Strukturen ist die mathematisch fundierteste Methodik zur Beschreibung des Mischungsverhaltens von Strömungen. Der Prozess der Vermischung wird direkt untersucht und nicht über die Beschreibung des Mischungszustandes zu verschiedenen Zeitpunkten. Die theoretischen Grundlagen wurden aber erst in jüngster Zeit entwickelt (Haller, 2001a,b,c; Haller & Poje, 1998; Haller & Yuan, 2000) und es gibt noch nicht genügend Erfahrungen mit der Anwendbarkeit auf 3D Strömungen. Außerdem sind die Ergebnisse nur sinnvoll, wenn sich die lagrangesche Struktur im betrachteten Zeitraum kaum ändert. Die Programmierung der entsprechenden Algorithmen ist vergleichsweise aufwändig und trägt wenig zur Entwicklung eines Konvektions-Differenzierungsmodells des Erdmantels bei. Die Integration der Verformung entlang einer Trajektorie ist mit dem hier verwendeten Markermodul kaum im Postprocessing möglich (vgl. 4.1.2). Wegen der genannten Nachteile wurde vorerst kein Versuch zur Anwendung dieser Methoden unternommen.

Statistische Beschreibung des Geschwindigkeitsfeldes: In turbulenten Strömungen wird die auf großen Längenskalen eingebrachte Energie kaskadenförmig auf immer kleinere Wirbelstrukturen übertragen (Kolmogorov, 1941). Dieses Verhalten kann zur Beschreibung des Mischungsverhaltens genutzt werden (Falcovich et al., 2001). Es gibt keine einheitliche Definition von Turbulenz. Wenn man von der Definition ausgeht, dass turbulente Strömungen Reynoldszahlen  $Re \gg 1$  haben, so ist Mantelkonvektion aber nicht turbulent ( $Re \sim 10^{20}$ ). Die Reynoldszahl gibt dabei das Verhältnis der kinetischen zur dissipierten Energie des Systems an (Biechele, 2000). Obwohl die Mischungsvorgänge im Erdmantel auch skalenabhängig sind (Schmalzl & Hansen, 1994), ist die Theorie turbulenter Strömungen hier vermutlich nicht anwendbar.

Die folgenden Methoden beschreiben den Mischungszustand zwischen zwei Komponenten zu festen Zeitpunkten. Mir ist kein Maß bekannt, das eine andere Anzahl von Komponenten berücksichtigt.

Entwicklung eines anfangs kleinen Stoffpaketes: Bei dieser Kategorie wird ein kleines Volumen im Strömungsgebiet markiert und die folgende Ausbreitung der Markierung ausgewertet. Das kann im lagrangeschen Sinne durch die Messung der Abstände zwischen einzelnen Markern und Berechnung einer Korrelationsdimension geschehen (Schmalzl, 1996; Stegman et al., 2002). Der Rechenaufwand steigt hierbei quadratisch mit der Markerzahl. Im eulerschen Sinne kann man das Rechengebiet in kleine Zellen einteilen und auswerten, wie viele Zellen wann und mit wie vielen Markern belegt sind (box counting). Christensen (1989) untersucht z.B., wie viele Zellen wenigstens einen Marker enthalten.

Das Problem bei dieser Methode ist ähnlich wie bei der Auswertung einzelner Trajektorien. Die Ergebnisse können von der Anfangsposition der Markierung abhängen und es gibt unendlich viele Möglichkeiten der Initialisierung. Weiterhin muss die Markerdichte am Anfang sehr hoch sein. Dafür ist das Markermodul in TERRA nicht ausgelegt (vgl. 4.1.2). Die nötigen Programmänderungen wären für die globale Beschreibung chemischer Felder nicht

## 4.2. Beschreibung von Vermischung

sinnvoll. Deshalb kam für die vorliegende Arbeit keine Methode aus dieser Kategorie in Frage.

Beschreibung von Grenzflächen: Der grundlegende Mechanismus des Verrührens besteht in der wiederholten Dehnung und Faltung von Heterogenitäten. Ohne Diffusion würde sich eine Grenzfläche dabei nie selbst berühren. Dieser Effekt ermöglicht die Markerkettenmethode (4.1.1). Der durchschnittliche Abstand zwischen den entstehenden Filamenten (striation thickness) ist ein Maß des Mischungszustandes. Die Methode ist zwar physikalisch sinnvoller als andere, erfordert aber erhebliche Rechnerressourcen (Ten et al., 1998). Die genaue Definition der für diese Beschreibung nötigen Grenzflächen ist mit der hier verwendeten, reinen Markermethode problematisch.

Bei einem anderen Ansatz (Ten et al., 1997) wird der Mischungszustand durch die fraktale Dimension eines markierten Gebietes definiert. Das Verfahren ähnelt der von Christensen (1989) benutzten Box-Counting-Methode, zusätzlich wird aber die Zellengröße des Auswertegitters variiert. Nach einigen Tests wurde dieser Ansatz in der vorliegenden Arbeit aber nicht weiter verfolgt. Erstens ist die Einsortierung des Markerkfeldes in verschiedene Auswertegitter sehr rechenintensiv. Zweitens ist die Anzahl der auflösbaren Skalen zu gering für sinnvolle fraktale Analysen. Ten et al. (1997) führen die Advektion des chemischen Feldes und die fraktale Auswertung in 2D auf einem 20 mal feineren Gitter als die Konvektionsberechnung durch. Bei der hier verwendeten Auflösung in 3D würde das etwa die 4000-fache Anzahl von Markern und Auswertegitter von  $5,2e9$  Zellen bedeuten. Deshalb wurde nach anderen Methoden gesucht, die nicht so sehr auf die exakte Darstellung der Grenzfläche zwischen den zwei zu mischenden Komponenten angewiesen sind.

Feldbeschreibung: Beim Verrühren von zwei Komponenten, A und B, ohne Diffusion, kann jeder Raumpunkt immer nur einen der beiden Werte (100 % A oder 100 % B) annehmen. Bei endlicher räumlicher Auflösung oder durch das Wirken von Diffusion werden diese diskreten Werte über endliche Raumbereiche gemittelt und es entstehen Felder kontinuierlicher Werte. Die geochemischen Felder im Erdmantel werden durch kontinuierlich variierende Prozesse (Temperatur, Schmelz- und Extraktionsgrad ...) erzeugt, die sich wie Diffusion auswirken. Bei plutonischen Proben kommt eine Mittelung über endliche Raumbereiche hinzu, die durch die Dimensionen voneinander unabhängiger Magmenquellen bestimmt ist. Eine Ausnahme bilden lediglich Hochtemperatur-Peridotite, an denen die Struktur und Chemie des oberen Mantels direkt beobachtet werden kann (Kellogg, 1991). Auf jeden Fall sind geochemische Felder nicht auf diskrete Werte beschränkt. In Hinblick auf die angestrebte Modellierung der chemischen Evolution des Erdmantels erschien es deshalb sinnvoll, Beschreibungen für den Mischungszustand kontinuierlicher Felder zu entwickeln.

Zunächst bietet sich eine spektrale Analyse durch die Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen an (z.B. Yang, 1997). Ein entsprechendes Programm zur Auswertung von Temperaturfeldern ist in TERRA vorhanden. Dabei werden aber jeweils nur die auf einer 2D Kugelfläche liegenden Gebiete betrachtet. Außerdem werden im Rahmen dieser Arbeit die Heterogenitäten erst im Postprocessing erzeugt. Auf dem Ikosaedergitter sind also gar keine chemischen Felder definiert. Für eine Auswertung chemischer Felder analog zum Temperaturfeld müssen diese aber im gleichen Format vorliegen und es hätte entweder ein neues Programm zur spektralen Auswertung oder eine Anpassung an das vorhandene geschrieben werden müssen. Da die chemischen Felder bei den angestrebten Rechnungen mit aktiven Markern auf dem Ikosaedergitter definiert sein werden, erschien dies überflüssig.

Ansonsten ist mir kein geeignetes Verfahren zur Beurteilung der Heterogenität kontinuierlicher Felder aus der geodynamischen Literatur bekannt.

## 4.2. Beschreibung von Vermischung

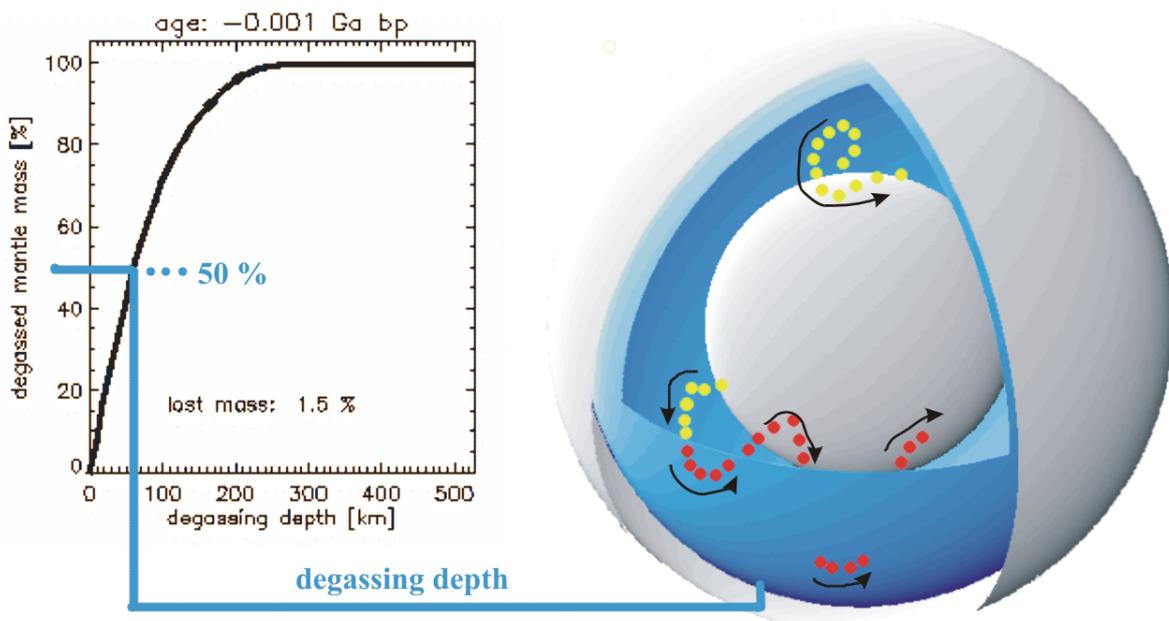
### 4.2.2. Erzeugung von Heterogenitäten

Bei der Konvektionsberechnung mit TERRA wird der Erdmantel als chemisch homogen angesehen. Da die Charakterisierung des Mischungsverhaltens in dieser Arbeit über die Beschreibung von Mischungszuständen zu verschiedenen Zeitpunkten erfolgen soll, müssen erst einmal zwei Komponenten definiert werden, die sich vermischen können. Dabei kann es wichtig sein, wo die Grenzfläche zwischen beiden Komponenten initialisiert wird.

Durch Extraktion partieller Schmelze und Entgasung werden nahe der Erdoberfläche geochemische Heterogenitäten erzeugt und anschließend durch die Konvektion im Erdmantel verrührt. Dieses Wechselspiel zwischen Differenzierung und Vermischung soll hier in einfacher Weise berücksichtigt werden.

Um einen Vergleich verschiedener Modelle untereinander zu erleichtern, soll das Massenverhältnis beider Komponenten in allen Modellen am Ende das gleiche sein. Für die Beschreibung des Mischungszustandes ist es am günstigsten, wenn beide Komponenten zu gleichen Teilen vorkommen (vgl. 4.2.3).

Während der Konvektionsrechnung speichert jeder Marker die größte Nähe zur Erdoberfläche, die er während des gesamten Laufes jemals erreicht hat. Die Markerfelder (Position, Nummer und maximal erreichter Radius) werden zu verschiedenen Zeitpunkten von TERRA ausgegeben. Im der Jetztzeit entsprechenden, letzten Ausgabeschritt werden dann im Postprocessing die Marker gekennzeichnet, die der Oberfläche am nächsten gekommen sind. Diese Kennzeichnung wird im Folgenden als ‚Entgasung‘ bezeichnet, da sie als Modell der Entgasung primordialer, nicht radiogener Gase aus dem Mantel dienen könnte. Es wird mit den Markern begonnen, die den größten Radius erreicht haben. Dann werden nacheinander solange weitere Marker als entgast gekennzeichnet, bis sie zusammen 50 % der Gesamtmasse des Mantels repräsentieren. Die vom zuletzt markierten Marker erreichte Tiefe wird als Entgasungstiefe bezeichnet (Abb. 4.2-2). Anhand dieser Entgasungstiefe können dann auch die Markerfelder in früheren Ausgabezeitschritten in zwei Komponenten geteilt werden. Dabei sind in der Regel dann weniger als 50 % entgast, da noch nicht alle Marker ihre größte Nähe zur Oberfläche erreicht hatten.



**Abb. 4.2-2:** Erzeugung von Heterogenitäten. Jeder Marker, der während der Rechnung mindestens einmal oberhalb der Entgasungstiefe war, wird rot markiert. Alle anderen Marker bleiben gelb. Die Entgasungstiefe (blau) wird so gewählt, dass zur Jetztzeit 50 % der durch die Marker repräsentierten Mantelmasse rot markiert sind.

## 4.2. Beschreibung von Vermischung

Es sei noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass es sich bei der als ‚Entgasung‘ bezeichneten Markierung der Marker nicht um eine Differenziation im geochemischen Sinne handelt. Es werden z.B. keine Schmelztemperaturen beachtet. Die Entgasungstiefe richtet sich nur nach der Bedingung, dass am Ende der Rechnung 50 % der durch die Marker repräsentierten Mantelmasse markiert sein sollen. Es werden deshalb in allen Modellen genau 50 % als entgast gekennzeichnet, weil sich die Heterogenität dann am besten beschreiben lässt (vgl. 4.2.4) und die Modelle vergleichbar werden. In den angestrebten Modellen zur chemischen Evolution des Erdmantels sollen die Heterogenitäten dann unter physikalischen Gesichtspunkten entstehen.

### 4.2.3. Auswertegitter

Die Marker sind frei beweglich und ihre Positionen bilden kein stationäres Gitter. Jeder Marker  $j$  hat eine Masse  $M_j$  und einen Wert  $c_{v,j}$ , der chemisch als die Konzentration eines Stoffes  $v$  interpretiert werden kann. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Konzentrationswerte auf das Intervall  $c_v \in [0,1]$  normiert sind. Dabei entspricht  $c_v = 0$  der minimal möglichen Konzentration in allen zu vergleichenden Modellen und  $c_v = 1$  der maximal möglichen.

Für die Auswertung im Postprocessing mit dem Programmpaket IDL müssen die irregulär verstreuten Punkte auf ein reguläres Gitter interpoliert werden. Dazu wird das Rechengebiet in quadratische Zellen eingeteilt. In Analogie zum Konzept der kleinsten unabhängigen Magmenquelle (vgl. 4.2.1) erhält jede Zelle  $k$  den gewichteten Mittelwert  $z_k$  aller in ihr enthaltenen Marker. Die Position eines Markers in der Zelle spielt dabei keine Rolle.

$$(4.2-1) \quad z_k = \frac{\sum_j M_j c_j}{\sum_j M_j} \in [0,1]$$

Die Zellenmasse ist dann

$$(4.2-2) \quad M_k = \sum_j M_j$$

Diese Art der Mittelwertbildung hat den Vorteil, dass die Ortsinformation für lange Zeiten am besten wiedergegeben wird. Durch die Abkopplung der Marker vom eulerschen Gitter kann es aber dazu kommen, dass eigentlich äquivalente Zellen unterschiedliche Markermassen enthalten. Die globale<sup>1)</sup> Bilanz der Menge oder Masse der Komponente  $v$

$$(4.2-3) \quad C_{v,mantle} = \sum_j M_j c_{v,j} = \sum_k M_k z_{v,k}$$

und der Masse

$$(4.2-4) \quad M_{mantle} = \sum_j M_j = \sum_k M_k$$

bleiben bei Summation über alle Marker  $j$  oder alle Zellen  $k$  erfüllt. Lokale Bilanzen können aber verletzt werden, die eulersche und die lagrangesche Masse in einer Zelle stimmen dann nicht mehr überein. Bei Rechnungen mit aktiven Markern ist es eventuell wichtiger, lokale Bilanzen zu erfüllen. Das kann z.B. geschehen, indem die eulersche Zellenmasse  $M_k$  auf die Marker der Zelle verteilt wird oder indem man bei der Mittelwertbildung eine mittlere Markierzahl verwendet. Die Erzwingung globaler Bilanzen wird dann mit einem Verlust an Ortsinformation erkauft, da Teile des chemischen Feldes ohne physikalischen Grund zwischen den Markern umverteilt werden. Es soll nur auf dieses generelle Problem der Markermethode (vgl. 4.1.2) hingewiesen werden, da es bei der Berechnung der chemischen Evolution des Mantels beachtet werden muss. Die Wahl der ortsgenauen Mittelung konnte

<sup>1)</sup> global bezieht sich hier auf das Rechengebiet, also den silikatischen Teil der Erde

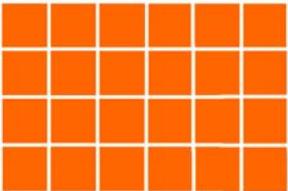
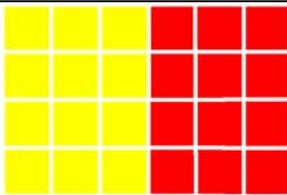
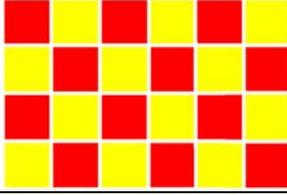
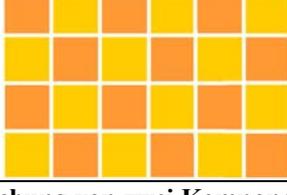
## 4.2. Beschreibung von Vermischung

hier ohne Rücksicht auf die Erfordernisse aktiver Marker erfolgen, da die Einsortierung in ein eulersches Gitter hier im Postprocessing, bei aktiven Markern aber in TERRA erfolgt.

Da der IDL-interne Algorithmus zur Interpolation irregulärer Felder auf ein reguläres Gitter mit den hier auftretenden, großen Datensätzen nicht ging, habe ich einen effizienten Algorithmus für diese Aufgabe entwickelt (regu.pro). Dieser wird in vielen Auswerteprogrammen dieser Arbeit verwendet und ist im Quelltext ausführlich kommentiert. Es müssen die Zellengröße des Auswertegitters und die Anzahl der Versetzungen des Koordinatenursprungs festgelegt werden. Üblicherweise wird jedes Markerfeld achtmal in ein jeweils leicht versetztes Auswertegitter mit 125 km Maschenweite einsortiert. Das Ergebnis ist ein Feld mit 62,5 km Maschenweite, bei dem jeder Punkt die mittlere Konzentration des umgebenden Würfels mit 125 km Seitenlänge darstellt. Durch diesen Kunstgriff werden die Ergebnisse unabhängiger von der willkürlichen Wahl eines einzelnen Auswertegitters und grafische Darstellungen in höherer Auflösung sind möglich. Wo nötig, werden so auch auf dem Ikosaedergitter definierte Felder in ein kartesisches Gitter übertragen. Dabei müssen lediglich die Markerpositionen durch die Koordinaten des TERRA-Gitters ersetzt werden.

### 4.2.4. Bewertung des Mischungszustandes: Heterogenität

Es wird ein phänomenologisches Maß zur Quantifizierung des Mischungszustandes des im Auswertegitter gegebenen, kontinuierlichen Feldes gesucht. Abb. 4.2-3 verdeutlicht das Problem anhand eines 2D Feldes.

homogener Bezugszustand	Unterschied zum Bezugszustand	Beispielfeld	Beschreibung
	groß		<u>Fall A:</u> - schlecht verrührt in großen Maßstäben - nicht vermischt im Zellenmaßstab
	mittel		<u>Fall B:</u> - gut verrührt im großen Maßstäben - nicht vermischt im Zellenmaßstab
	mittel		<u>Fall C:</u> - schlecht verrührt in großen Maßstäben - gut vermischt im Zellenmaßstab
	klein		<u>Fall D:</u> - gut verrührt in großen Maßstäben - gut vermischt im Zellenmaßstab

**Abb. 4.2-3:** Grundlegende Fälle, die bei der Vermischung von zwei Komponenten (rot und gelb) auftreten können. Die stoffliche Gesamtzusammensetzung soll in allen fünf Bildern gleich sein. Der Vermischungszustand unterhalb des Zellenmaßstabes wird durch die Zulassung kontinuierlicher Zellenwerte erfasst.

Es wird davon ausgegangen, dass das Verrühren auf einen im Zellenmaßstab homogenen Endzustand hinwirkt. Der Unterschied zu diesem Bezugszustand soll beschrieben werden. Eine anfangs großskalige Heterogenität wird in einfachen Konvektionsströmungen zuerst in

## 4.2. Beschreibung von Vermischung

großen und später hin zu immer kleineren Strukturen verrührt (Ten et al., 1997). Bei der Differenziation im Erdmantel und auch im hier vorgestellten Algorithmus können dauernd neue Heterogenitäten erzeugt werden<sup>1)</sup>. Da außerdem verschieden stark mischende Bereiche nebeneinander existieren können, kann die Größenverteilung der Heterogenitäten von Fall zu Fall verschieden sein.

Mittlere absolute Abweichung vom globalen Mittelwert: Der Wert

$$(4.2-2) \quad \bar{D}_v = \frac{\sum_k |z_{v,k} - \bar{z}_v| \cdot M_k}{\sum_k M_k}$$

mit dem massegewichteten globalen Mittelwert

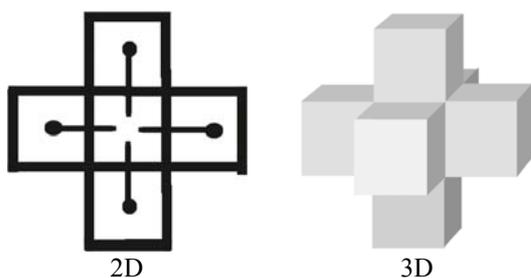
$$(4.2-3) \quad \bar{z}_v = \frac{\sum_k z_{v,k} \cdot M_k}{\sum_k M_k}$$

beschreibt die globale Streubreite der Zellenwerte. Damit könnten in Abb. 4.2-3 die Fälle guter kleinräumiger Vermischung (C,D) von den Fällen schlechter Vermischung im Zellenmaßstab (A,B) unterschieden werden. Da keine Ortsinformation berücksichtigt wird, kann Fall A nicht von Fall B und Fall C nicht von Fall D getrennt werden.

Mittlerer Kontrast<sup>2)</sup>: Unter Kontrast wird hier die mittlere Absolutabweichung des Wertes einer Zelle von den Nachbarzellen verstanden. Durch die vorhergehende Skalierung der Felder gilt  $z \in [0,1]$  und die Kontraste sind automatisch mit dem global möglichen Wertebereich normiert.

$$(4.2-6) \quad K_{v,k} = \frac{\sum_n |z_{v,k} - z_{v,n}| \cdot M_n}{\sum_n M_n}$$

Der Kontrast ist ein lokales Maß der Heterogenität. In den hier programmierten Algorithmen werden nur die sechs Nachbarn (Index  $n$  in 4.2-6) berücksichtigt, die mit der mittleren Zelle (Index  $k$  in 4.2-6) jeweils eine Seite gemeinsam haben (Abb. 4.2-4).



**Abb. 4.2-4:** Für die Berechnung des lokalen Kontrastes der mittleren Zelle berücksichtigte Nachbarzellen. Die 2D Darstellung ist nur als Ergänzung zu Bild 4.2-3 angegeben. Verwendet wird ausschließlich die 3D Variante.

Der mittlere Kontrast ist der globale Mittelwert aller lokalen Kontraste und ein Maß für die Größe der Grenzfläche zwischen Gebieten mit verschiedenen Konzentrationen der beiden zu mischenden Komponenten.

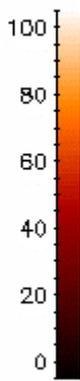
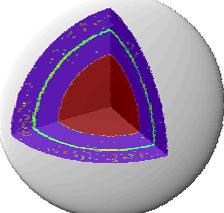
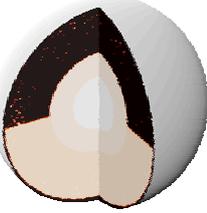
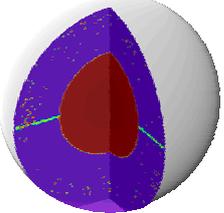
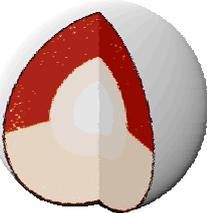
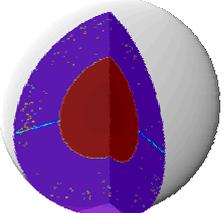
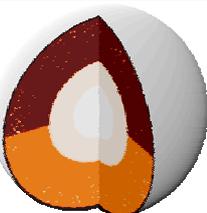
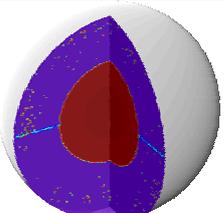
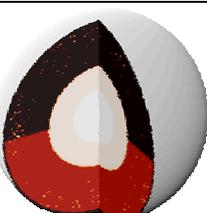
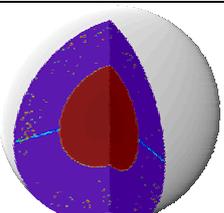
<sup>1)</sup> Im Erdmantel ist die Differenziation an das Auftreten partieller Schmelze gebunden, im Programm nur an die räumliche Nähe zur Oberfläche. Allerdings ist die Krustendifferenziation tatsächlich ein oberflächennaher Prozess und die hier vorgestellte Methode stellt eine einfache Näherung dafür dar.

<sup>2)</sup> Der Begriff 'Kontrast' ist in der Physik nicht einheitlich definiert, wird aber immer zur Beschreibung des (Helligkeits-) Unterschiedes zwischen benachbarten Gebieten verwendet. Hier wird zwar eine andere Normierung benutzt, aber es geht auch um die Beschreibung lokaler Unterschiede. Deshalb erschien der Begriff passend. Da er in dieser Arbeit nur in der hier definierten Form vorkommt, besteht keine Verwechslungsgefahr.

## 4.2. Beschreibung von Vermischung

$$(4.2-4) \quad \bar{K}_v = \frac{\sum_k K_{v,k} \cdot M_k}{\sum_k M_k}$$

Fall C hat den geringsten mittleren Kontrast in Abb. 4.2-3, da die Werteunterschiede gering sind und die Grenzfläche zwischen den Gebieten unterschiedlicher Konzentration klein ist. Bei Fall B ist der Kontrast entsprechend am größten. Die Fälle A und D könnten mit dem mittleren Kontrast ununterscheidbar sein, da sich die Einflüsse von Grenzflächengröße und Werteunterschieden eventuell gegenseitig aufheben.

	Beispielfeld	Kontrast		$\bar{D}_v$	$\bar{K}_v$	$B_v$
% pm 			<b>Modell A:</b> - besteht zu gleichen Teilen aus entgastem (pm = 0 %) und ursprünglichem Material (pm = 100 %) - Kontrast ist an der Grenzfläche maximal (hellblau) und verschwindet an allen anderen Stellen (lila)	0,5	0,023	15,3
			<b>Modell B:</b> - Nordhalbkugel: 0 % pm, - Südhalbkugel: 100 % pm - kreisringförmige Grenzfläche hat die gleichen Kontrastwerte wie bei A, ist aber kleiner	0,5	0,006	67,2
			<b>Modell C:</b> - Nordhalbkugel: 50 % pm, - Südhalbkugel: 100 % pm - gleiche Grenzfläche wie bei B, aber mit geringeren Kontrastwerten	0,25	0,003	33,6
			<b>Modell D:</b> - Nordhalbkugel: 25 % pm, - Südhalbkugel: 75 % pm - gleiche Kontrastverteilung wie bei C	0,25	0,003	33,6
			<b>Modell E:</b> - Nordhalbkugel: 100 % pm, - Südhalbkugel: 50 % pm - gleiche Kontrastverteilung wie bei C	0,25	0,003	33,6

**Abb. 4.2-5:** Einfache Modelle zur Veranschaulichung der Heterogenität. Die Punkte in den ansonsten gleichförmigen Flächen entstehen durch unvollständige Markerabdeckung des Gebietes. Diese Modelle dienen gleichzeitig zur Testung der programmierten Algorithmen (het.pro).

**Heterogenität:** Mittlerer Kontrast und mittlere absolute Abweichung vom globalen Mittelwert erlauben also nur zusammen eine Differenzierung zwischen offensichtlich unterschiedlichen Fällen. Wenn zwei Fälle etwa gleich weit vom Bezugszustand entfernt sind, dann B und D. Sie unterscheiden sich nur in der Verteilung der Vermischungsmaßstäbe. Ein mögliches

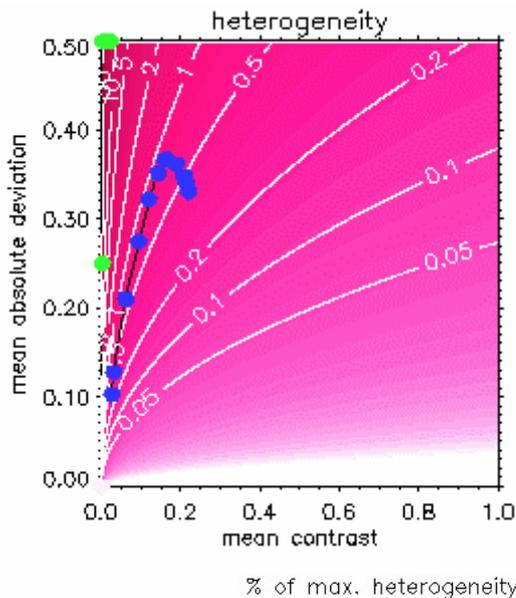
## 4.2. Beschreibung von Vermischung

globales Maß, das mit der Beurteilung der Felder in Abb. 4.2-3 übereinstimmt, wird im Folgenden Heterogenität  $B_v$  genannt:

$$(4.2-5) \quad B_v = \frac{\arctan\left[\frac{\overline{D}_v^2}{\overline{K}_v}\right]}{\frac{\pi}{2} - \arctan\left[\frac{\overline{D}_v^2}{\overline{K}_v}\right]} \quad \text{für } \overline{K}_v > 0$$

$$B_v = 0 \quad \text{für } \overline{K}_v = 0$$

$\overline{D}_v$  geht quadratisch ein, weil sich der mittlere Kontrast aus Grenzflächengröße und Werteunterschieden zusammensetzt. Letztere sollen nicht doppelt bewertet werden.

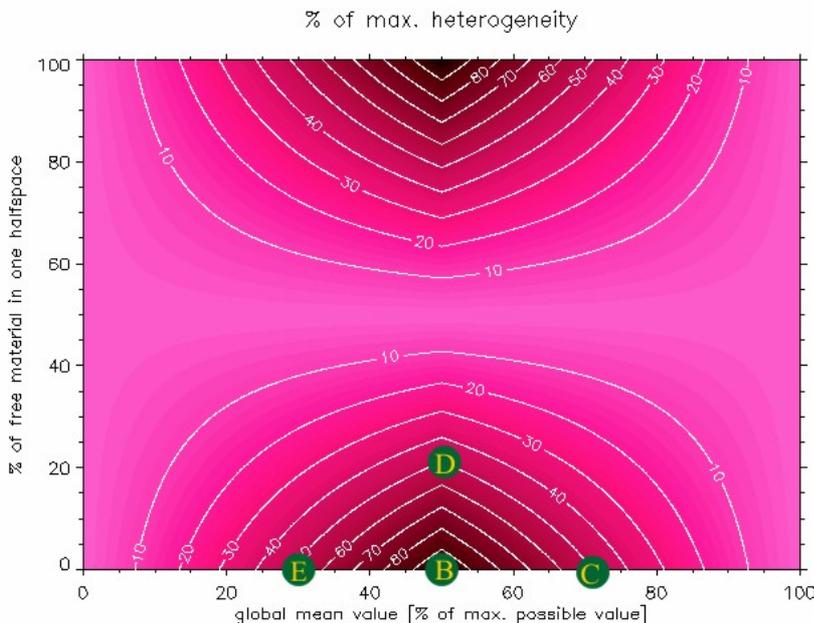


**Abb. 4.2-6:** Zusammenhang zwischen mittlerer absoluter Abweichung vom globalen Mittelwert, mittlerem Kontrast und Heterogenität.

Die rötliche Farbkodierung mit Höhenlinien stellt den Wert der Heterogenität dar.

Die grünen Punkte markieren die Lage der in Abb. 4.2-4 vorgestellten Referenzmodelle.

Jeder blaue Punkt entspricht einem ausgewerteten Zeitschritt in einem typischen Konvektionsmodell (vgl. Kapitel 5). Die schwarze Verbindungsline folgt der zeitlichen Entwicklung. Der älteste Zeitschritt liegt näher am Koordinatenursprung als die jüngeren.



**Abb. 4.2-7:** Einfluss von Änderungen der Gesamtzusammensetzung und der mittleren absoluten Abweichung vom globalen Mittelwert (Achsen) auf die Heterogenität (farbkodierte Höhenlinien).

Die Modelle B bis E (Abb. 4.2-5) sind als grüne Punkte eingezeichnet. Bei der vorgegebenen hemisphärischen Verteilung der Komponenten hat Modell B die maximal mögliche Heterogenität.

Verteilt man jetzt bei gleicher Gesamtzusammensetzung Material zwischen den Hemisphären um, ändert sich mittlere absolute Abweichung. Man

kommt erst zu Modell D, später zu einer Gleichverteilung ( $D=0$ ) und schließlich wieder zur maximalen Heterogenität. Bildlich steht Modell B dann auf dem Kopf.

Ändert man hingegen die Gesamtzusammensetzung des Modells bei gleichbleibender mittlerer Absoluteabweichung, so bewegt man sich von Modell E über D zu C auf einer Kontur gleichbleibender Heterogenität.

Durch die dauernde Erzeugung von Heterogenitäten (4.2.2) treten in den Modellen dieser Arbeit alle Effekte gleichzeitig auf.

## 4.2. Beschreibung von Vermischung

Die Funktion  $B_v(\bar{D}_v, \bar{K}_v)$  ist in Abb. 4.2-6 für den Wertebereich dargestellt, in dem ein Feld  $z_v \in [0,1]$  liegen kann. Für  $\bar{K}_v \rightarrow 0$  gilt  $B_v \rightarrow \infty$ . Dieses Verhalten kann man sich anhand einer Sanduhr vorstellen. Sie ist mit zwei mischbaren Flüssigkeiten gefüllt, welche nur am Durchlass aneinander grenzen. Wenn man nicht gerade von einer gezielten Hin- und Rückströmung durch die Engstelle ausgeht, würde es sehr lange dauern, bis sich durch zufällige Strömungen und Diffusion ein homogener Endzustand einstellt.

Der Einfluss von Änderungen der Gesamtzusammensetzung auf die Heterogenität wird anhand eines Prinzipmodells in Abb. 4.2-7 dargestellt. Die Abbildung zeigt, dass die Heterogenität dann maximal sein kann, wenn beide Komponenten zu gleichen Teilen vorkommen. Deshalb wird in der vorliegenden Arbeit die Entgasungstiefe so gewählt, dass diese Bedingung erfüllt ist.

Das vorgestellte Verfahren zur Beschreibung der Heterogenität geht zwar nicht primär von dafür in Frage kommenden physikalischen Prinzipien (z.B. Entropiebetrachtung, Skalenabhängigkeit des Mischungsverhaltens einer ‚typischen‘ Strömung, Diffusionszeit) aus, erlaubt aber einen objektiven Vergleich verschiedener Modelle und damit eventuell Rückschlüsse auf die wirkenden Prinzipien. Auf jeden Fall stellt es eine Verbesserung gegenüber der subjektiven Beschreibung von Feldern dar, wie sie in der Geodynamik oft gebraucht wird.

### 4.2.5. Bewertung des Mischungszustandes: Histogramme

Die Heterogenität ist zwar zur Charakterisierung vollständig gegebener chemischer Felder in Computermodellen geeignet, erlaubt aber (vorerst) keinen direkten Vergleich mit geochemischen Beobachtungen. Die in der Geochemie übliche Darstellung chemischer Felder sind Histogramme, bei denen die Anzahl der Proben über den durch Isotopenverhältnisse definierten Wertebereichen dargestellt wird. Das Problem bei der Übertragung dieses Konzeptes auf globale Computermodelle liegt in den weitgehend unbekanntem Mechanismen, die zur Extraktion der Proben führen und diese an die Erdoberfläche transportieren. Wie groß ist die kleinste unabhängige Magmaquelle, welches Raumgebiet wird jeweils beprobt? Tritt beim Aufstieg Vermischung mit umgebendem Material auf? Bei Xie & Tackley (2003) wird das Problem besonders deutlich, da sie mit verschiedenen Beprobungsmethoden stark unterschiedliche Ergebnisse erhalten.

In der vorliegenden Arbeit werden noch keine Isotopenverhältnisse berechnet. Direkte Vergleiche mit geochemischen Beobachtungen sind deshalb nicht möglich. In Hinblick auf die geplante Modellierung der chemischen Evolution des Erdmantels wurde aber ein Programm zur Darstellung chemischer Felder durch Histogramme entwickelt (hist.pro). Da in dieser Arbeit jeder Marker nur einen diskreten chemischen Wert annehmen kann, sind Histogrammdarstellungen nur nach vorheriger Mittelung über Raumbereiche sinnvoll. In hist.pro kann man angeben, welcher Tiefenbereich beprobt werden soll und wie viele Marker durchschnittlich zu einer Probe beitragen sollen. Die Beprobungsgebiete werden lateral durch Längen- und Breitenkreise so begrenzt, dass die vier Bogenlängen sich möglichst wenig unterscheiden. Für die Darstellungen in dieser Arbeit (Abb. 5.\*-27; 5.\*-28) wurde die ‚Mischungsreihe‘ zwischen ursprünglichem und entgastem Material willkürlich in 35 Intervalle unterteilt. Jedes Beprobungsgebiet, die kleinste unabhängige Magmenquelle, soll etwa 35 Marker enthalten. Die beprobten Tiefenbereiche wurden in Anlehnung an die von Nolet (2003) angegebenen Herkunftsbereiche verschiedener Plumes festgelegt und sind bei den entsprechenden Abbildungen jeweils mit angegeben.

Wenn die Marker eventuell einmal kontinuierliche chemische Werte annehmen können, ist auch eine direkte Beprobung des Markerfeldes möglich. Das entspräche der kleinsten, numerisch auflösbaren Magmenquelle.

Für einen Vergleich mit beobachteten Histogrammen erscheint der Ansatz sinnvoll, nur Gebiete zu beproben, aus denen partielle Schmelze extrahiert wird. Die Extraktion wird durch

## *4.2. Beschreibung von Vermischung*

Vermischung in einem zylindrischen Gebiet um die Projektionslinie der Magmenquelle an die Oberfläche beeinflusst. Durch die Hinzunahme dieses Zylinders zum Beprobungsgebiet könnten ‚Verunreinigungen‘ der Oberflächenproben berücksichtigt werden. Die thermischen Effekte der Extraktion partieller Schmelze werden in einigen Modellen bereits beachtet (Gleichung 3.1-5). Eine gezielte Auswertung des so modellierten Vulkanismus (chemisch oder durch Darstellung der Projektion an die Erdoberfläche) wird in dieser Arbeit aber noch nicht versucht.

## 5.1. Allgemeine Modellbeschreibung

### 5. Modelle

**Strategie:** Es ist ein Ziel dieser Arbeit, Modelle der Konvektion im Erdmantel zu verbessern. Damit soll zur Entwicklung eines Konvektions-Differenziations-Modells beigetragen werden, das die wesentlichen tektonischen und geochemischen Beobachtungen reproduziert und dadurch hilft, diese zu verstehen. Außerdem sollen erste Einblicke in das Zusammenspiel von Differenziation und konvektiver Vermischung gewonnen und auch entsprechende Schwachstellen der Modelle gefunden werden.

Es geht hier nicht darum, durch die Isolation von Teilproblemen physikalische Mechanismen genau zu erkunden. Es wird auch nicht versucht, den Gültigkeitsbereich der jeweiligen Lösungen durch eine weite Variation unsicherer Parameter abzugrenzen. Die hier gemachten Variationen sollen lediglich den generellen Einfluss des jeweiligen Parameters oder einer Programmänderung testen. Deshalb werden auch solche Modelle veröffentlicht, die offensichtlich nicht für die Erklärung der Evolution der Erde relevant sind.

### 5.1 Allgemeine Modellbeschreibung

#### 5.1.1. Modellparameter

Größe	Wert	Beschreibung
$a_{\mu,core}$	200 ppm	Konzentration von $^{40}\text{K}$ im Kern
$c_{p,core}$	850 J/kg K	spezifische Wärme im Kern
$I$	0,19880081	siehe Gleichung (3.5-14)
$L_T$	6042 km	siehe Gleichung (3.5-8)
$L_\rho$	7400 km	siehe Gleichung (3.5-13)
$m_{core}$	1,943e24 kg	Kernmasse
$mp$	8	Parameter zur Markersteuerung
$na$	5	Anzahl der Attribute eines Markers
$ngrp$	1394250	Gesamtzahl der Gitterpunkte
$np$	12	Anzahl der Marker, die ein Gitterpunkt maximal aufnehmen darf
$nr$	32	Anzahl der radialen Unterteilungen
$r_{CMB}$	3480e6 m	Radius des Erdkerns
$r_E$	6371e6 m	Erdradius
$T_E$	288 K	Temperatur an der Erdoberfläche
$t_{ev}$	4,49e9 a	Alter des silikatischen Mantels der Erde (Start der Mantelmodelle)
$t_{rad}$	4,565e9 a	Alter des Sonnensystems (Beginn der Zeitrechnung für radioaktive Zerfälle)
$T_{s0}$	5200 K	Erstarrungstemperatur im Erdmittelpunkt
$\gamma$	1,5	Grüneisenparameter im Kerns
$\Gamma_{440}$	3e6 Pa/K	Clapeyronneigung am Phasenübergang Olivin-Spinell
$\Gamma_{660}$	-4e6 Pa/K	Clapeyronneigung am Phasenübergang Spinell-Perowskit
$\Delta S$	118 J/kg K	Erstarrungsentropie im Kern
$\Delta\rho/\rho_{440}$	0,0547	Dichtesprung am Phasenübergang Olivin-Spinell
$\Delta\rho/\rho_{660}$	0,0848	Dichtesprung am Phasenübergang Spinell-Perowskit
$\Delta\rho_{ICB}$	500 kg/m <sup>3</sup>	Dichtesprung an der Innenkerngrenze
$\rho_c$	12,5e3kg/m <sup>3</sup>	Dichte im Erdmittelpunkt

**Tab. 5.1-I:** Allgemeine Modellparameter. Die Auswahl orientiert sich an Walzer et al. (2003a).

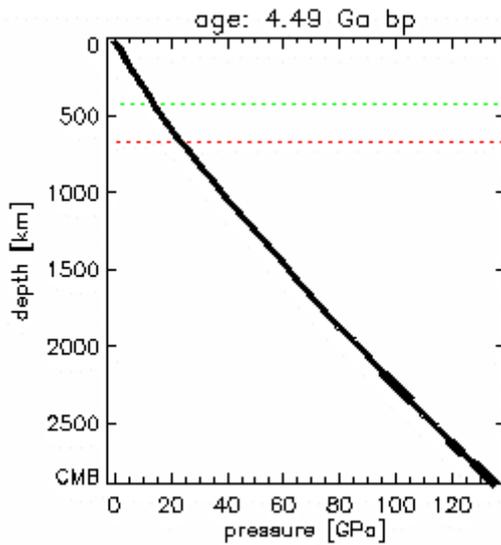
Isotop	$\tau$ [Ma]	$H_0$ [W/kg]	$a_{ir}$	$a_\mu$ [ppm]
$^{40}\text{K}$	2015,3	0,272e-3	1,19e-4	250,0
$^{232}\text{Th}$	20212,2	0,033e-3	1	0,0853
$^{235}\text{U}$	1015,4	47,89e-3	0,0071	0,0203
$^{238}\text{U}$	6446,2	0,1905e-3	0,9928	0,0203

**Tab. 5.1-II:** Parameter der inneren Heizung. Die Auswahl orientiert sich an Walzer et al. (2003a).

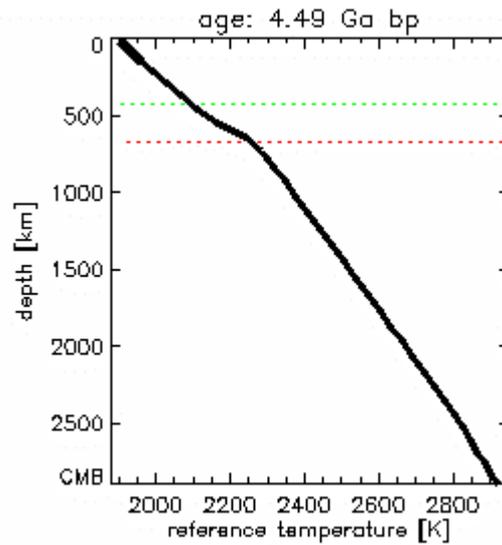
## 5.1. Allgemeine Modellbeschreibung

### 5.1.2. Profile und variierte Parameter

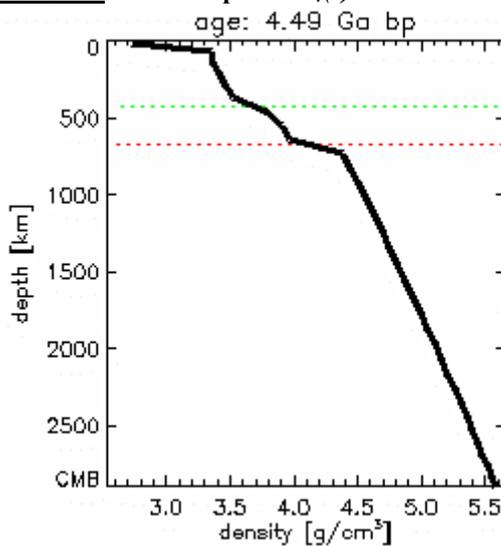
Die folgenden radialen Profile wurden von Walzer et al. (2003a) übernommen und stimmen bei allen Modellen überein.



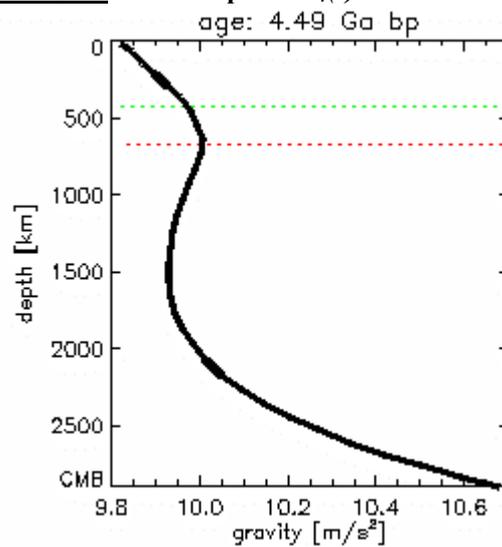
**Abb. 5.1-1:** Referenzprofil  $P_r(r)$



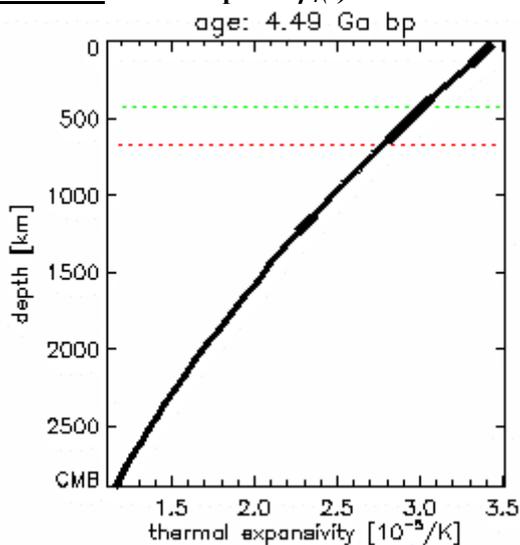
**Abb. 5.1-2:** Referenzprofil  $T_r(r)$



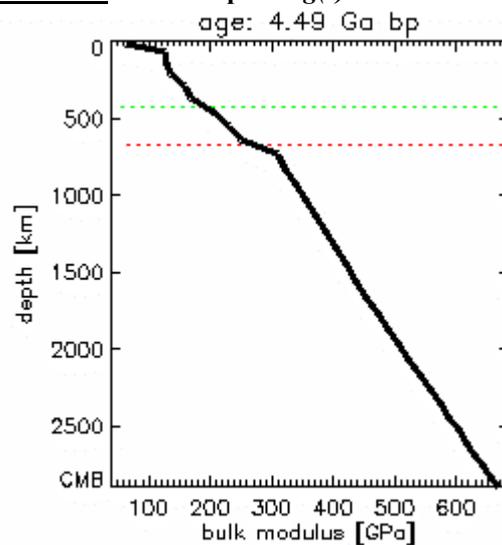
**Abb. 5.1-3:** Referenzprofil  $\rho_r(r)$



**Abb. 5.1-4:** Referenzprofil  $g(r)$



**Abb. 5.1-5:** Referenzprofil  $\alpha(r)$



**Abb. 5.1-6:** Referenzprofil  $K_T(r)$

## 5.1. Allgemeine Modellbeschreibung

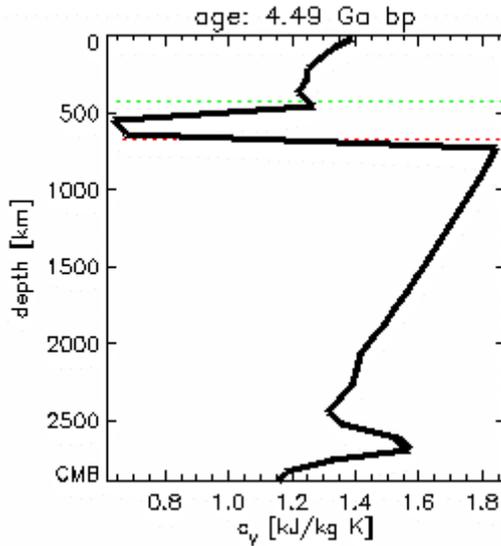


Abb. 5.1-7: Referenzprofil  $c_v(r)$

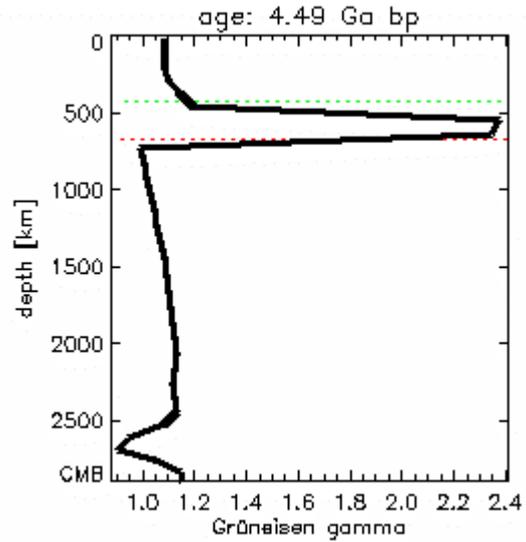


Abb. 5.1-8: Referenzprofil  $\gamma(r)$

Viskosität ( $\eta^*$ ): Die folgenden Viskositätsprofile werden in dieser Arbeit verwendet:

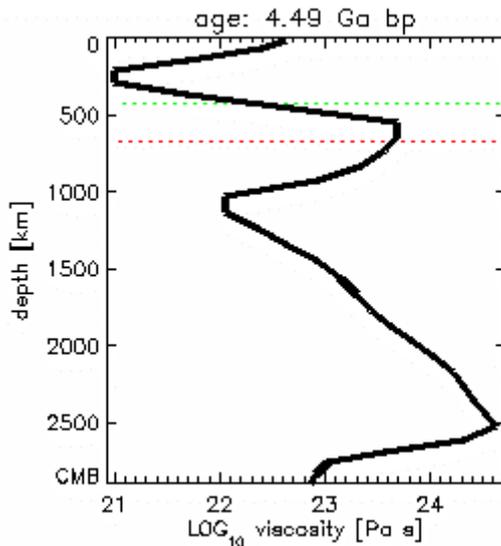


Abb. 5.1-9: Startprofil der Viskosität  $\eta_1(r)$

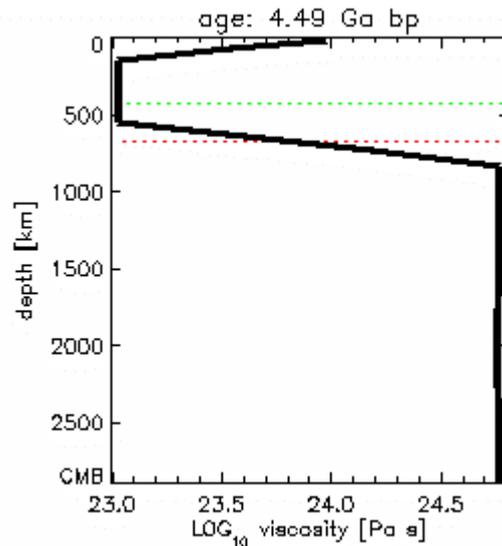


Abb. 5.1-10: Startprofil der Viskosität  $\eta_2(r)$

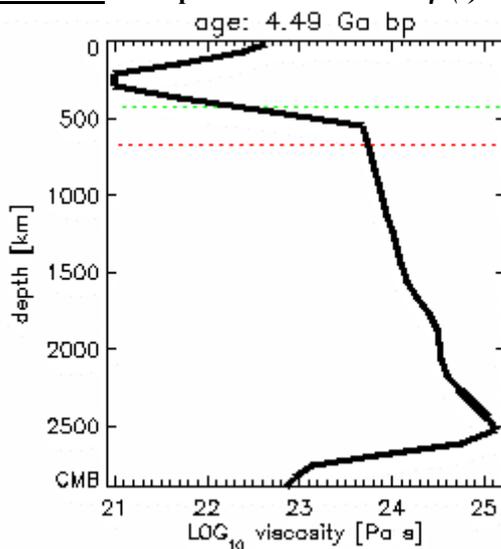


Abb. 5.1-11: Startprofil der Viskosität  $\eta_3(r)$

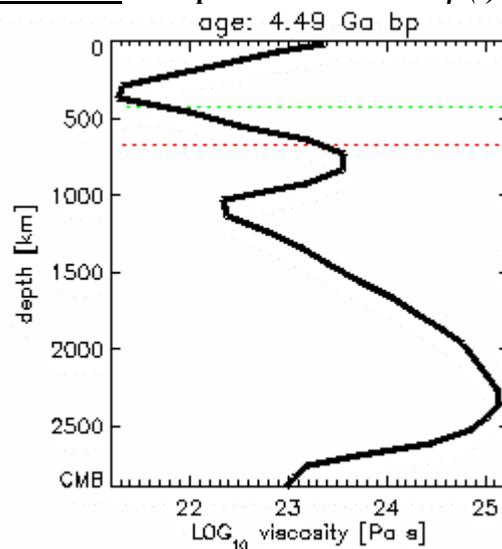
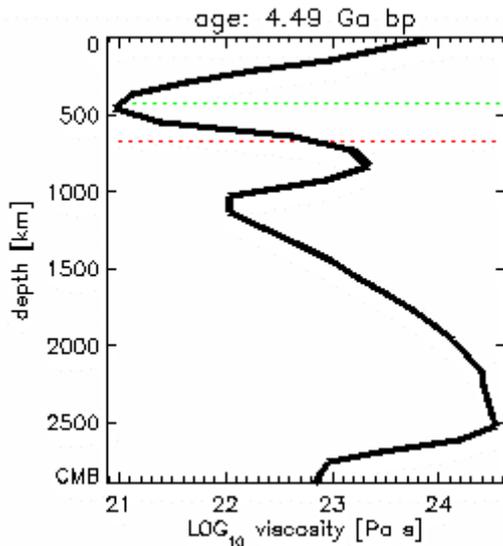
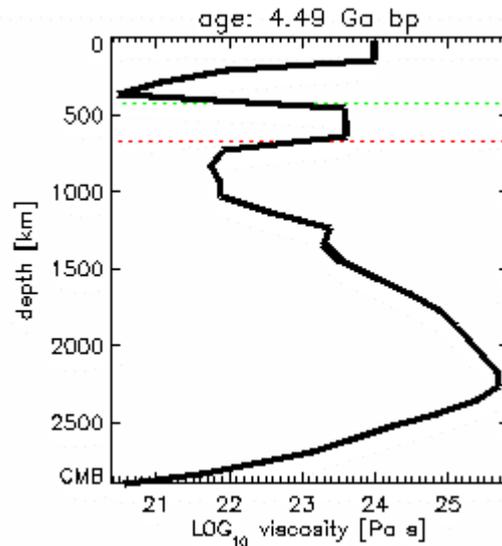


Abb. 5.1-12: Startprofil der Viskosität  $\eta_4(r)$

## 5.1. Allgemeine Modellbeschreibung



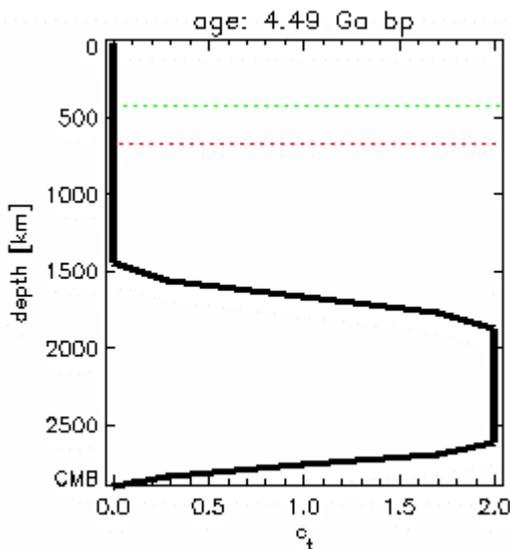
**Abb. 5.1-13:** Startprofil der Viskosität  $\eta_5(r)$



**Abb. 5.1-14:** Startprofil der Viskosität  $\eta_6(r)$

Außerdem wurde noch ein konstantes Profil verwendet:  $\eta_7(r) = 1e23$  Pas. Das Profil  $\eta_1$  wurde vom Referenzmodell von Walzer et al. (2003a) übernommen. Das Profil  $\eta_2$  stammt von Ricard & Vigny (1989).  $\eta_3$  ist eine willkürliche Variation von  $\eta_1$  zur Untersuchung des Einflusses der bei  $\eta_1$  postulierten zweiten Asthenosphäre in etwa 1000 km Tiefe. Das Profil geht auch auf Walzer et al. (2003a) zurück.  $\eta_4$  und  $\eta_5$  sind ebenfalls Abwandlungen von  $\eta_1$ , die bei der Einführung einer viskoplastischen Fließspannung verwendet wurden. Die Lithosphäre ist in  $\eta_1$  zu weich für das Auftreten plattigen Verhaltens. Daher wurde die Viskosität an der Oberfläche schrittweise erhöht, steile Gradienten aber aus Gründen der numerischen Stabilität vermieden. Die Asthenosphäre musste etwas nach unten verschoben werden. Durch die Korrektur der Implementierung der Phasengrenzen und durch Änderung eines Steuerparameters des Multigridlösers (Hendel) wurde die numerische Stabilität erhöht und damit  $\eta_6$  in TERRA behandelbar. Von allen in dieser Arbeit verwendeten Viskositätsprofilen ist  $\eta_6$  das für den heutigen Mantel geophysikalisch sinnvollste (Abb. 5.1-9 bis 5.1-14), (Walzer et al., 2003b).

Laterale Temperaturabhängigkeit der Viskosität ( $c_t^*$ ): Für einige Modelle wurde die Radiusabhängigkeit von  $c_t$  (Gleichung 3.1-13) aus dem Referenzmodell von Walzer et al. (2003a) übernommen (Abb 5.1-15).



**Abb. 5.1-15:**  $c_t(r)$ : erlaubte laterale Temperaturabhängigkeit der Viskosität.

Aus Gründen der numerischen Stabilität ist hier eine laterale Temperaturabhängigkeit nur im hochviskosen Teil des unteren Mantels zugelassen.

In den meisten Modellen dieser Arbeit werden aber radial konstante  $c_t$ -Werte verwendet. Anstelle von  $c_t^*$  wird dann der entsprechende Wert angegeben.

## 5.1. Allgemeine Modellbeschreibung

### Schmelztemperatur ( $T_m^*$ ):

Ein weiterer wichtiger Parameter ist die Schmelztemperatur des Mantels. Die verwendeten Profile sind in Abb. 5.1-16 bis 5.1-18 dargestellt.  $T_{m1}$  stammt von Walzer et al. (2003a). Dabei wird  $T_m$  im gesamten unteren Mantel zwischen dem Wert für 660 km Tiefe und dem Wert an der CMB linear interpoliert. Das entspricht den experimentellen Ergebnissen von Zerr & Boehler (1993, 1994). Allerdings widerspricht die hohe Schmelztemperatur im unteren Mantel neueren experimentellen Ergebnissen (Boehler, 2000). Deshalb wurde  $T_m(r_{CMB})$  in einigen Modellen zunächst auf 4000 K gesetzt ( $T_{m2}$ ). Später wurde das neue Profil  $T_{m3}$  von Walzer et al. (2003b) übernommen.

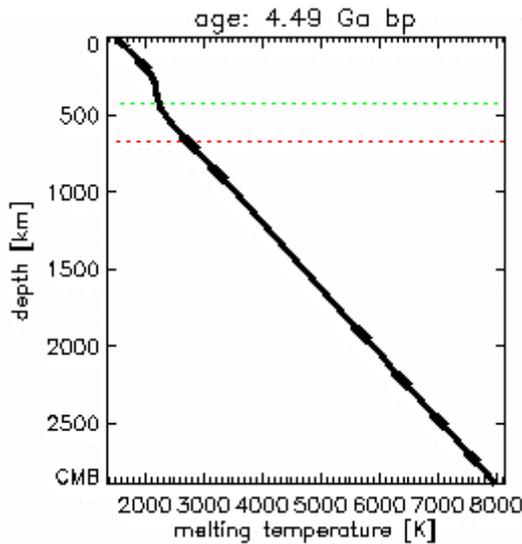


Abb. 5.1-16: Schmelztemperatur  $T_{m1}(r)$

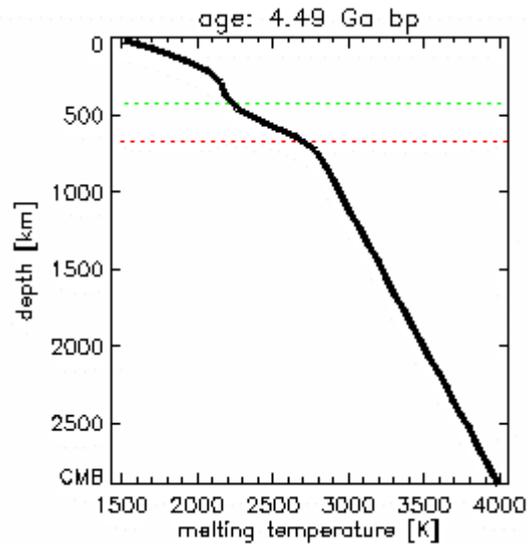


Abb. 5.1-17: Schmelztemperatur  $T_{m2}(r)$

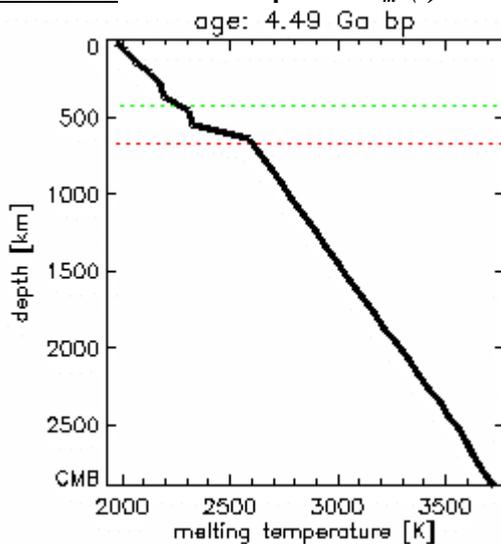


Abb. 5.1-18: Schmelztemperatur  $T_{m3}(r)$

Vulkanismus (vul\*): Die Kenntnis der Schmelzpunktkurve ermöglicht eine einfache Berücksichtigung des Wärmetransportes durch Vulkanismus im globalen Konvektionsmodell (Gleichung 3.1-5). Dabei kann Schmelze ab einer bestimmten Tiefe, mindestens ab 410 km, schwerer als das Residuum sein und würde nicht mehr aufsteigen (z.B. Ohtani et al., 1998). Das Vulkanismusmodul war in einigen Modellen dieser Arbeit zwischen 65 km und 727 km Tiefe aktiv (vul1), in anderen zwischen 65 km und 2825 km (vul2). Die Ausweitung des Wirkungsbereiches auf fast den gesamten

unteren Mantel lässt sich mit den numerischen Grenzen von TERRA begründen. Im heutigen Mantel gibt es Plumes, großräumig geschmolzene Gebiete aber nicht. Deshalb wird hier davon ausgegangen, dass die reale Temperaturabhängigkeit der Viskosität im Mantel die Entstehung kleinräumiger Aufstiegszonen ermöglicht, bevor in großen Gebieten partielle Schmelze entsteht. Die Viskosität ist in den Modellen zu schwach lateral temperaturabhängig. Außerdem reicht die hier verwendete Gitterauflösung noch nicht aus, um dieses kleinskalige Phänomen selbstkonsistent in globalen Modellen zu berechnen. Die Ortsfestigkeit von Plumes relativ zueinander spricht dafür, dass diese kaum mit der großräumigen Mantelströmung

## 5.1. Allgemeine Modellbeschreibung

wechselwirken. Deshalb kann der Wärmetransport durch Plumes in erster Näherung durch die Aktivierung von Gleichung 3.1-5 im ganzen Mantel berücksichtigt werden. Ausgenommen bleiben nur das Gebiet über der CMB und die auf konstanter Temperatur gehaltene Oberfläche.

CMB (CMB\*): Alle drei in Kapitel 3.5 erwähnten thermischen Randbedingungen wurden in verschiedenen Modellen realisiert. Die im Folgenden mit CMB1 bezeichnete Bedingung wurde von Walzer et al. (2003a) übernommen. Dabei wird an jedem Punkt der CMB ein zeitlich konstanter Wärmestrom von  $28,9 \text{ mW/m}^2$  erzwungen. Die Temperatur kann lateral unterschiedlich sein.

Bei CMB2 wird auch ein zeitlich konstanter Wärmestrom von  $28,9 \text{ mW/m}^2$ , aber bei räumlich konstanter  $T_{CMB}$  erzwungen.  $T_{CMB}$  wird dabei benutzt, um über die Kernadiabate und die Schmelztemperatur im Kern (Abb. 3.5-1 und 3.5-2) auch den Radius des Innenkerns als Ausgabegröße zu berechnen. Die Energiebilanz des Kerns spielt bei dieser Methode keine Rolle.

Bei CMB3 ist das in den Abschnitten 3.5.2 und 3.5.3 beschriebene Modell der Kernevolution aktiv. Dabei wurden durchgängig die in Tab. 5.1-I gegebenen Parameter verwendet. Die einzige variierte Größe ist die Konzentration von  $^{40}\text{K}$ . Diese ist gemeint, wenn im Folgenden im Zusammenhang mit der thermischen Randbedingung an der CMB eine Konzentration [ppm] angegeben wird.

Viskoplastische Fließspannung ( $\sigma_y$ ): Wenn im Folgenden für  $\sigma_y$  ein Wert angegeben wird, so ist das in Kapitel 3.4 beschriebene Verfahren in den oberen 285 km des Mantels aktiv.

Wärmeleitfähigkeit ( $k$ ): In den meisten Modellen wird der Walzer et al. (2003a,b) benutzte Wert  $k = 12 \text{ W/mK}$  übernommen. Da Hofmeister (1999)  $k = 4,3 \text{ W/mK}$  vorschlägt, wurden auch andere Werte ausprobiert. Die Wärmeleitfähigkeit ist in keinem der hier vorgestellten Modelle radiusabhängig.

Startbedingung (anf\*): Bei anf1 liegt das anfängliche Temperaturprofil bei konstanten 2000 K im gesamten Mantel, mit einem graduellen Übergang zur Oberfläche. Diesem Anfangstemperaturprofil anf1 ist die in Abschnitt 3.1.3 beschriebene Störung überlagert. Die Anfangsgeschwindigkeiten waren null.

Bei anf2 wird zusätzlich zu anf1 ein gradueller Übergang zur Temperatur an der CMB eingeführt. In allen Modellen mit CMB2 oder CMB3 wird in Anlehnung an Boehler (2000) mit  $T_{CMB} = 4000 \text{ K}$  gestartet. Die Anfangsgeschwindigkeiten waren null.

Bei anf3 wird das Temperaturprofil von Stacey (1992) mit der in Abschnitt 3.1.3 beschriebenen Störung überlagert. Die Anfangsgeschwindigkeiten waren null.

Die Startbedingung anf4 bedeutet, dass ausgehend von anf3 erst 1400 Zeitschritte mit  $T_{CMB} = 4000 \text{ K}$  und der inneren Heizung von vor 4,49 Ga gerechnet werden (vgl. 3.6.). Zu Beginn der eigentlichen Rechnung gibt es also schon ein Geschwindigkeitsfeld und eine dazu passende Temperaturverteilung.

### 5.1.3. Zusammenstellung der Modelle

Die Modelle<sup>1)</sup> des Erdmantels, die in Kapitel 5.2 bildlich ausgewertet werden, sind hinsichtlich der variierten Eigenschaften in Tabelle 5.1-III zusammengestellt. Die in Kapitel 3.3 behandelte Korrektur ist in allen Modellen berücksichtigt.

---

<sup>1)</sup> Die einzelnen Modelle werden mit Nummern bezeichnet, die eigentlich der internen Identifikation dienen. Die Nummern erlauben das Auffinden der zum entsprechenden Modell gehörenden Daten und Programme auf den von mir genutzten Accounts und auf Sicherungs-CD's. Da jede andere Bezeichnung genau so willkürlich oder zu lang wäre, wurde die interne Bezeichnung beibehalten.

## 5.1. Allgemeine Modellbeschreibung

Modell	$\eta^*$	$c_t$	$\sigma_y$ [1e8 Pa]	$T_m$	vul*	CMB* $a_{\mu 1, core}$ [ppm]	$k$ [W/mK]	anf*
637	$\eta 3$	$c_{t1}$	-	$T_{m1}$	-	CMB1	12,0	anf1
638	$\eta 2$	$c_{t1}$	-	$T_{m1}$	-	CMB1	12,0	anf1
639	1e23 Pas	$c_{t1}$	-	$T_{m1}$	-	CMB1	12,0	anf1
640	$\eta 5$	1,0	1,8	$T_{m1}$	vul1	CMB1	12,0	anf1
641	$\eta 4$	1,0	1,8	$T_{m1}$	vul1	CMB1	12,0	anf1
642	$\eta 5$	1,0	1,4	$T_{m1}$	vul1	CMB1	12,0	anf1
647	$\eta 1$	$c_{t1}$	-	$T_{m1}$	-	100	12,0	anf2
648	$\eta 1$	$c_{t1}$	-	$T_{m1}$	-	200	12,0	anf2
649	$\eta 6$	1,0	1,35	$T_{m1}$	-	200	12,0	anf2
651	$\eta 6$	1,0	1,35	$T_{m1}$	-	200	12,0	anf3
652	$\eta 1$	$c_{t1}$	-	$T_{m1}$	-	CMB1	12,0	anf3
653	$\eta 6$	1,0	1,35	$T_{m1}$	-	CMB2	12,0	anf3
656	$\eta 6$	1,0	1,35	$T_{m2}$	vul2	CMB2	12,0	anf3
657	$\eta 6$	1,0	1,35	$T_{m2}$	vul2	200	12,0	anf3
659	$\eta 6$	1,75	1,35	$T_{m2}$	vul2	200	12,0	anf3
660	$\eta 6$	1,75	1,35	$T_{m3}$	vul2	200	4,3	anf3
661	$\eta 6$	1,5	1,35	$T_{m3}$	vul2	150	6,0	anf4
662	$\eta 6$	1,5	1,35	$T_{m3}$	vul2	150	12,0	anf4

**Tab. 5.1-III:** Übersicht der in dieser Arbeit behandelten Modelle. Die einzelnen Bezeichnungen sind in Abschnitt 5.1.2 erklärt.

### 5.1.4. Postprocessing

Soweit nichts anderes vermerkt ist, wurden alle Programme zur grafischen Darstellung und Auswertung der Modelle in IDL selbst entwickelt. Das jedem Bild zugrunde liegende Programm wird im Abbildungsverzeichnis genannt. Da die Programme im Quelltext meist ausführlich kommentiert sind, werden hier nur einige Grundkonzepte der genutzten Algorithmen wiedergegeben.

TERRA-Ausgaben: Von TERRA werden vier Arten von Felddateien ausgegeben:  $c^*$ ,  $g^*$ ,  $p^*$  und  $k^*$ . Je Prozessor gibt es eine Datei pro Zeitschritt. Die Ausgabezeitpunkte können sich nach Zeitschrittintervallen, Zeitintervallen oder festgelegten Zeiten richten. Die  $c^*$ - und  $p^*$ -Dateien dienen TERRA zum Neustart eines unterbrochenen Laufes.  $p^*$  enthält nur die Markerfelder. Die  $c^*$ -Dateien werden außerdem zur Berechnung der spektralen Analyse der Geschwindigkeits- und Temperaturfelder mit dem parallelisierten Fortran-Programm sphmrx (Yang, 1997) gebraucht. Die  $g^*$ -Dateien enthalten die Felder von Geschwindigkeit, Temperatur, Viskosität und der Wurzel der zweiten Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors. Je nach Modell können sie weitere Felder enthalten. Die  $k^*$ -Dateien enthalten Positionen und sonstigen Attribute der Marker.

Für die Darstellung der Kernevolution dient  $cmb^*$ .  $hst^*$  enthält u.a. Daten über die zeitliche Entwicklung von kinetischer Energie, Wärmeströmen, Temperaturprofil, innerer Heizung, Ra und Nu. Diese globalen Daten werden öfter ausgegeben als die 3D Felder. Einige Anfangs- und Referenzprofile wurden  $out^*$  entnommen.

Flächentreue Projektionen aus  $g^*$ -Dateien: Die  $g^*$ -Dateien eines Zeitschrittes werden nacheinander eingelesen und die einander entsprechenden Teilfelder der verschiedenen Prozessoren vereinigt. Für jede neue Gitterkonfiguration wird eine TERRA-Ausgabe mit den Positionsdaten des Gitters benötigt ( $grid^*$ ), die auch prozessorbasiert ist. Damit können den Feldwerten Positionen zugeordnet werden. Doppelt auftretende Positionen sind zu entfernen. Die Felder werden mit IDL-internen Routinen trianguliert und auf ein reguläres Gitter

## 5.1. Allgemeine Modellbeschreibung

interpoliert. Dieses kann dann mit Standardverfahren als farbkodierte Karte auf die Kugel­fläche geplottet und als Grafikdatei ausgegeben werden.

Flächentreue Projektionen aus k\*-Dateien: Die k\*-dateien werden ähnlich wie die g\*-Dateien behandelt, aber die Positionen der Marker ersetzen die Positionen des Ikosaedergitters. bei den in dieser Arbeit verwendeten diskreten Markerwerten ist vor der Darstellung noch eine räumliche Integration der Markerwerte nötig. Diese richtet sich nach dem vorgegebenen Probenkonzept (vgl. 4.2.3: Histogramme).

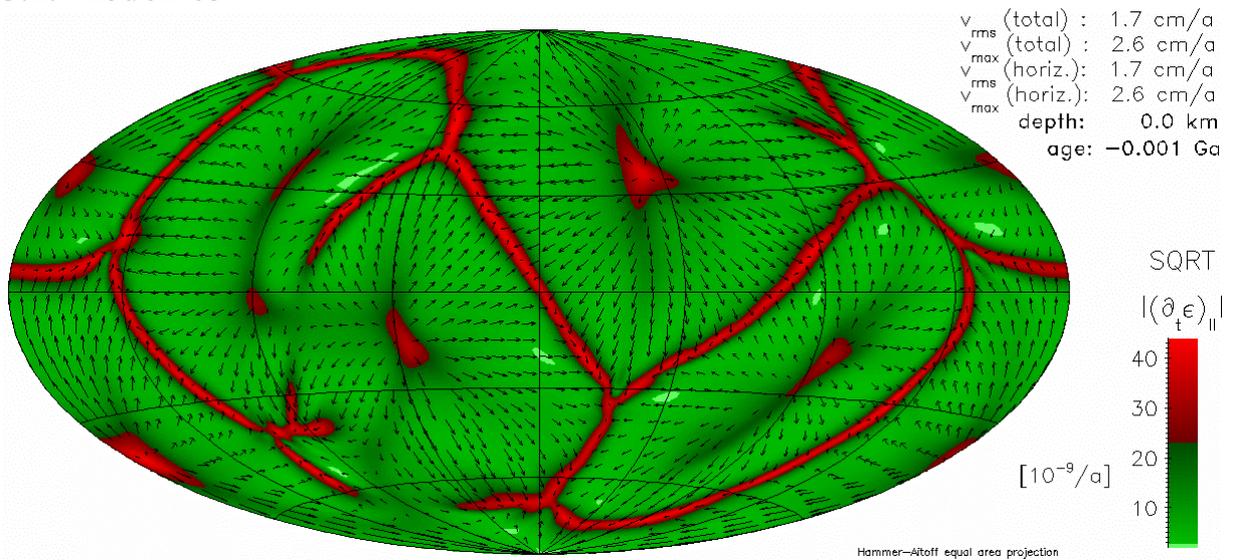
3D Schnitte: Das mit IDL gelieferte Programm slicer3.pro erlaubt vielfältige Analysen von 3D Feldern, u.a. die Darstellung von Isoflächen und Schnitten. Allerdings müssen die Felder in einem regulären kartesischen Gitter gegeben sein. Für die entsprechende Umwandlung der irregulären TERRA-Felder (Markerpositionen oder Ikosaedergitter) wurde ein neuer Algorithmus (regu.pro) geschrieben, da die IDL-internen Routinen mit großen Feldern nicht zurecht kommen. Von den so gewonnenen regulären chemischen Feldern wird auch die Heterogenität ermittelt (vgl. 4.2.3).

Videosequenzen: Im Rahmen dieser Arbeit wurden auch Videosequenzen von equal-area-plots erzeugt. Dafür werden von TERRA in engen zeitlichen Abständen reduzierte 3D Felddateien ausgegeben. Das IDL-Programm collect.pro liest formatierte, prozessorbasierte Terra-Ausgaben, produziert unformatierte, zeitschritt­basierte Dateien für die Filmherstellung, entfernt doppelte Knoten und ermittelt globale Extrema. Movi.pro liest die Dateien von collect.pro und produziert eine Serie \*.png-Bilder für die Filmproduktion mit dem Shareware-Programm VideoMach.

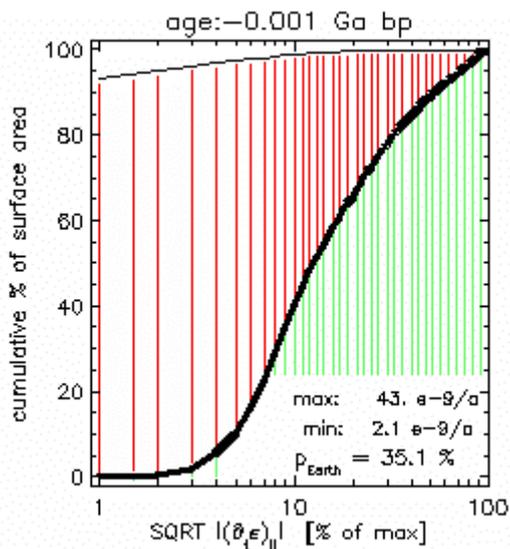
Profile: Sofern nichts anderes angegeben ist, bezeichnet die schwarze Kurve in Profildarstellungen einen lateral gemittelten Wert. Der Maximalwert der jeweiligen Schicht ist rot und der Minimalwert grün eingezeichnet.

## 5.2. Modell 637

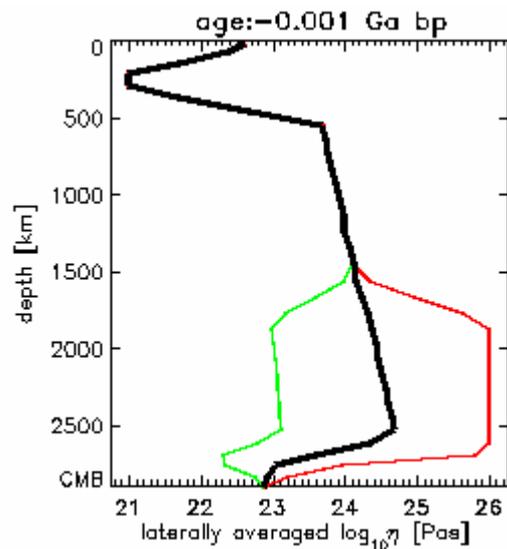
### 5.2. Modell 637



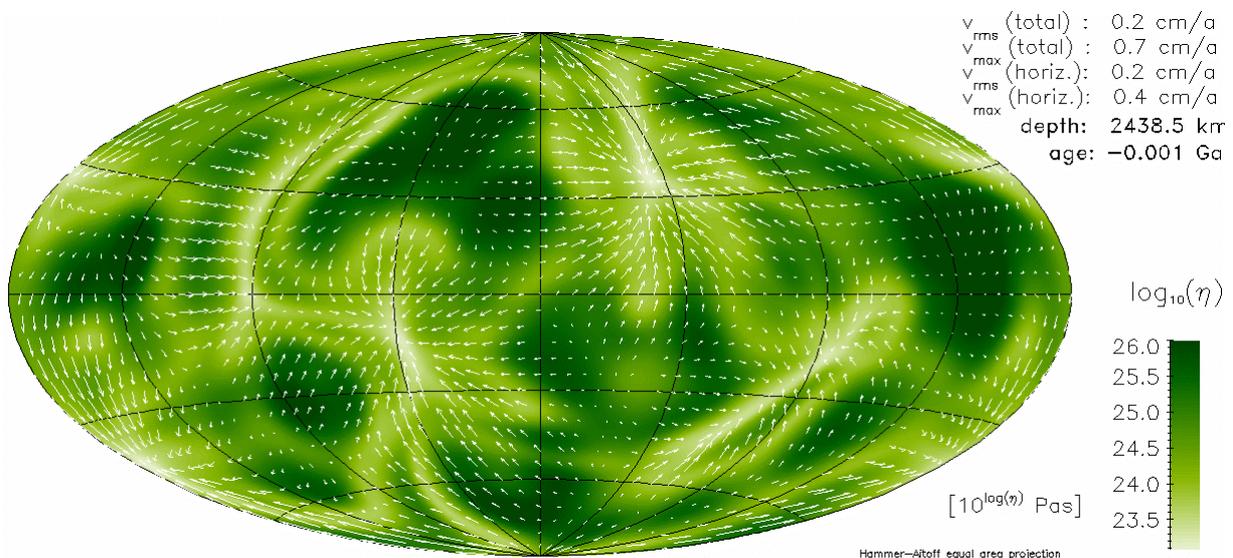
**Abb. 5.2-1:** Wurzel des Betrages der zweiten Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors



**Abb. 5.2-2:** Plattigkeit an der Oberfläche

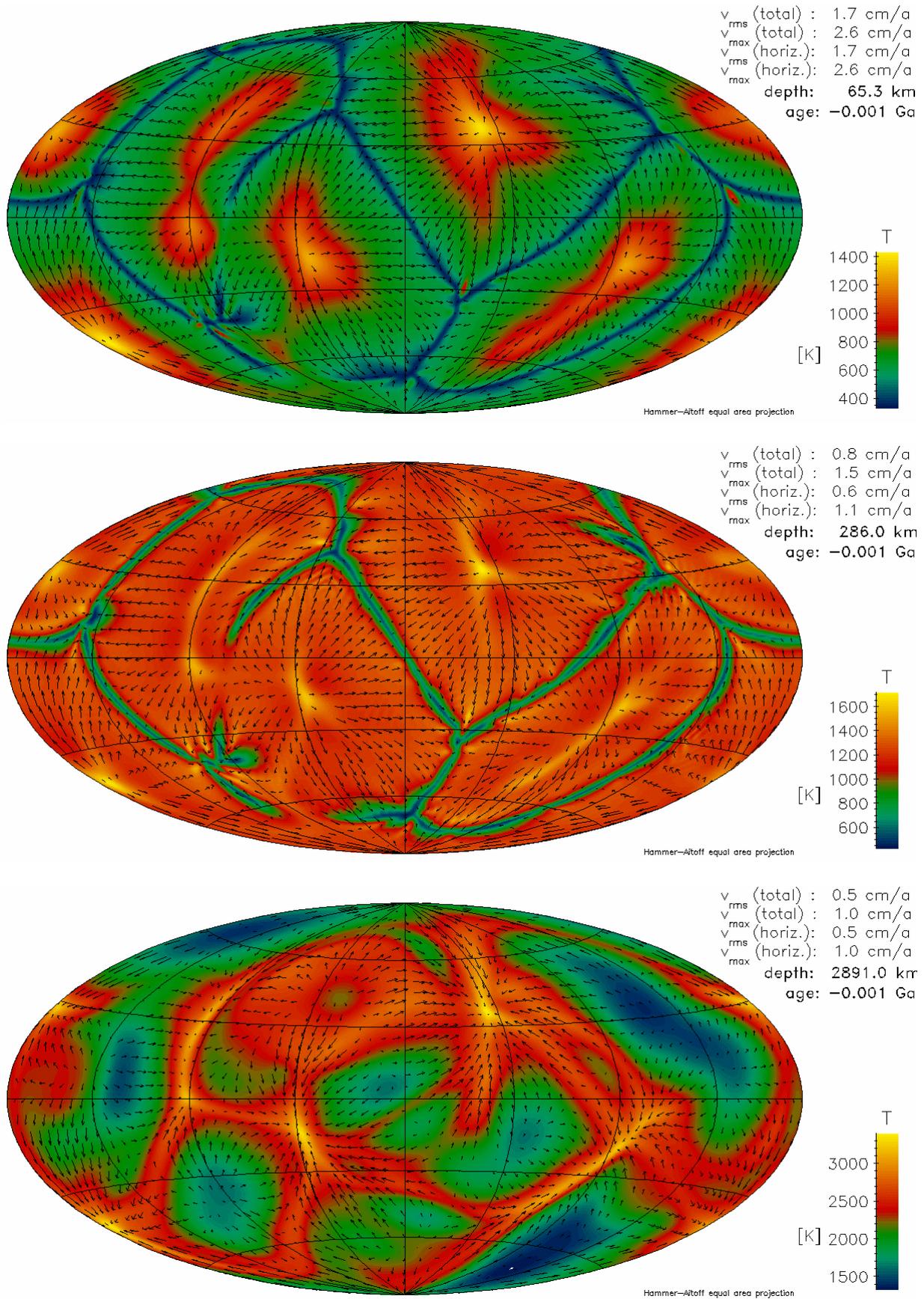


**Abb. 5.2-3:** Viskositätsprofil



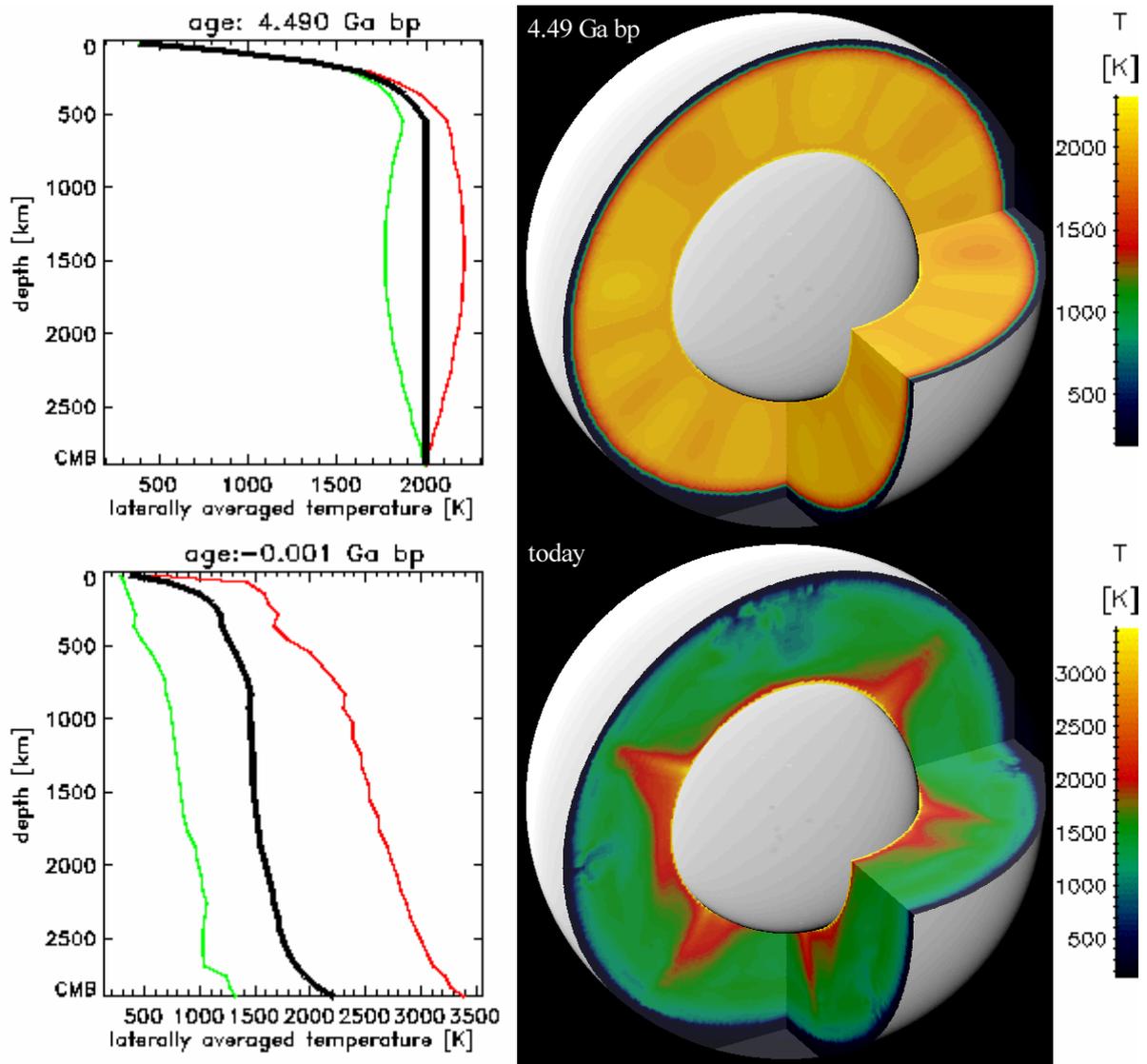
**Abb. 5.2-4:** Viskosität in der Tiefe mit großen lateralen Unterschieden

## 5.2. Modell 637

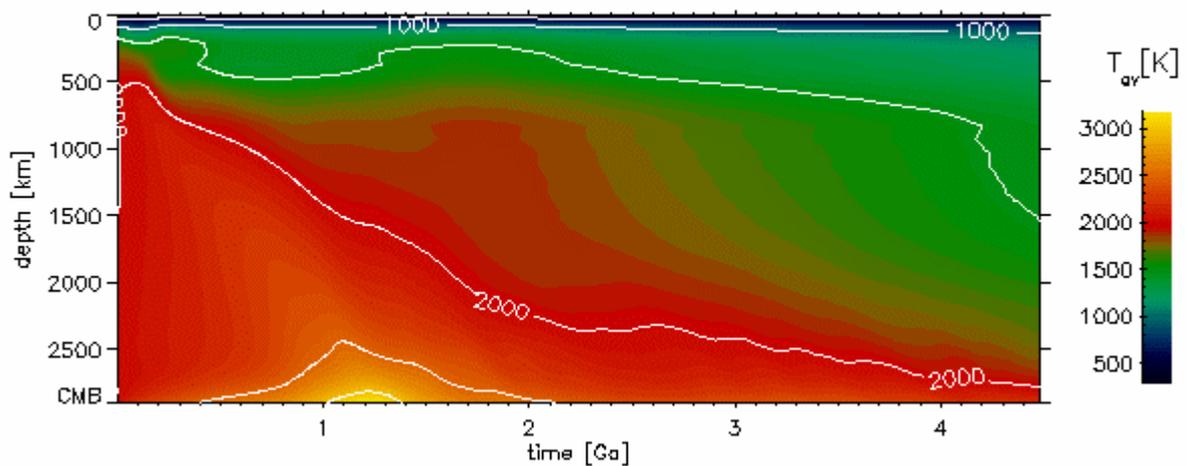


**Abb. 5.2-5:** Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen

## 5.2. Modell 637

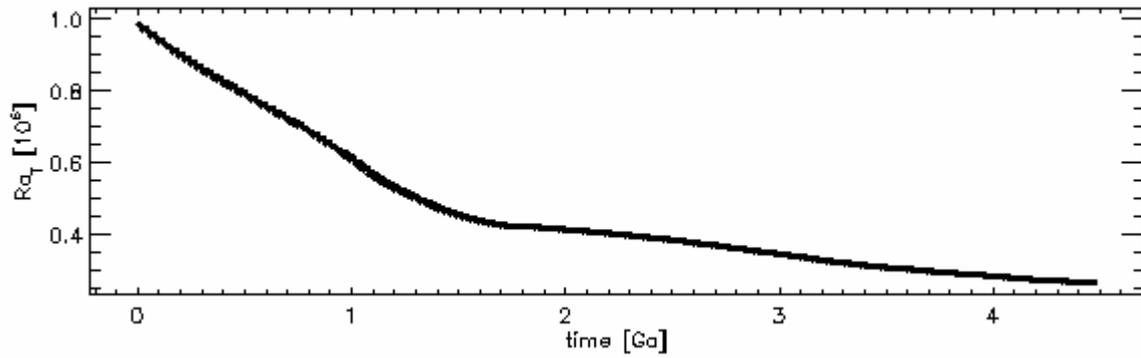


**Abb. 5.2-6:** Temperaturverteilung im Mantel am Anfang der Rechnung und heute

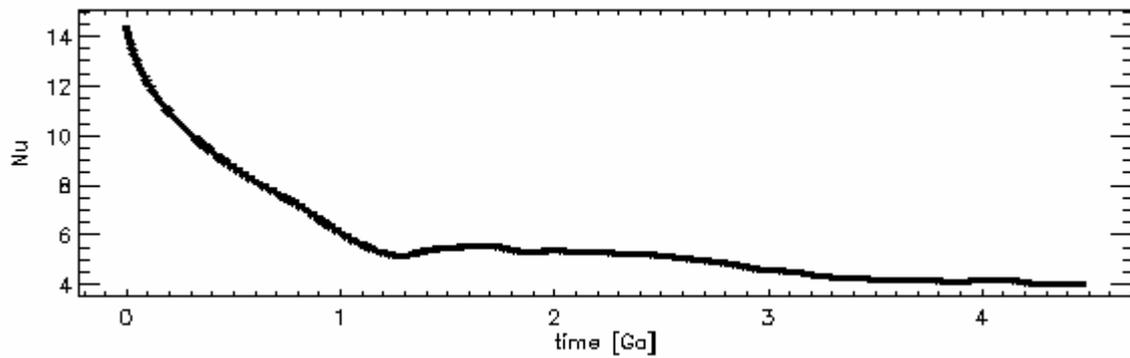


**Abb. 5.2-7:** Zeitliche Entwicklung des Temperaturprofiles

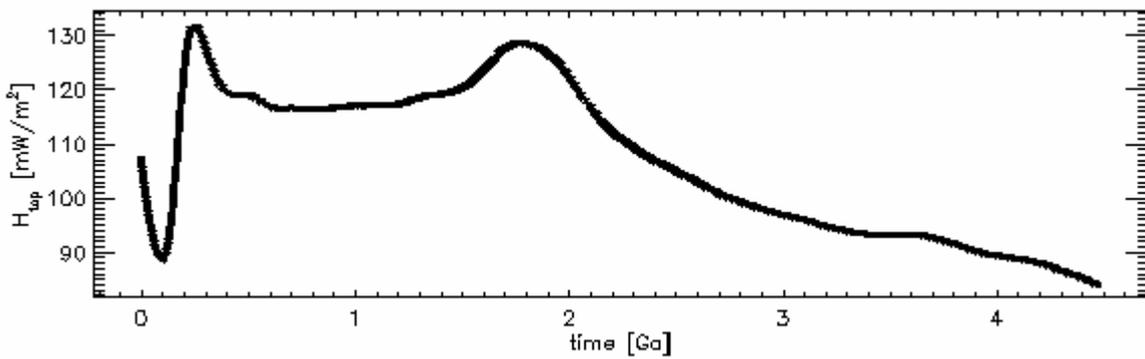
## 5.2. Modell 637



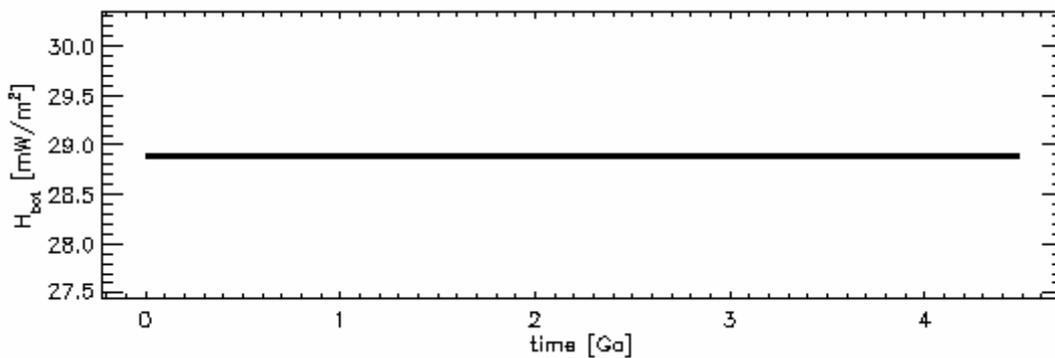
**Abb. 5.2-8:** Zeitliche Entwicklung der Rayleigh-Zahl



**Abb. 5.2-9:** Zeitliche Entwicklung der Nusselt-Zahl

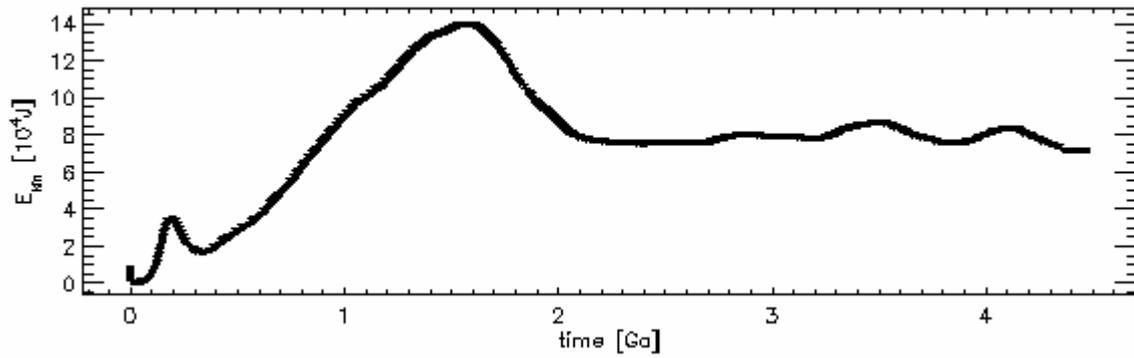


**Abb. 5.2-10:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Oberfläche

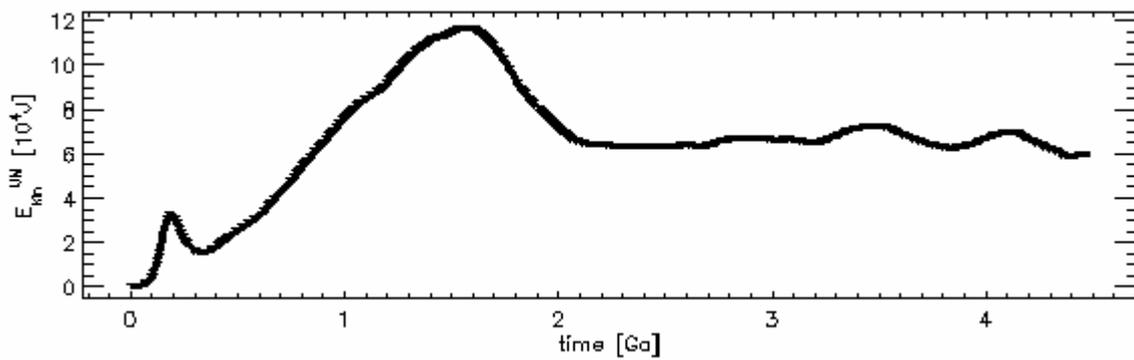


**Abb. 5.2-11:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Kern-Mantel-Grenze

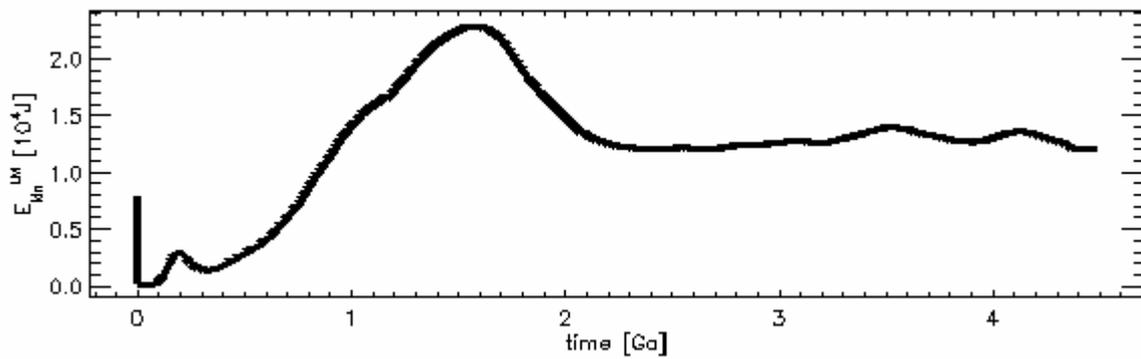
## 5.2. Modell 637



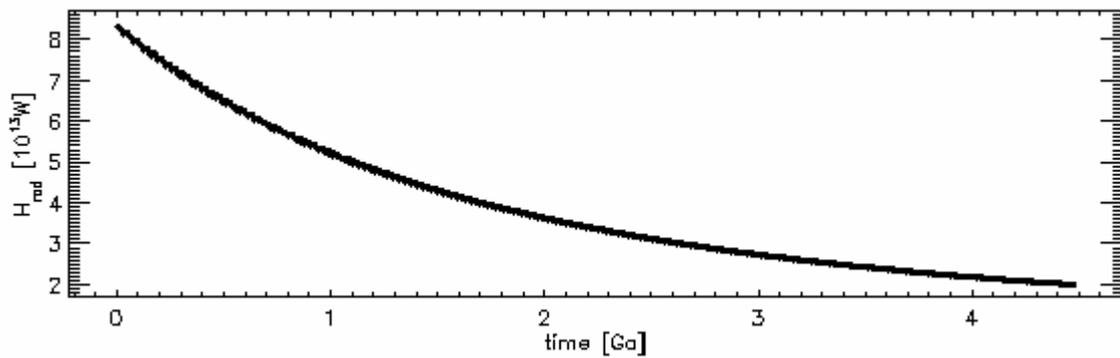
**Abb. 5.2-12:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des gesamten Mantels



**Abb. 5.2-13:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des oberen Mantels

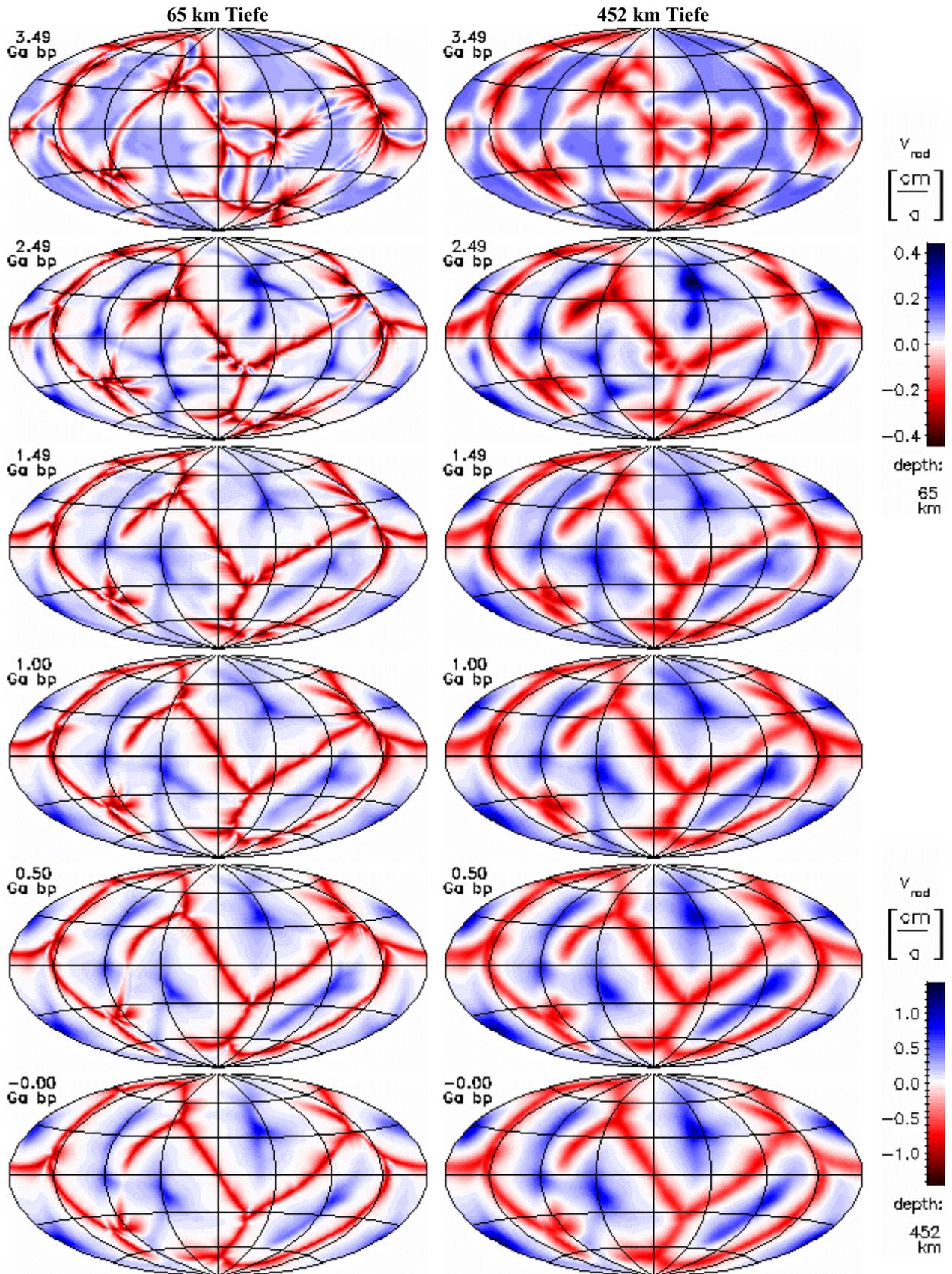


**Abb. 5.2-14:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des unteren Mantels



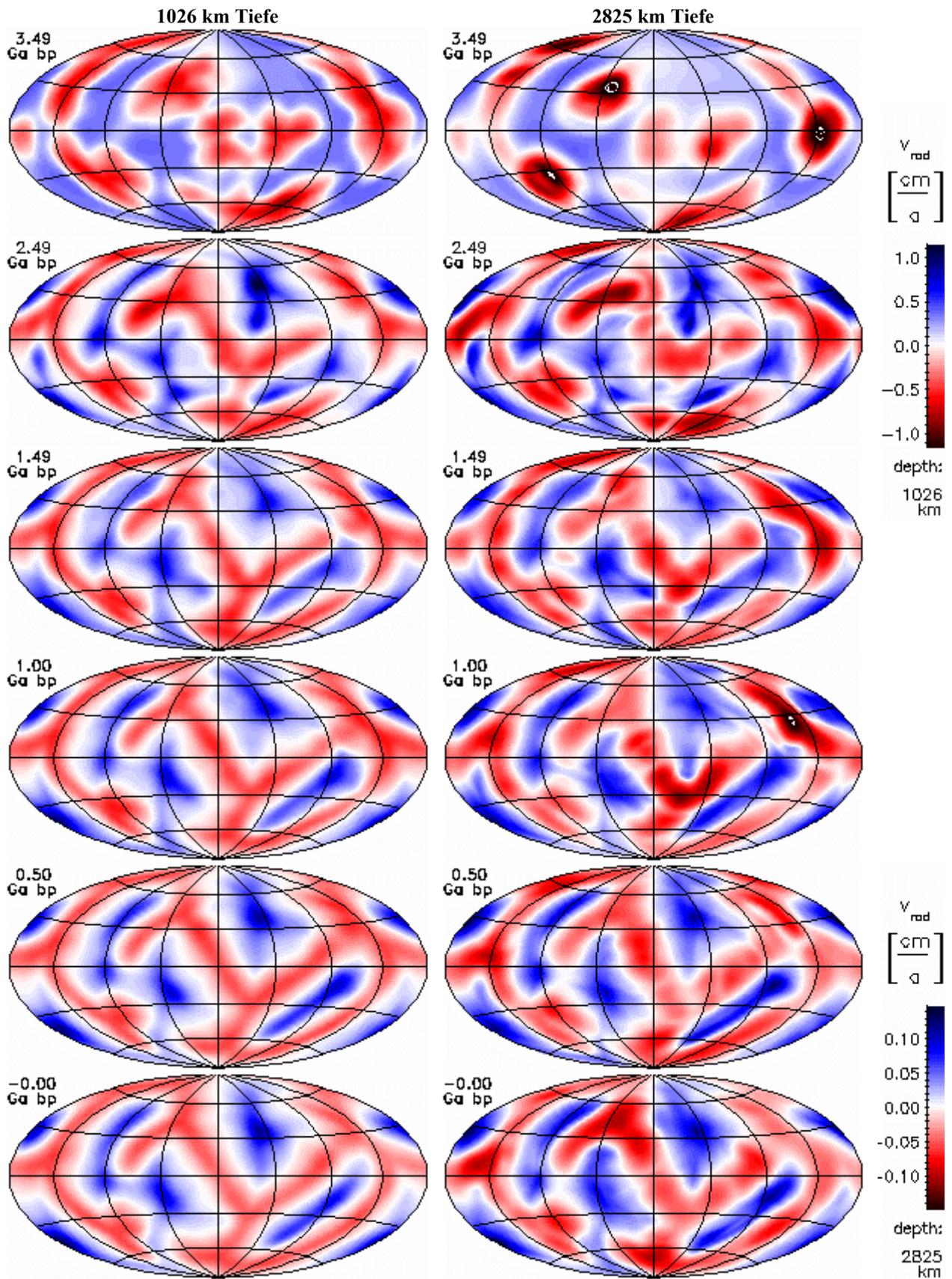
**Abb. 5.2-15:** Zeitliche Entwicklung der Heizleistung durch Zerfall von  $^{40}\text{K}$ ,  $^{42}\text{Th}$ ,  $^{235}\text{U}$  und  $^{238}\text{U}$

## 5.2. Modell 637



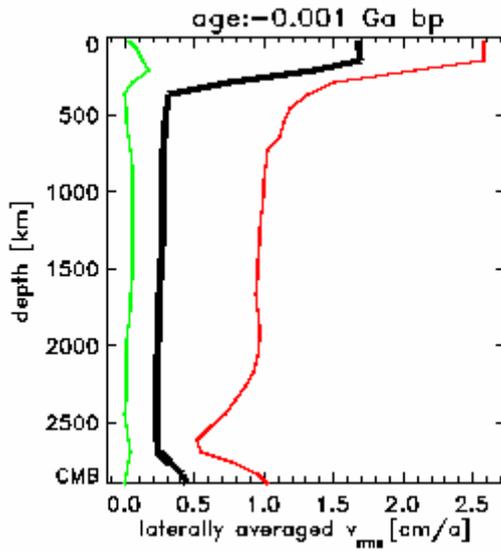
**Abb. 5.2-16:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente nahe der Oberfläche und im oberen Mantel. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte wurden evtl. abgeschnitten.

## 5.2. Modell 637

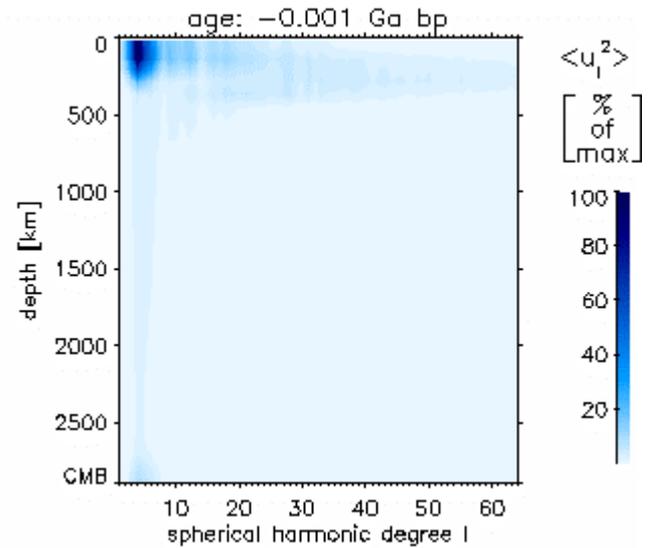


**Abb. 5.2-17:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente im unteren Mantel und nahe der CMB. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte wurden eventuell abgeschnitten.

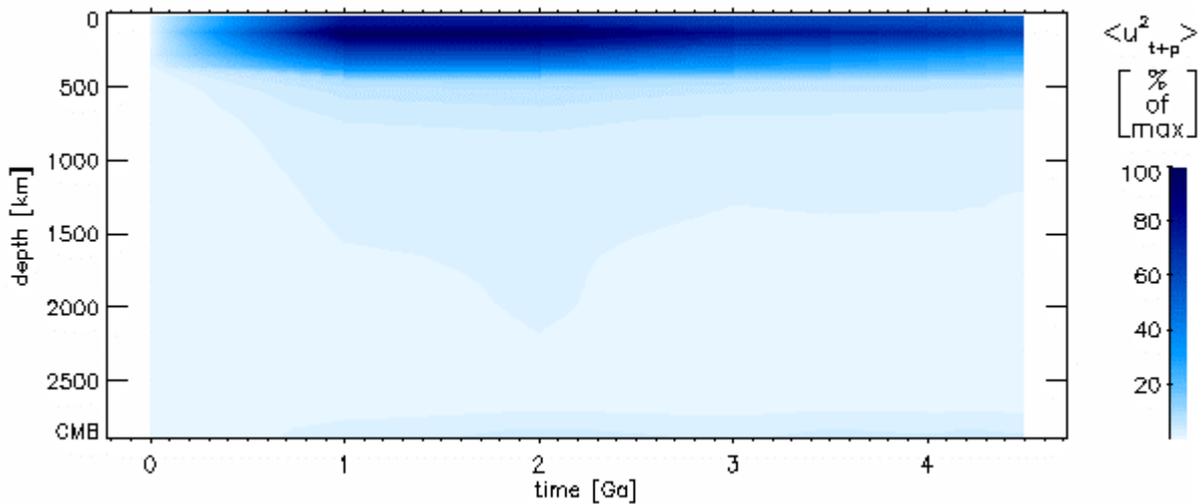
## 5.2. Modell 637



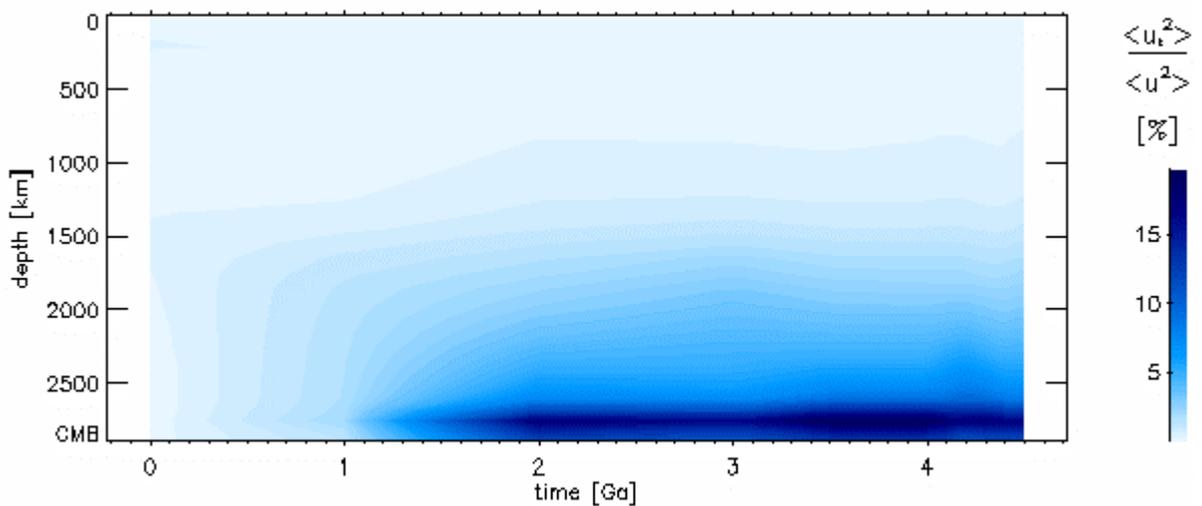
**Abb. 5.2-18:** Heutiges Geschwindigkeitsprofil



**Abb. 5.2-19:** Spektrum von toroidaler plus poloidaler kinetischer Energie

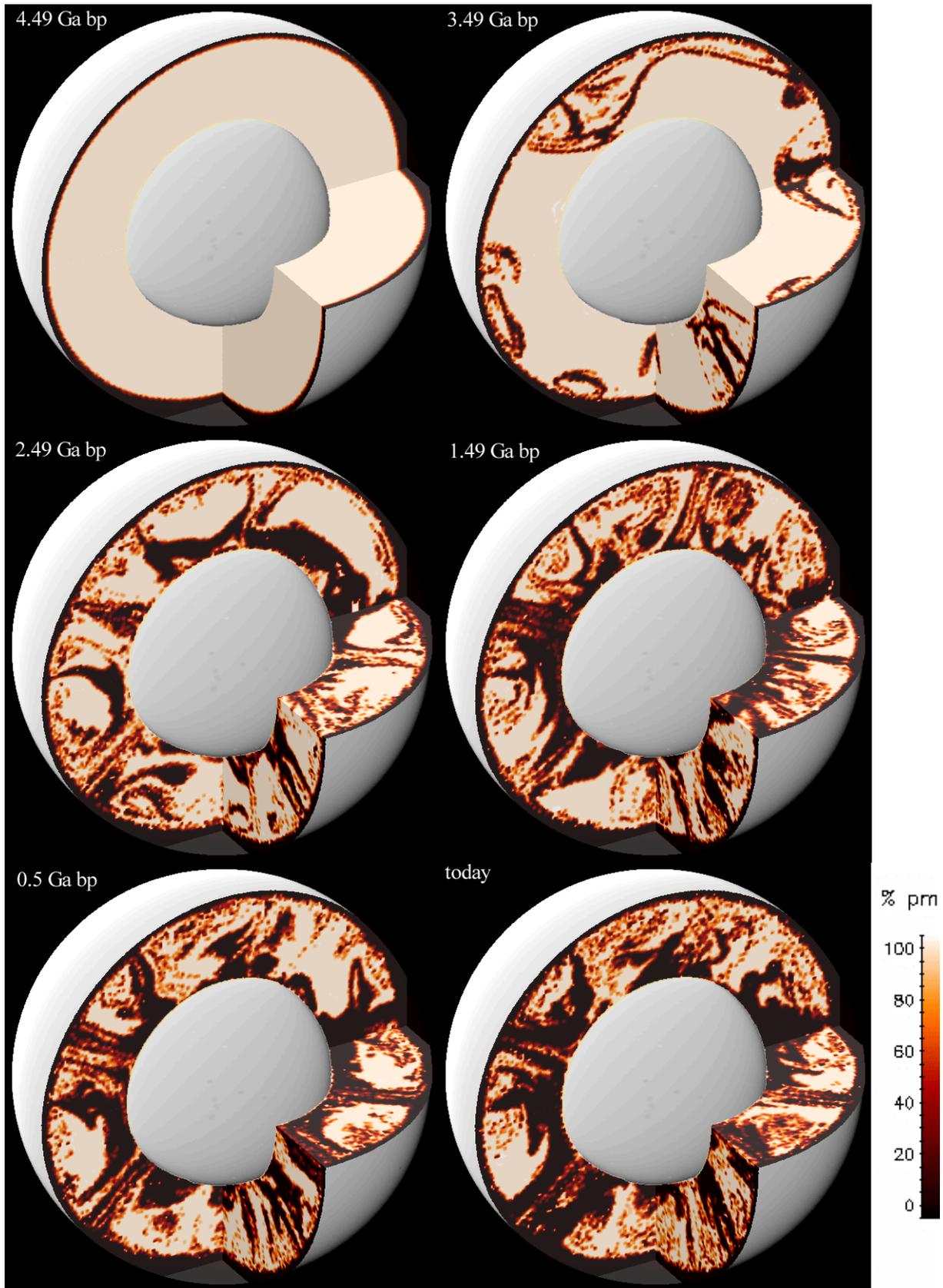


**Abb. 5.2-20:** Entwicklung der Tiefenverteilung der Summe von poloidaler und toroidaler Energie



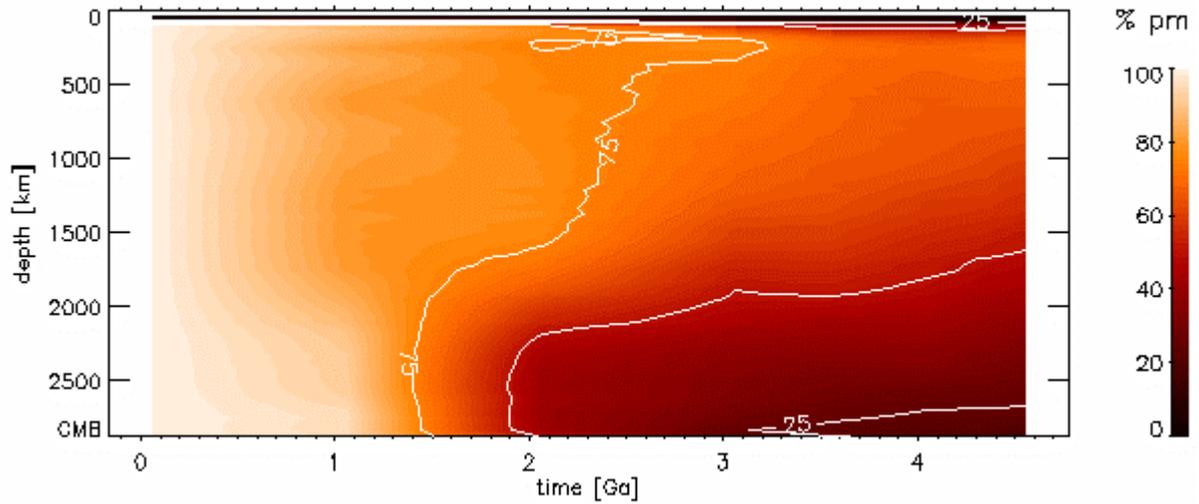
**Abb. 5.2-21:** Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung des toroidalen Anteils

5.2. Modell 637

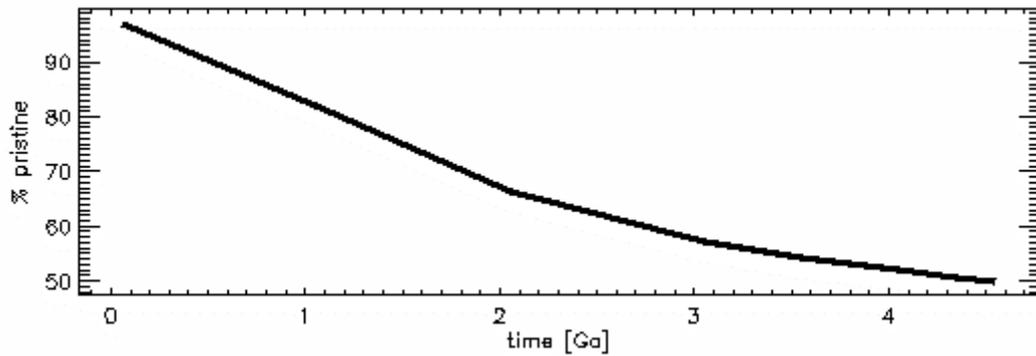


**Abb. 5.2-22:** Verteilung ursprünglichen Materials (pm) zu verschiedenen Zeiten

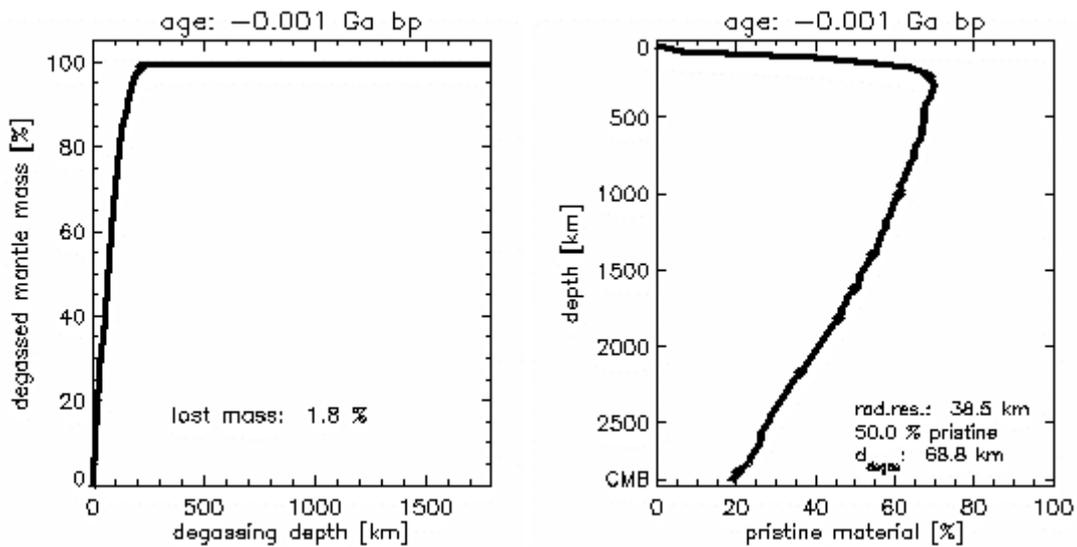
## 5.2. Modell 637



**Abb. 5.2-23:** Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung ursprünglichen Materials



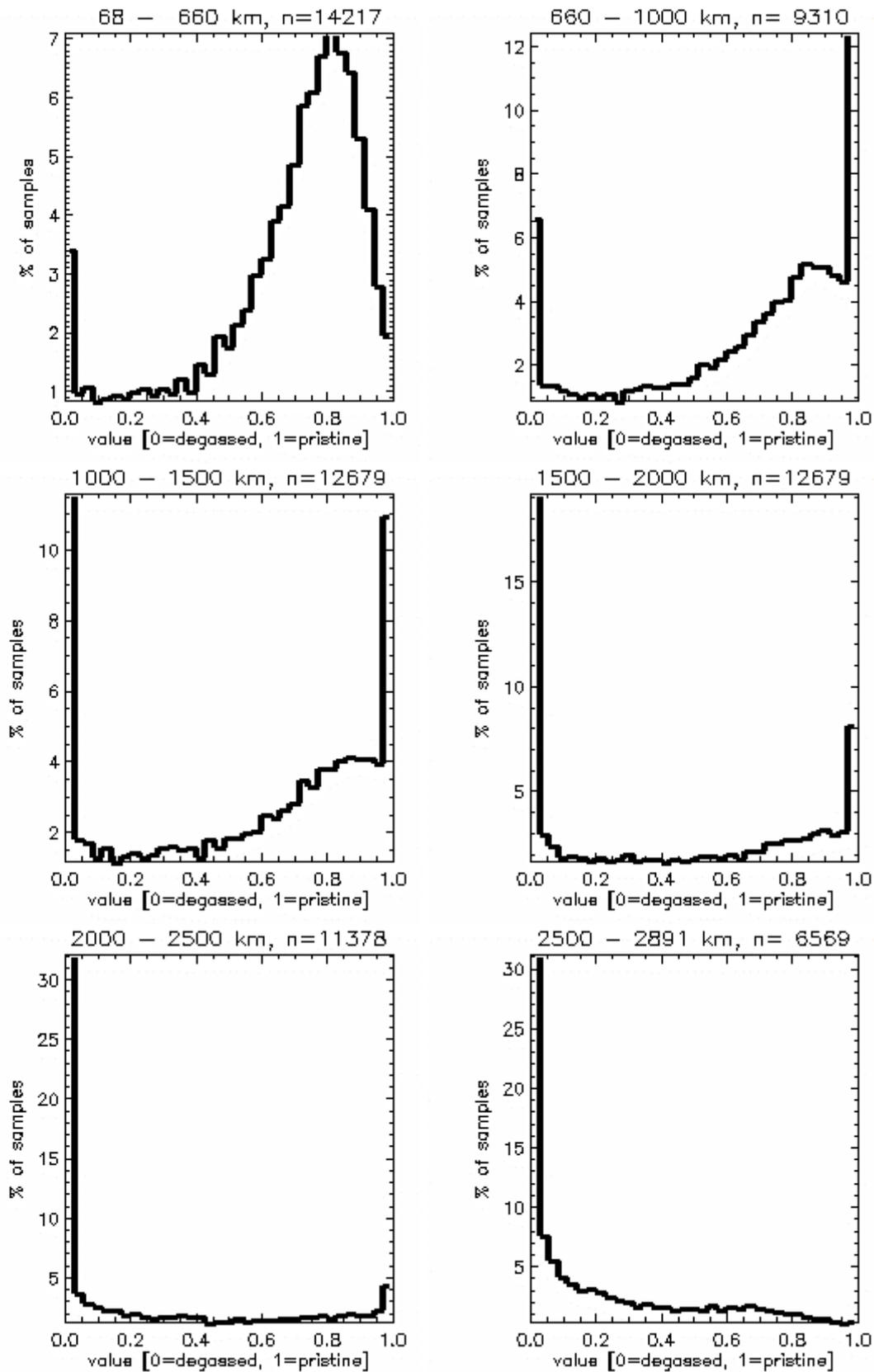
**Abb. 5.2-24:** Abnahme ursprünglichen Materials im Mantel



**Abb. 5.2-25:** Die Entgasungstiefe wird so festgelegt, dass am Ende der Rechnung 50 % des Mantels entgast sind

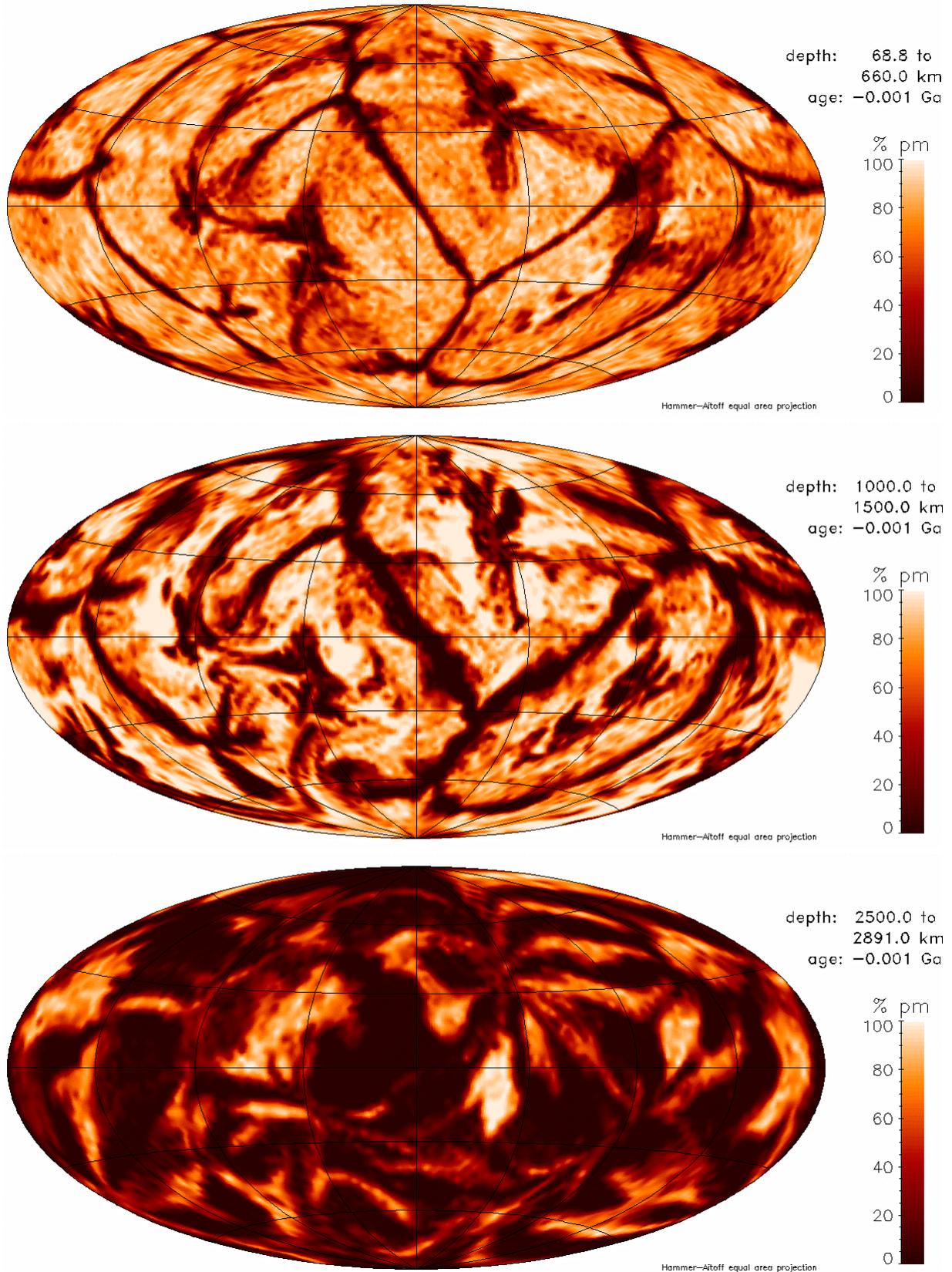
**Abb. 5.2-26:** Tiefenverteilung ursprünglichen Materials im heutigen Mantel

## 5.2. Modell 637



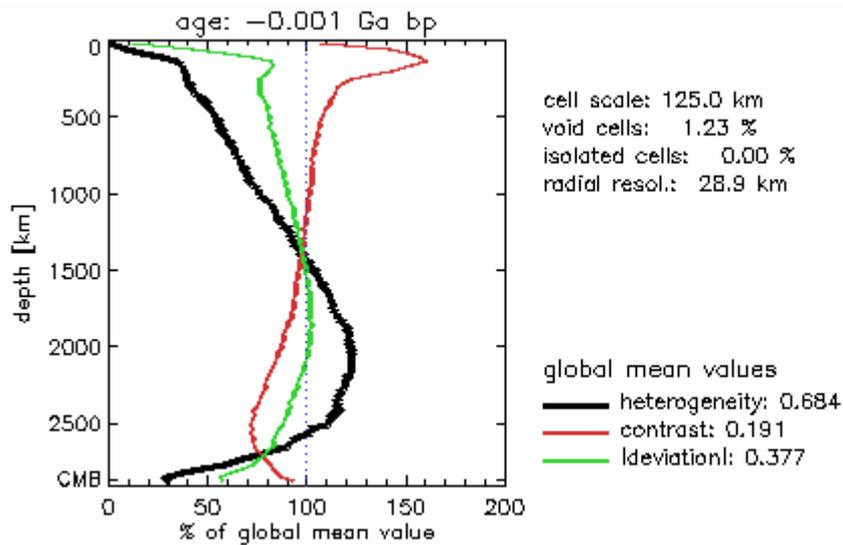
**Abb. 5.2-27:** Histogramme der Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Manteltiefen. Eine Probe repräsentiert den Mittelwert des gesamten radialen Intervalls. n ist die Anzahl der Unterteilungen der Kugelfläche in der jeweiligen Tiefe.

## 5.2. Modell 637

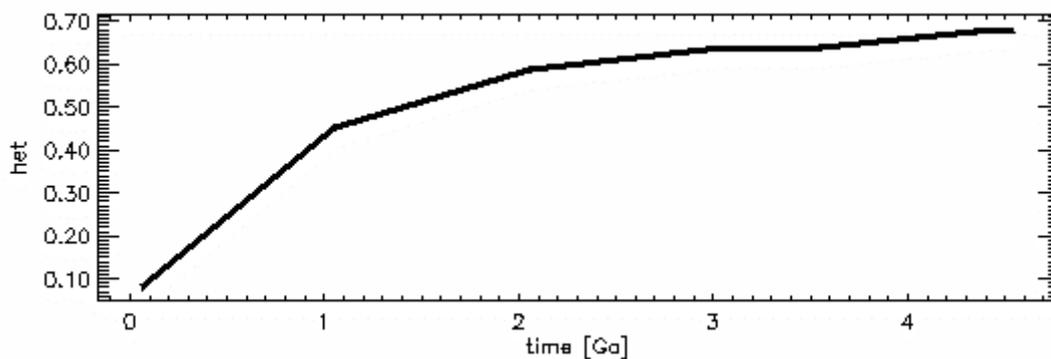


**Abb. 5.2-28:** Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Tiefenintervallen. Die laterale Auflösung entspricht der des jeweils passenden Histogramms in Abb. 5.2-27.

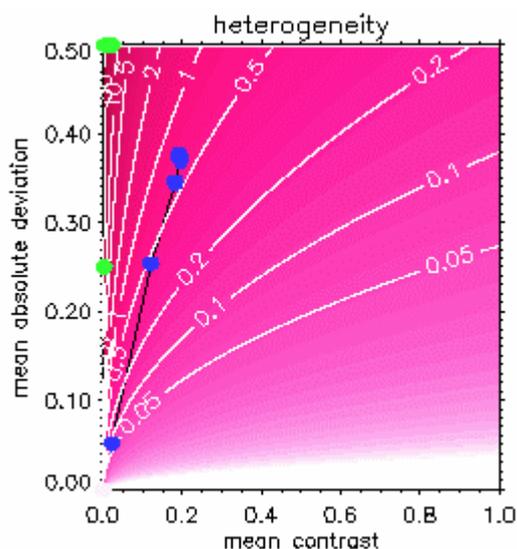
## 5.2. Modell 637



**Abb. 5.2-29:** Heutige Tiefenprofile der lateral gemittelten Werte von Heterogenität, Kontrast und mittlerer Absolutabweichung. Sie werden mit dem Mittelwert in der jeweiligen Kugelschale berechnet. Der globale Wert dient nur Skalierung der Abszisse.



**Abb. 5.2-30:** Zeitliche Entwicklung der Heterogenität

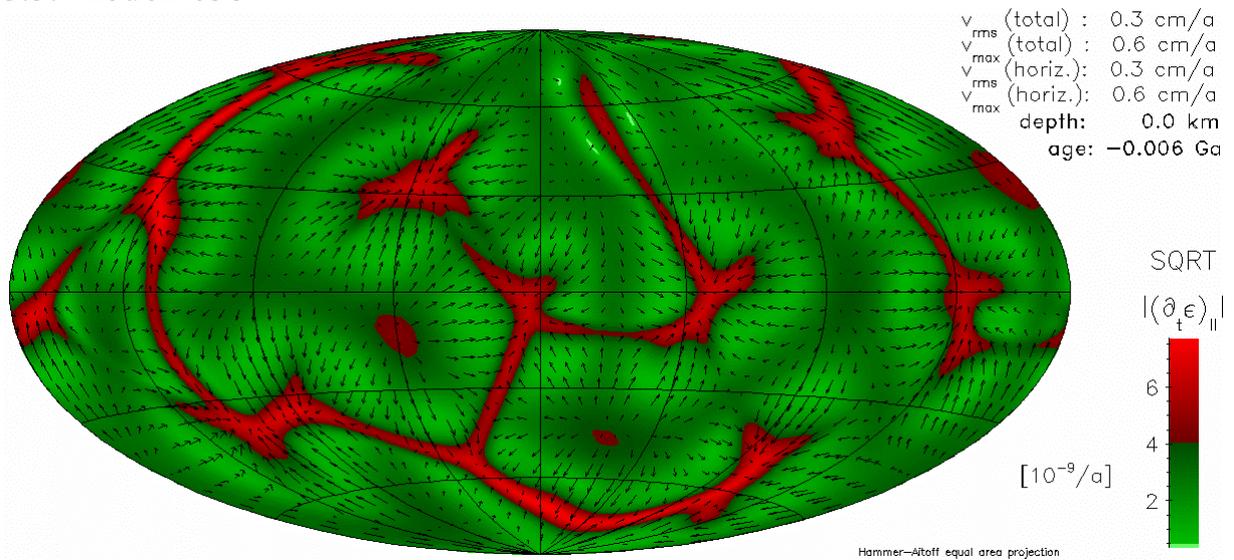


**Abb. 5.2-31:** Entwicklung der globalen Mittelwerte von Heterogenität, mittlerer Absolutabweichung und Kontrast.

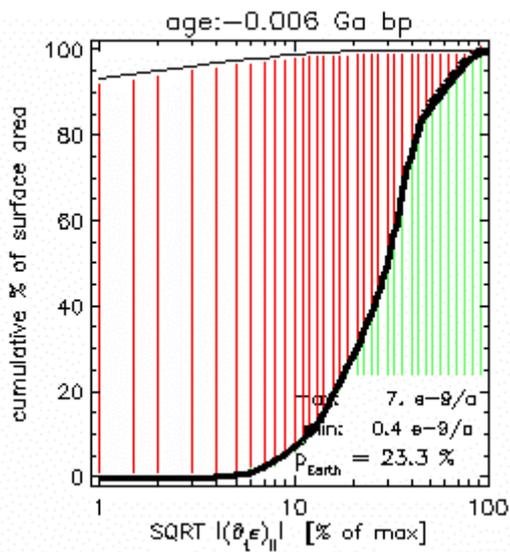
Jeder blaue Punkt entspricht einem ausgewerteten Zeitschritt. Die schwarze Verbindungslinie folgt der zeitlichen Entwicklung. Der älteste Zeitschritt liegt näher am Koordinatenursprung als die jüngeren. Die grünen Punkte markieren die Lage der in Kapitel 4.2.3 vorgestellten Referenzmodelle. Die rötliche Farbkodierung mit Höhenlinien stellt den Wert der Heterogenität dar.

### 5.3. Modell 638

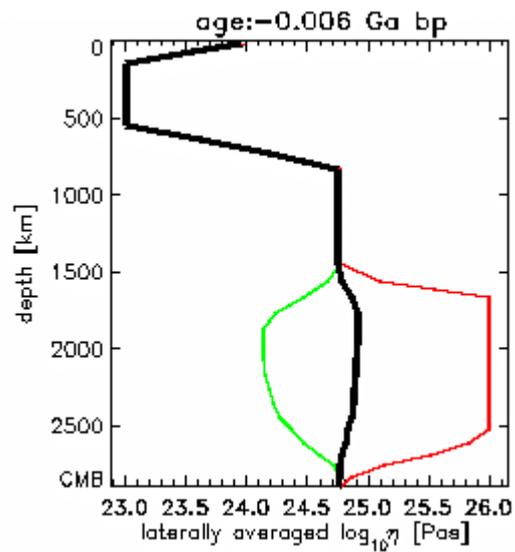
#### 5.3. Modell 638



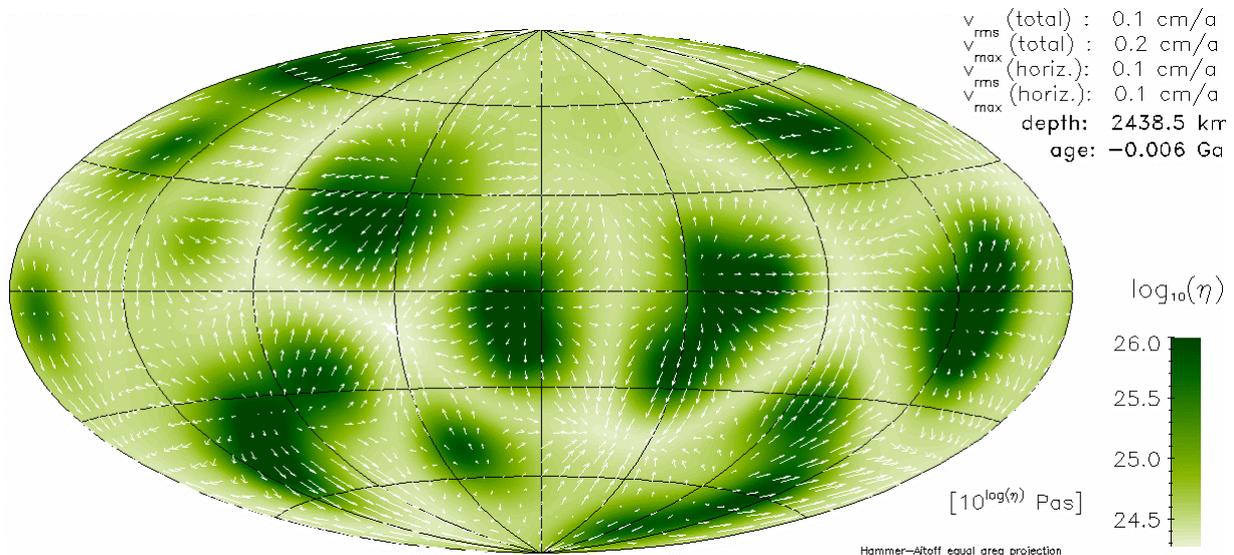
**Abb. 5.3-5:** Wurzel des Betrages der zweiten Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors



**Abb. 5.3-6:** Plattigkeit an der Oberfläche

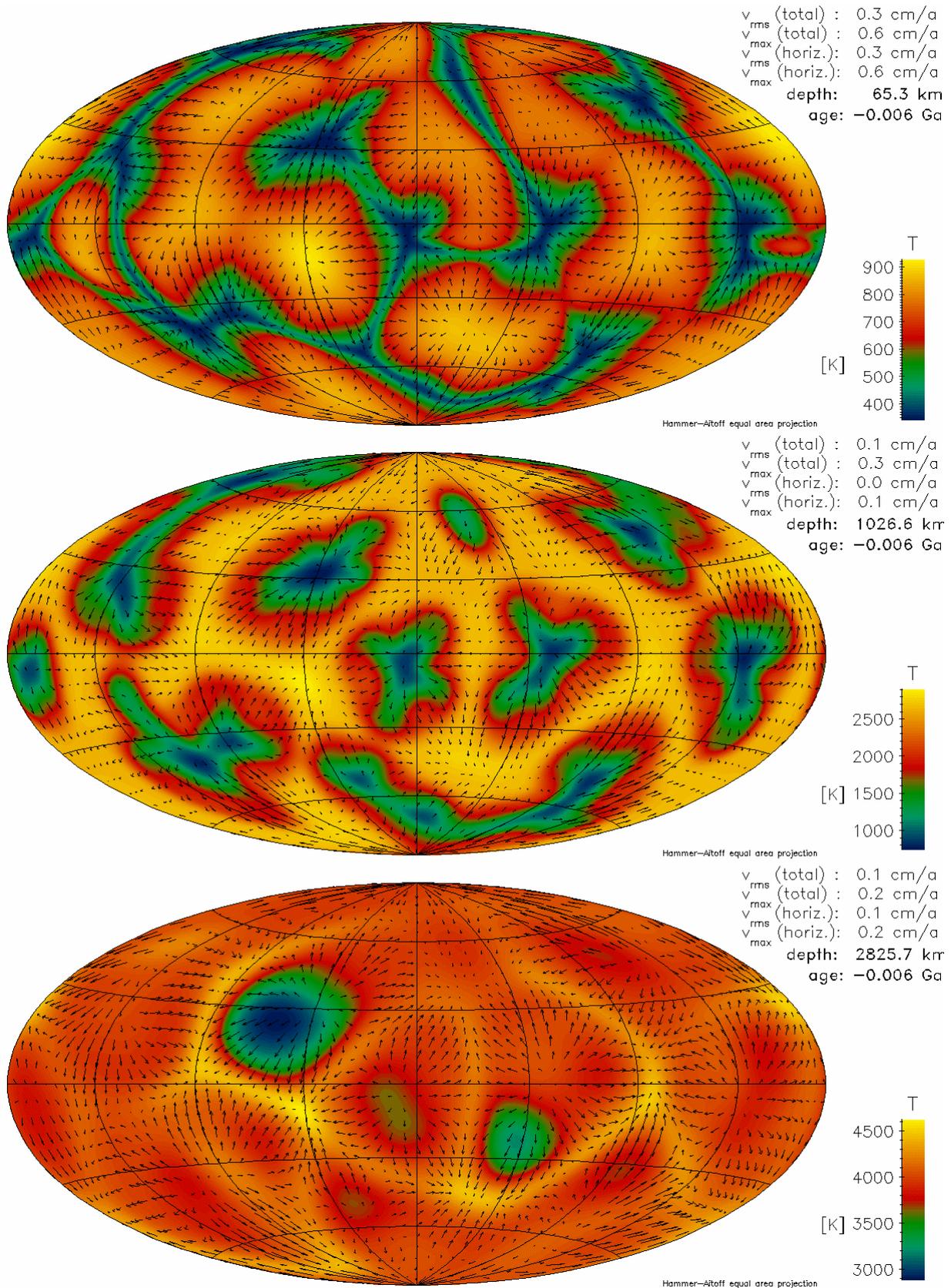


**Abb. 5.3-7:** Viskositätsprofil



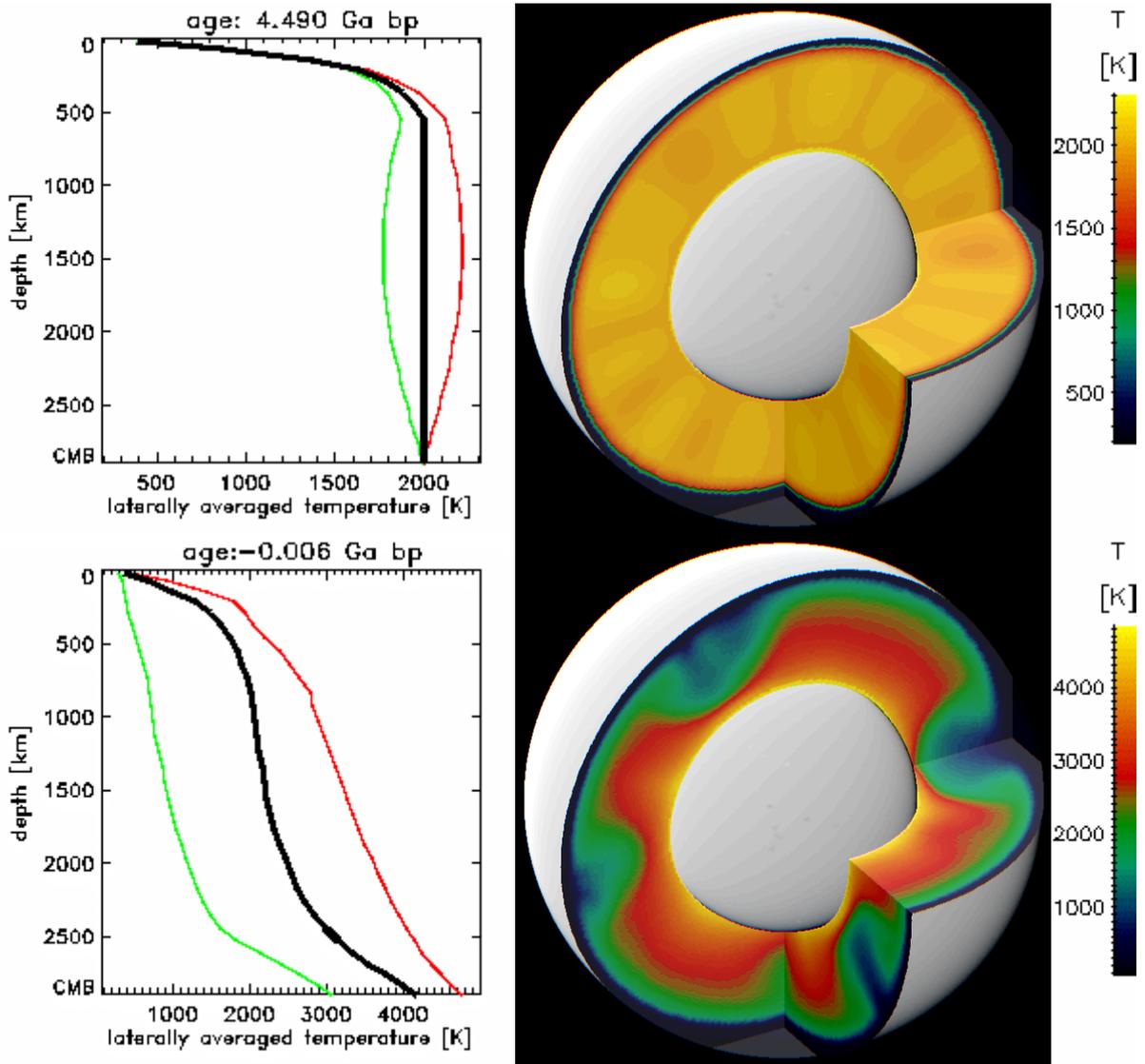
**Abb. 5.3-8:** Viskosität in der Tiefe mit großen lateralen Unterschieden

### 5.3. Modell 638

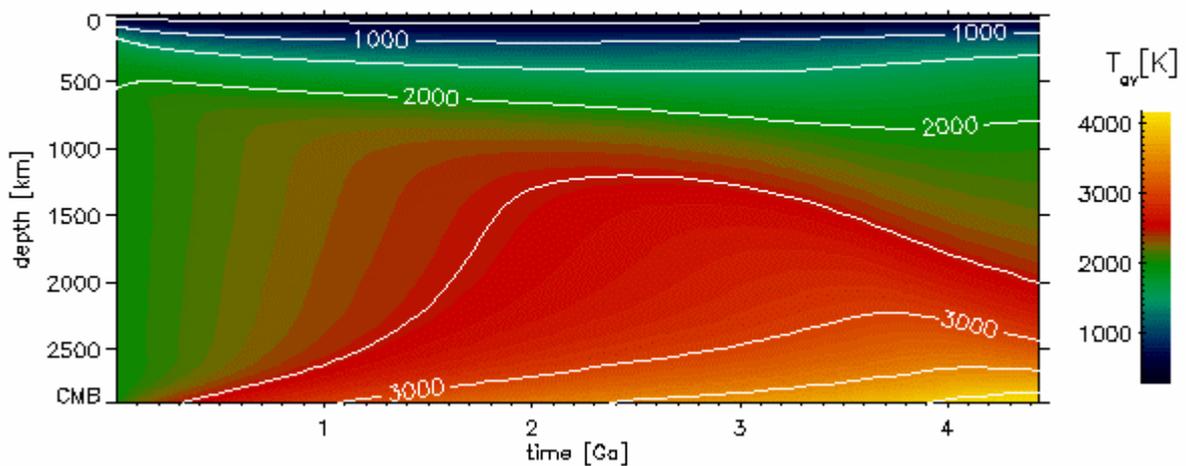


**Abb. 5.3-5:** Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten in verschiedenen Manteltiefen

### 5.3. Modell 638

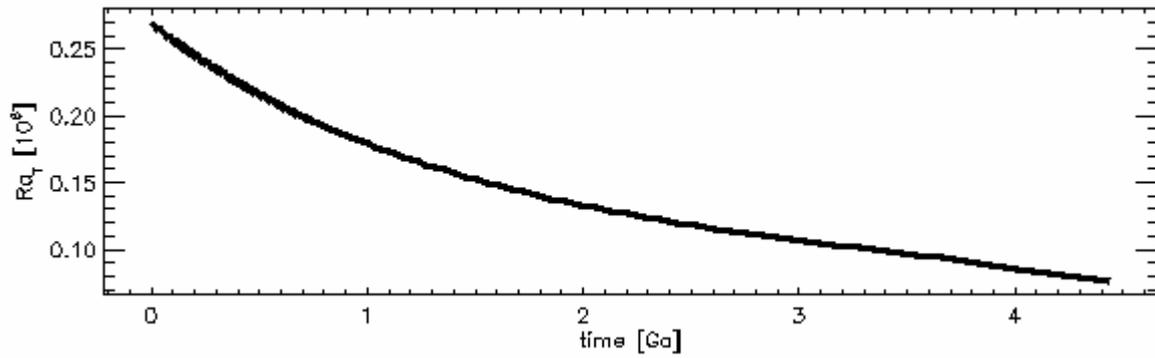


**Abb. 5.3-6:** Temperaturverteilung im Mantel am Anfang der Rechnung und heute

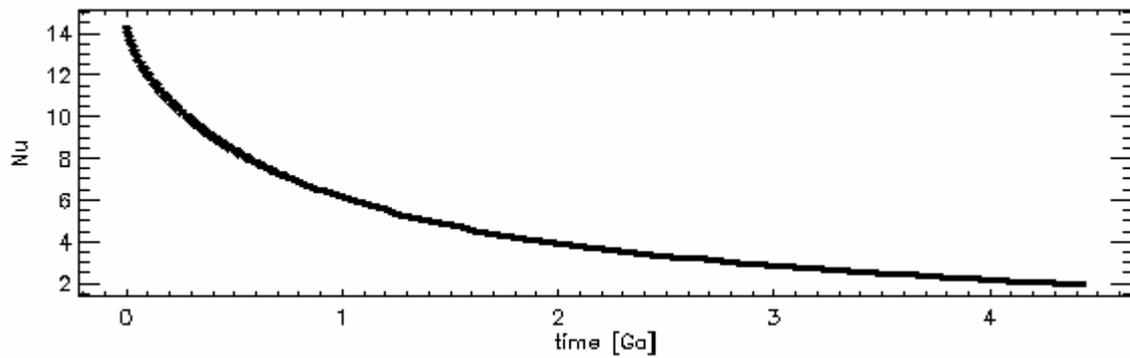


**Abb. 5.3-7:** Zeitliche Entwicklung des Temperaturprofiles

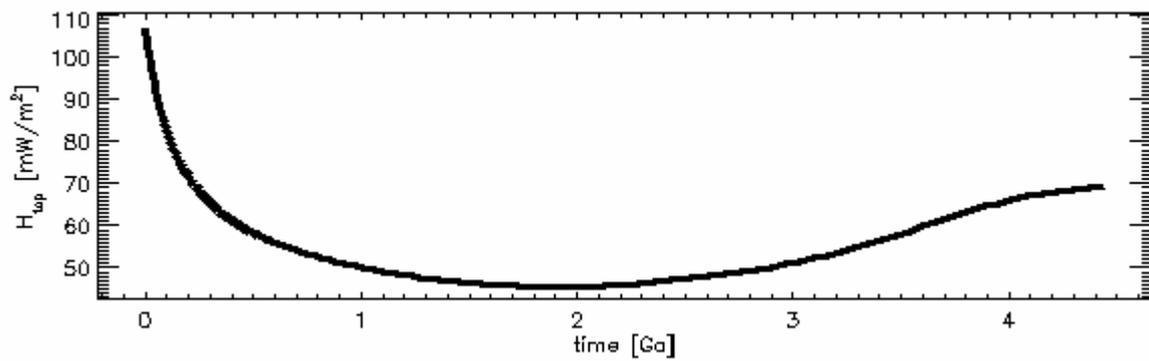
### 5.3. Modell 638



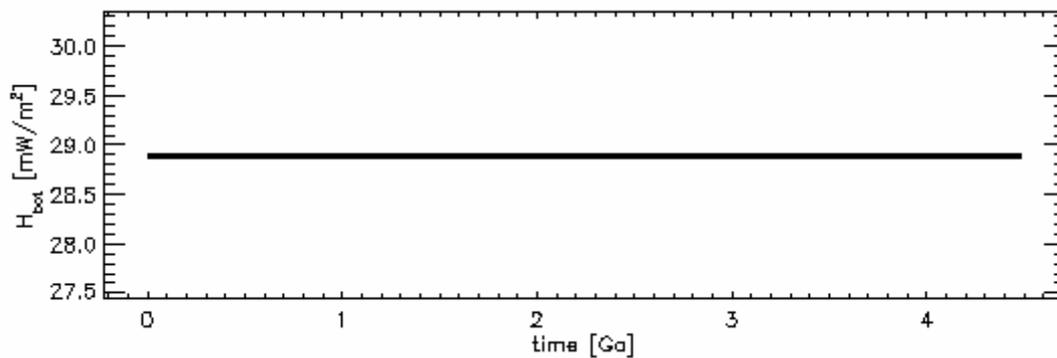
**Abb. 5.3-8:** Zeitliche Entwicklung der Rayleigh-Zahl



**Abb. 5.3-9:** Zeitliche Entwicklung der Nusselt-Zahl

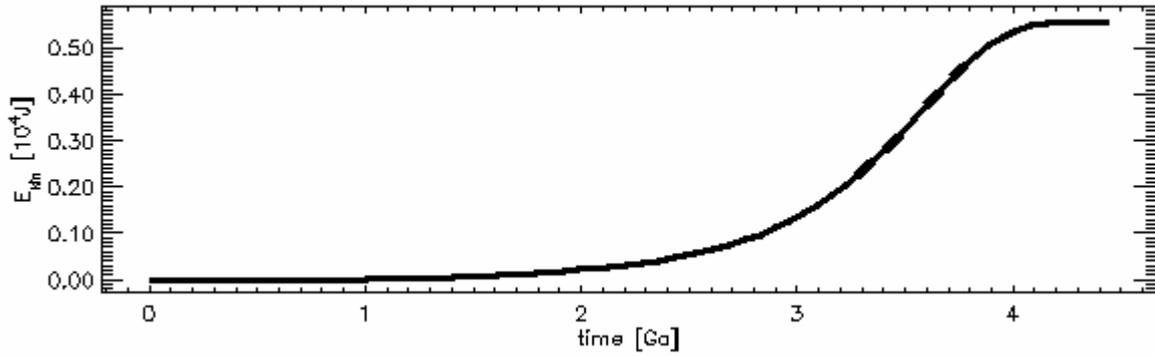


**Abb. 5.3-10:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Oberfläche

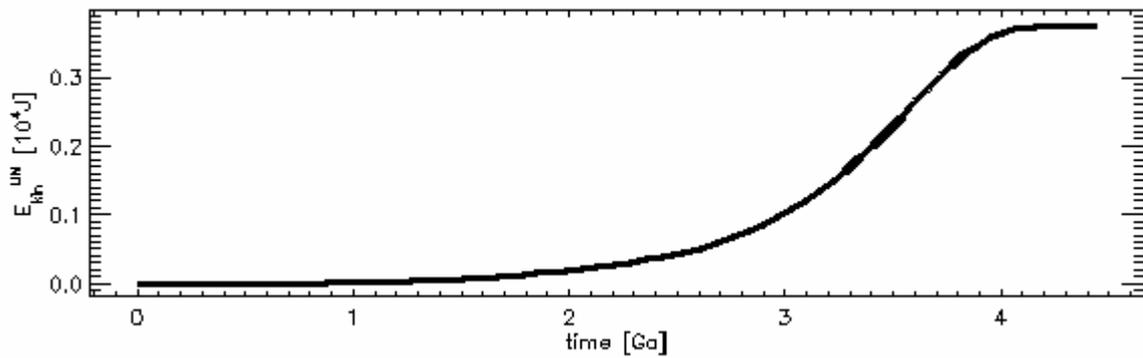


**Abb. 5.3-11:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Kern-Mantel-Grenze

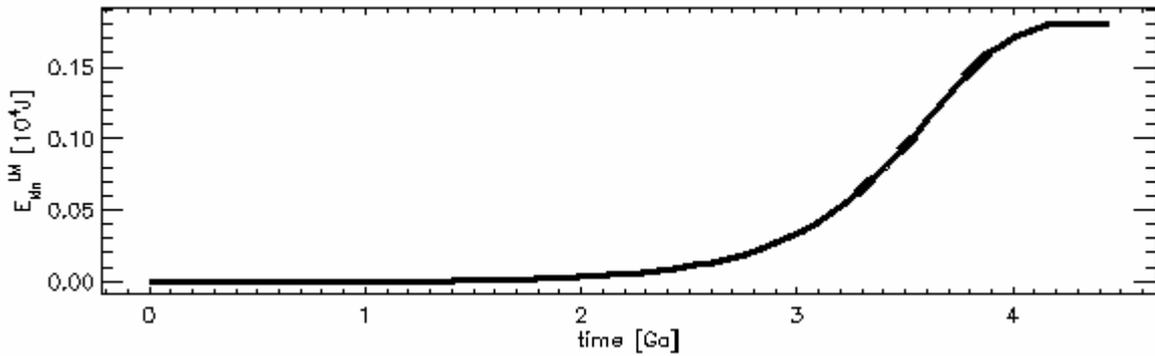
### 5.3. Modell 638



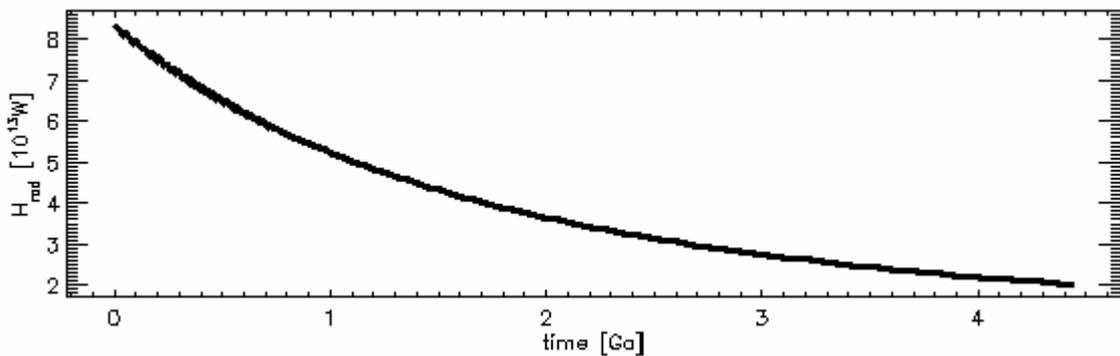
**Abb. 5.3-12:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des gesamten Mantels



**Abb. 5.3-13:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des oberen Mantels

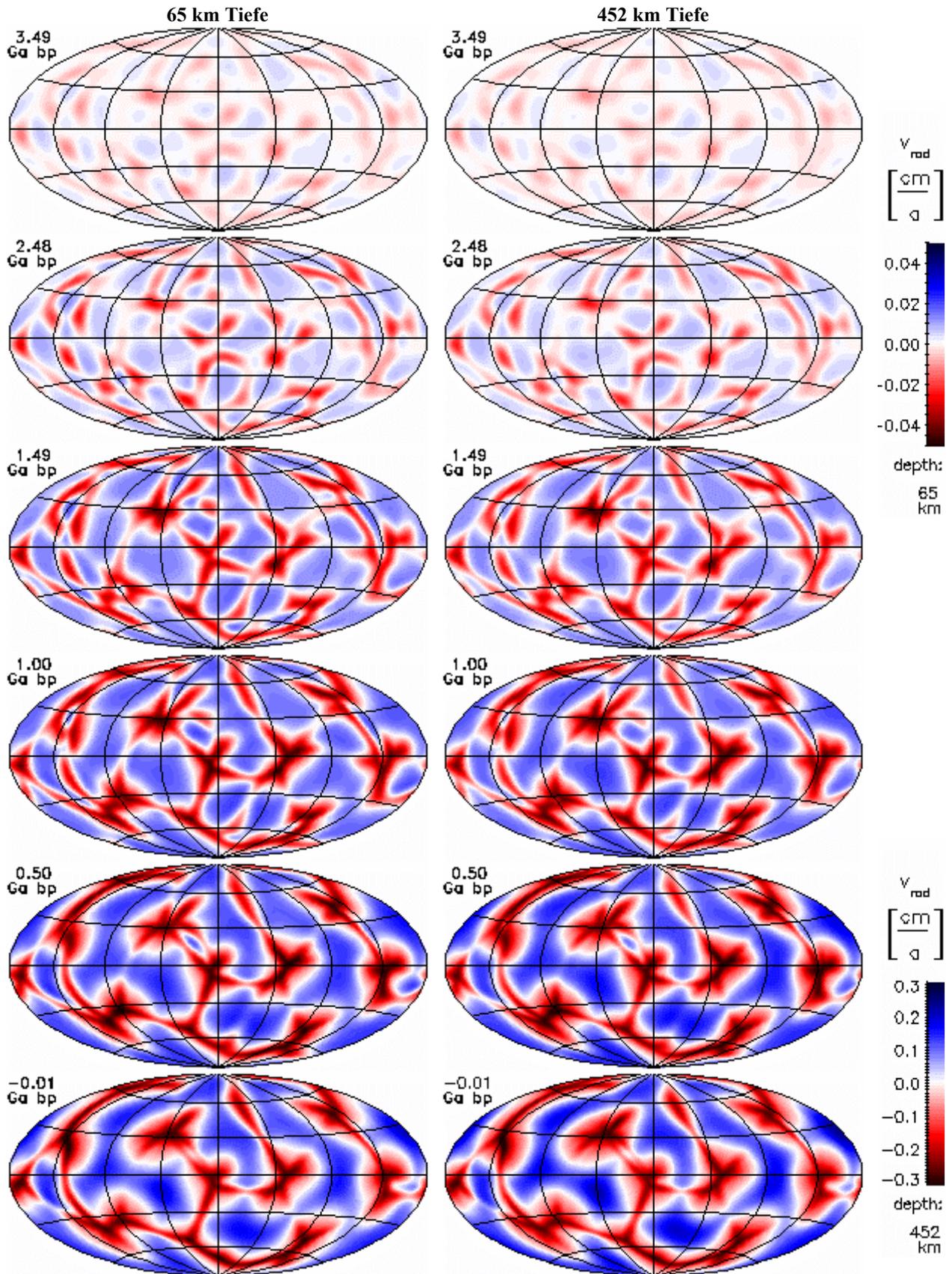


**Abb. 5.3-14:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des unteren Mantels



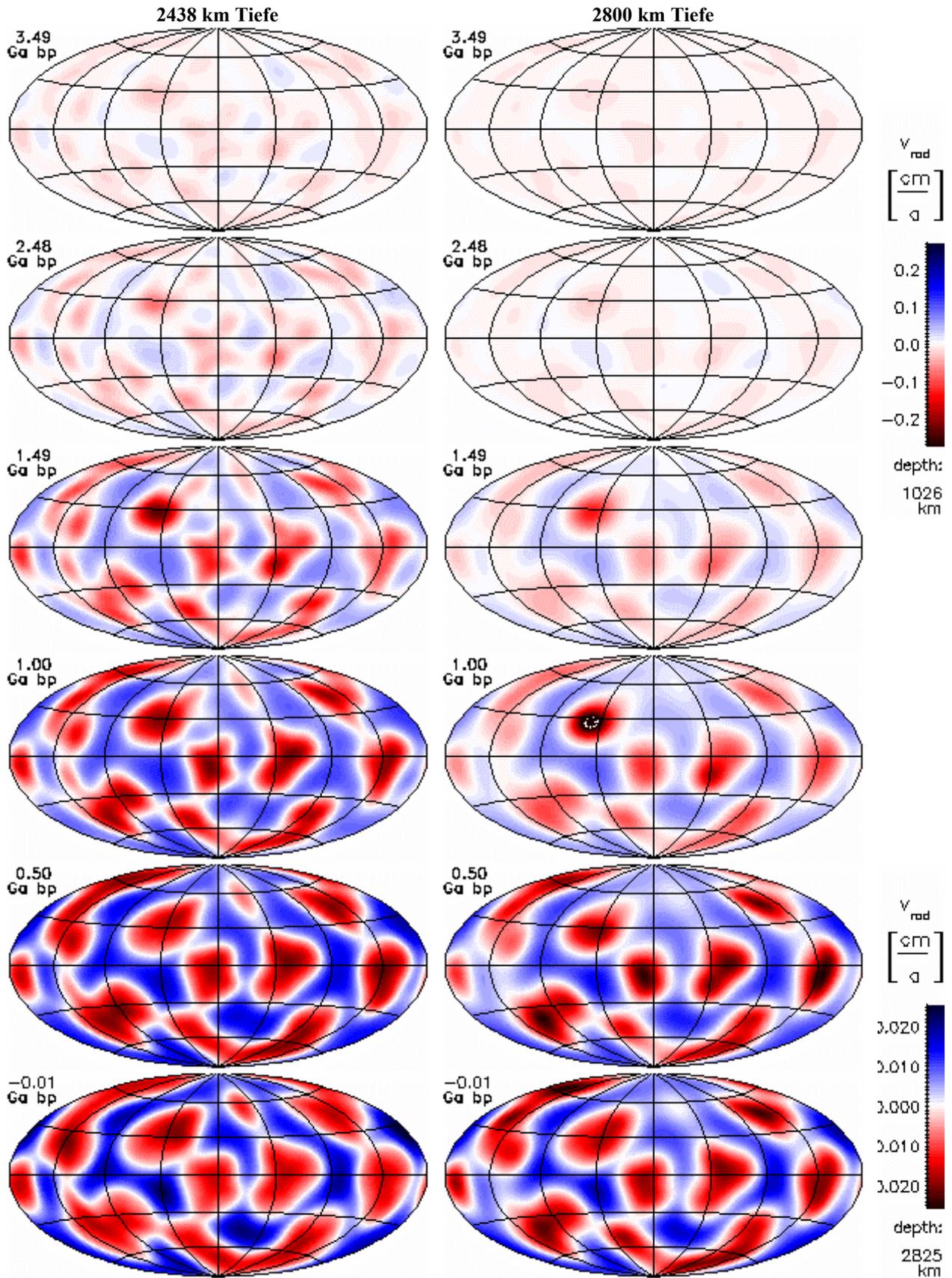
**Abb. 5.3-15:** Zeitliche Entwicklung der Heizleistung durch Zerfall von <sup>40</sup>K, <sup>42</sup>Th, <sup>235</sup>U und <sup>238</sup>U

### 5.3. Modell 638



**Abb. 5.3-16:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente nahe der Oberfläche und im oberen Mantel. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind eventuell abgeschnitten.

### 5.3. Modell 638



**Abb. 5.3-17:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente im unteren Mantel und nahe der CMB. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind evtl. abgeschnitten.

### 5.3. Modell 638

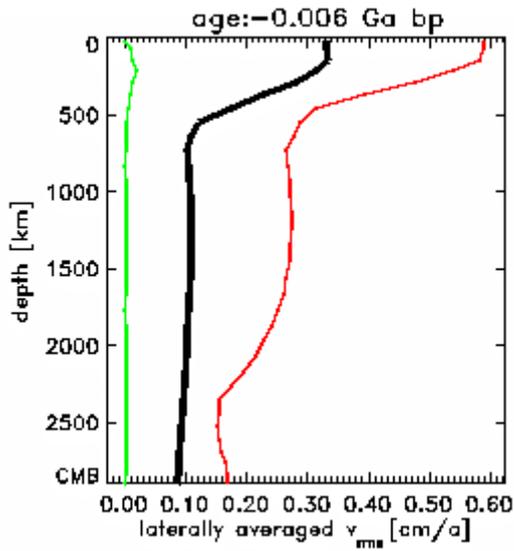


Abb. 5.3-18: Heutiges Geschwindigkeitsprofil

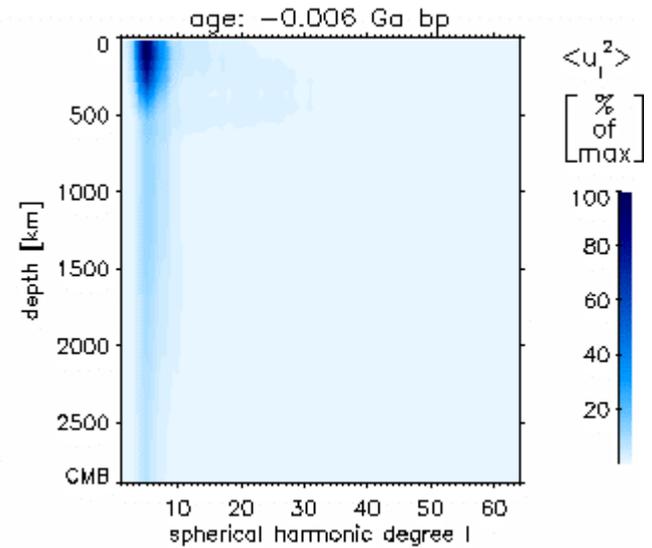


Abb. 5.3-19: Spektrum von toroidaler plus poloidaler kinetischer Energie

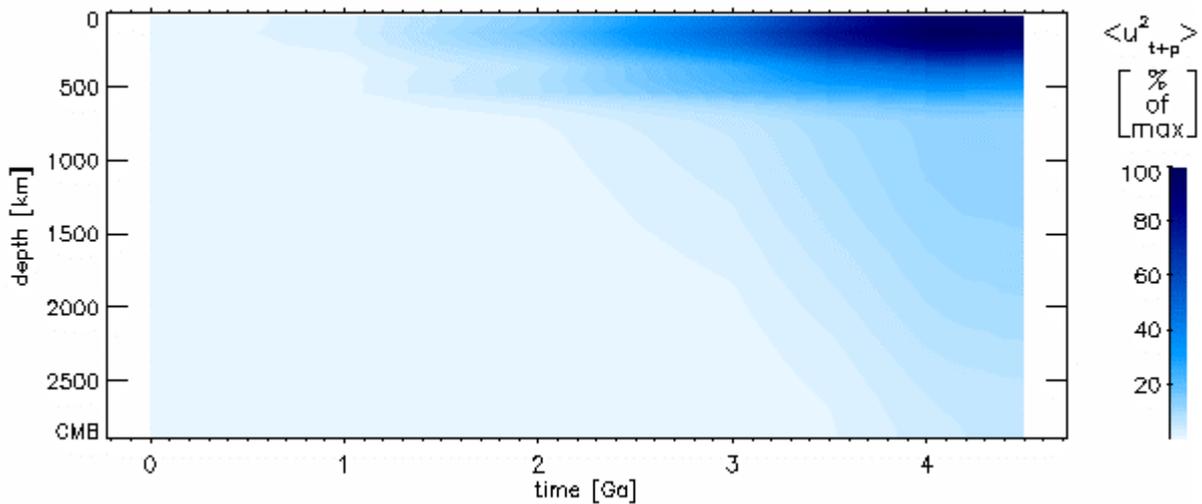


Abb. 5.3-20: Entwicklung der Tiefenverteilung der Summe von poloidaler und toroidaler Energie

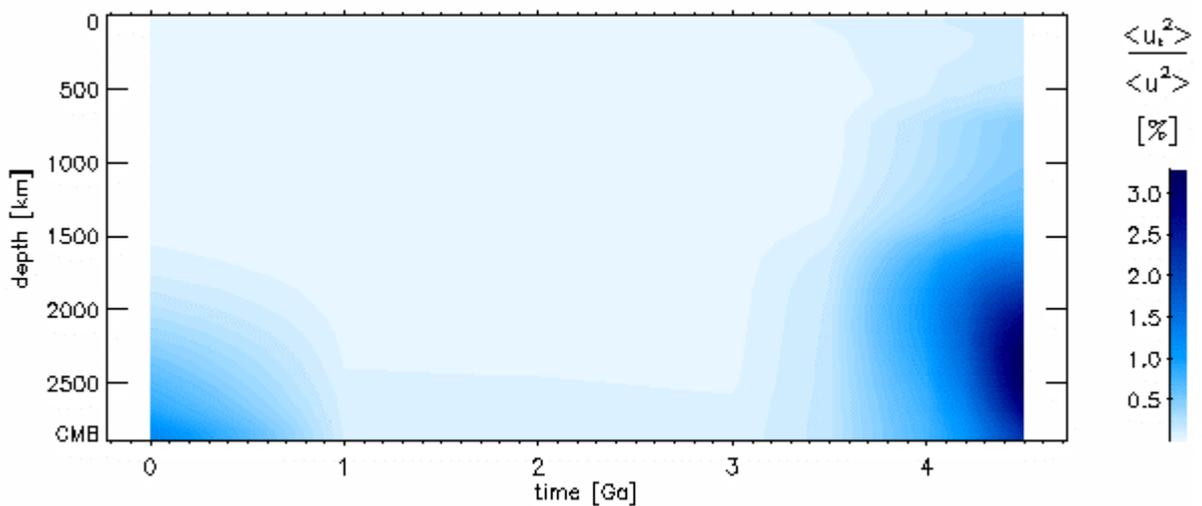
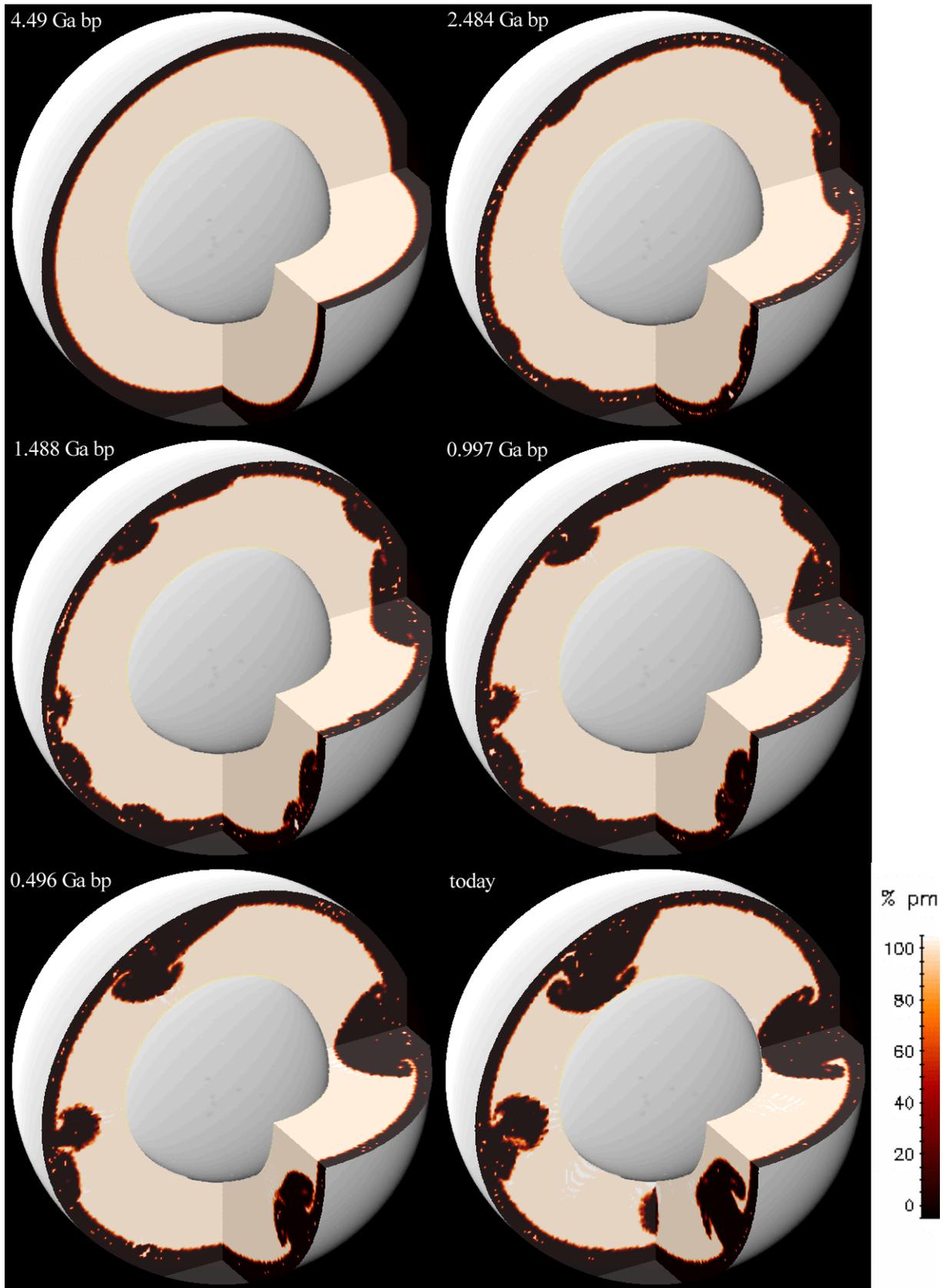


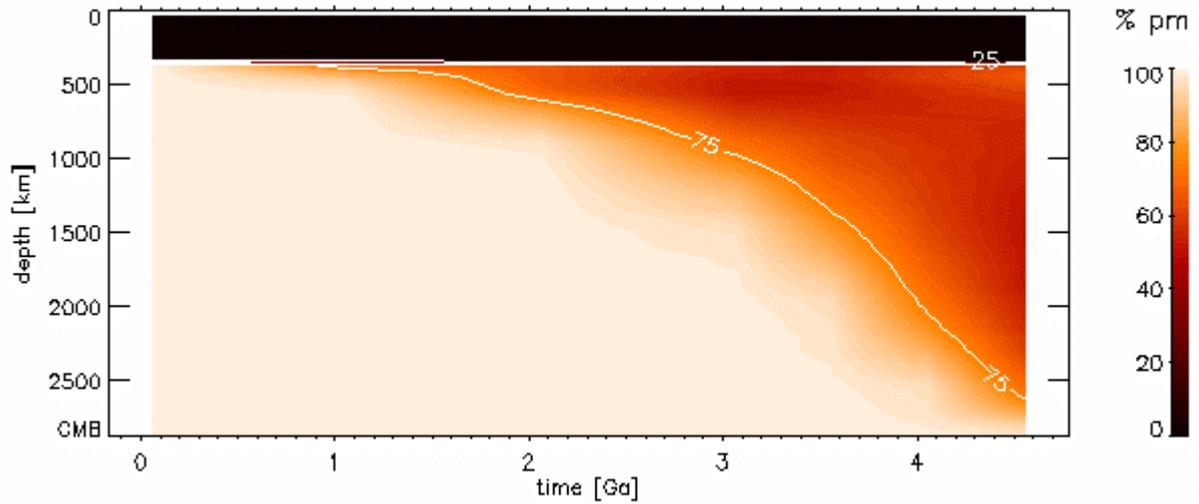
Abb. 5.3-21: Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung des toroidalen Anteils

### 5.3. Modell 638

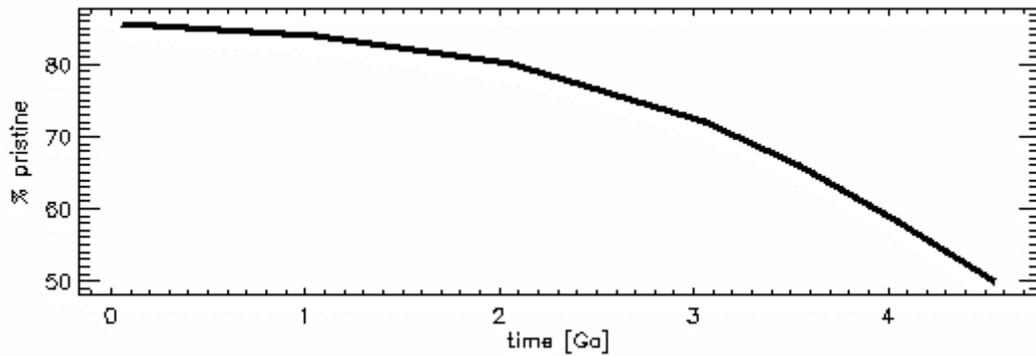


**Abb. 5.3-22:** Verteilung ursprünglichen Materials (pm) zu verschiedenen Zeiten

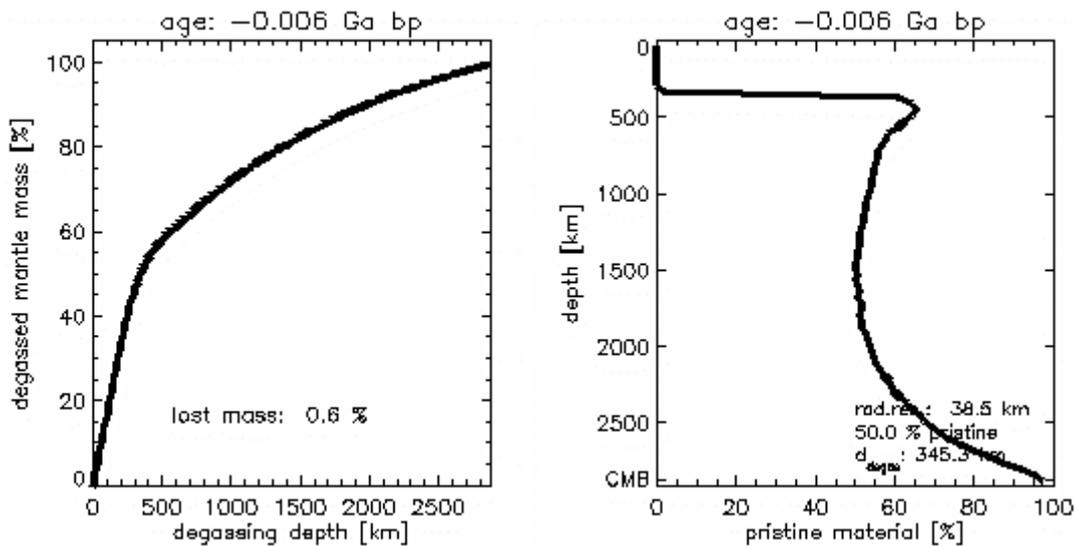
### 5.3. Modell 638



**Abb. 5.3-23:** Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung ursprünglichen Materials



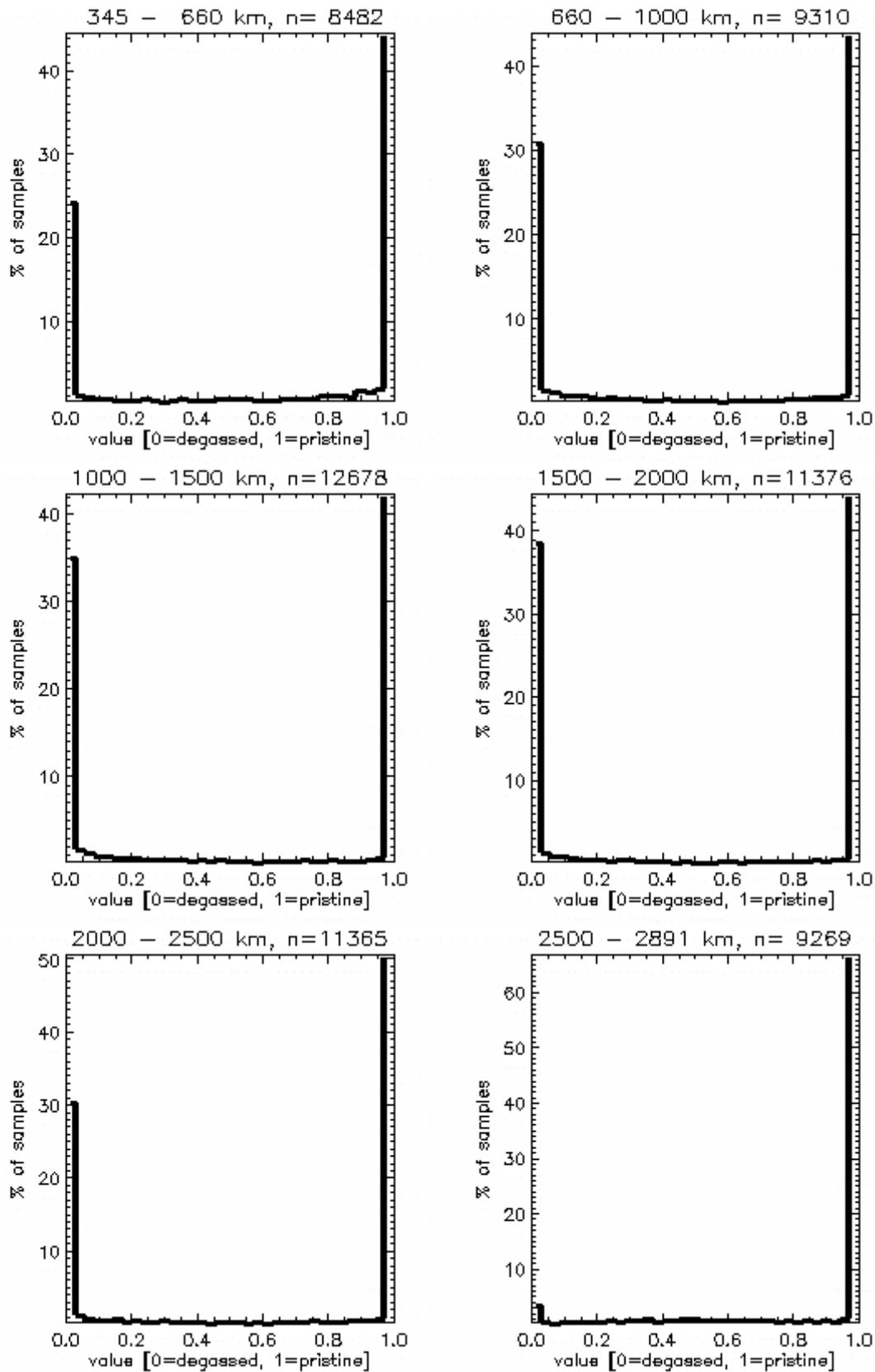
**Abb. 5.3-24:** Abnahme ursprünglichen Materials im Mantel



**Abb. 5.3-25:** Die Entgasungstiefe wird so festgelegt, dass am Ende der Rechnung 50 % des Mantels entgast sind

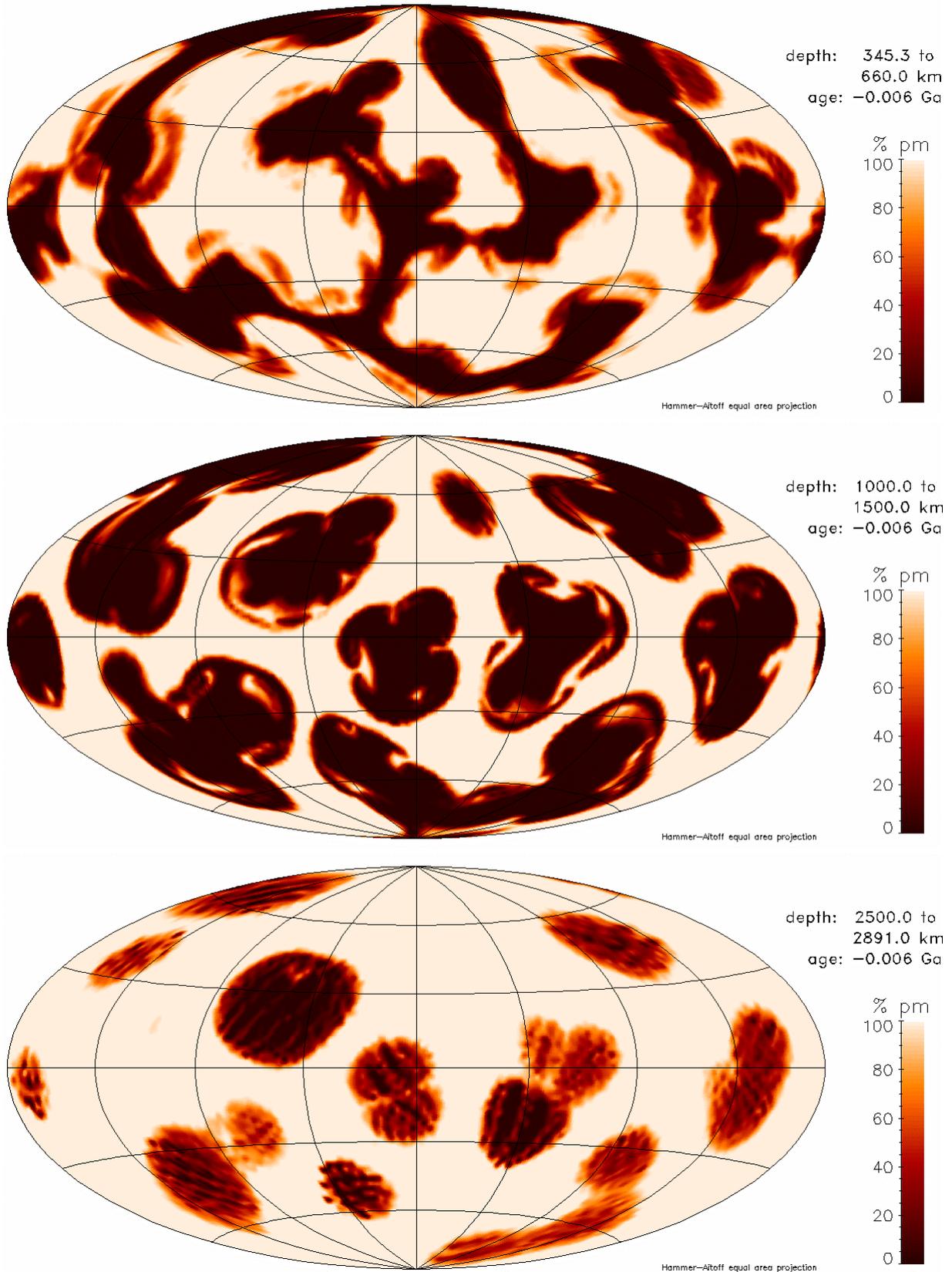
**Abb. 5.3-26:** Tiefenverteilung ursprünglichen Materials im heutigen Mantel

### 5.3. Modell 638



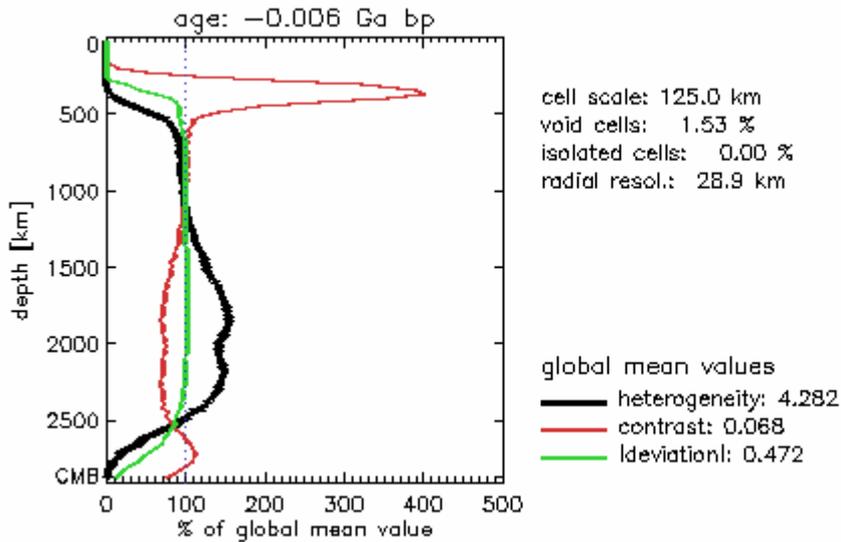
**Abb. 5.3-27:** Histogramme der Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Manteltiefen. Eine Probe repräsentiert den Mittelwert des gesamten radialen Intervalls. n ist die Anzahl der Unterteilungen der Kugelfläche in der jeweiligen Tiefe.

### 5.3. Modell 638

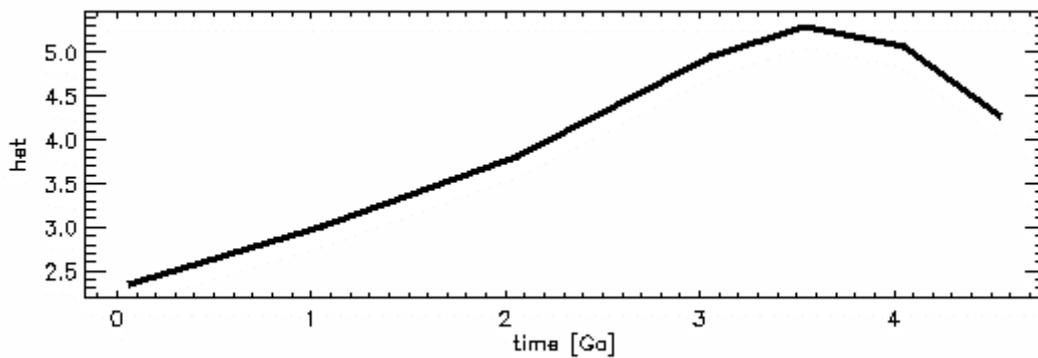


**Abb. 5.3-28:** Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Tiefenintervallen. Die laterale Auflösung entspricht der des jeweils passenden Histogramms in Abb. 5.3-27.

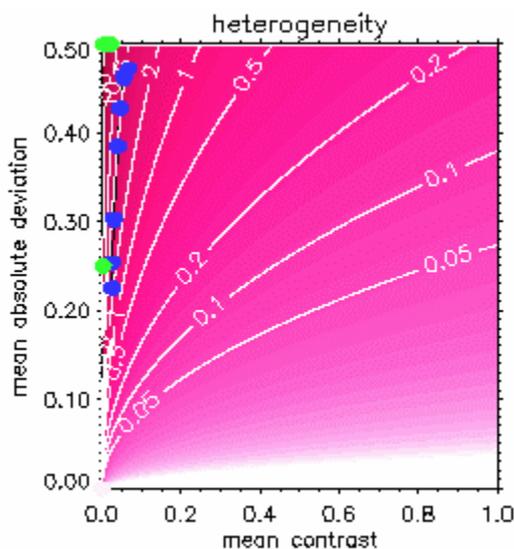
### 5.3. Modell 638



**Abb. 5.3-29:** Heutige Tiefenprofile der lateral gemittelten Werte von Heterogenität, Kontrast und mittlerer Absolutabweichung. Sie werden mit dem Mittelwert in der jeweiligen Kugelschale berechnet. Der globale Wert dient nur zur Skalierung der Abszisse.



**Abb. 5.3-30:** Zeitliche Entwicklung der Heterogenität

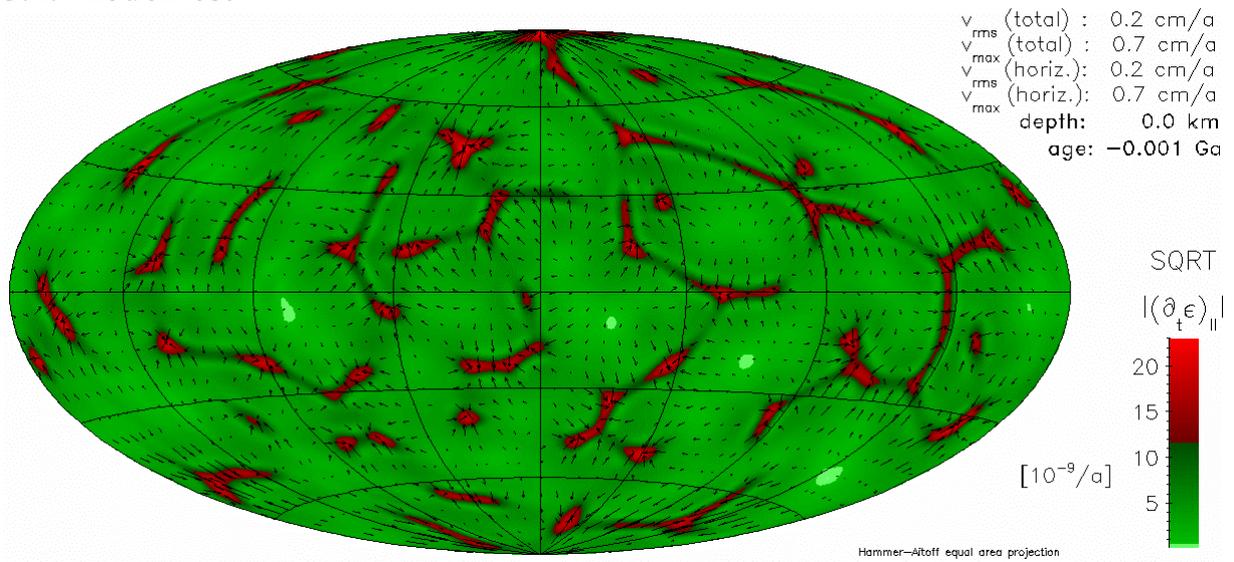


**Abb. 5.3-31:** Entwicklung der globalen Mittelwerte von Heterogenität, mittlerer Absolutabweichung und Kontrast.

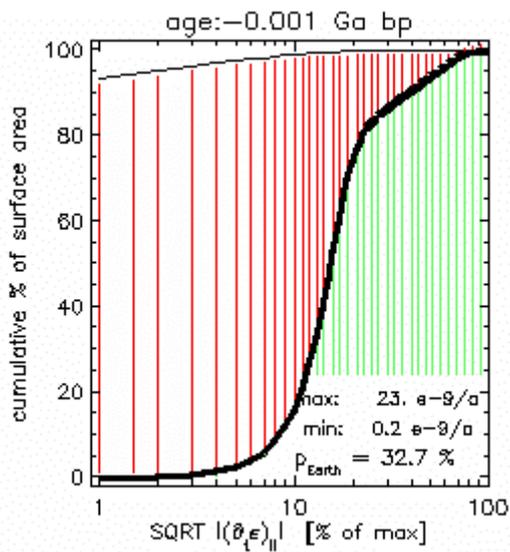
Jeder blaue Punkt entspricht einem ausgewerteten Zeitschritt. Die schwarze Verbindungslinie folgt der zeitlichen Entwicklung. Der älteste Zeitschritt liegt näher am Koordinatenursprung als die jüngeren. Die grünen Punkte markieren die Lage der in Kapitel 4.2.3 vorgestellten Referenzmodelle. Die rötliche Farbkodierung mit Höhenlinien stellt den Wert der Heterogenität dar.

## 5.4. Modell 639

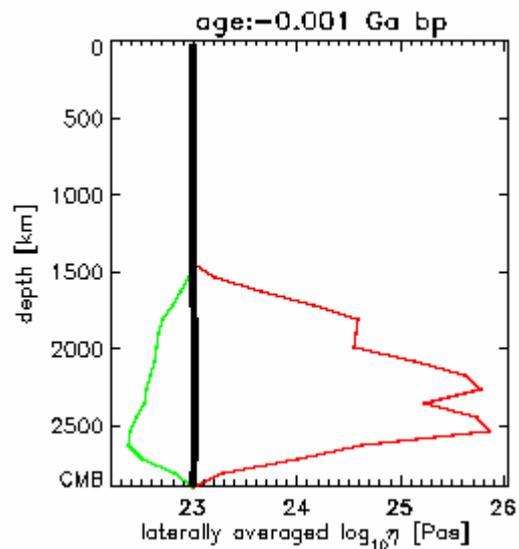
### 5.4. Modell 639



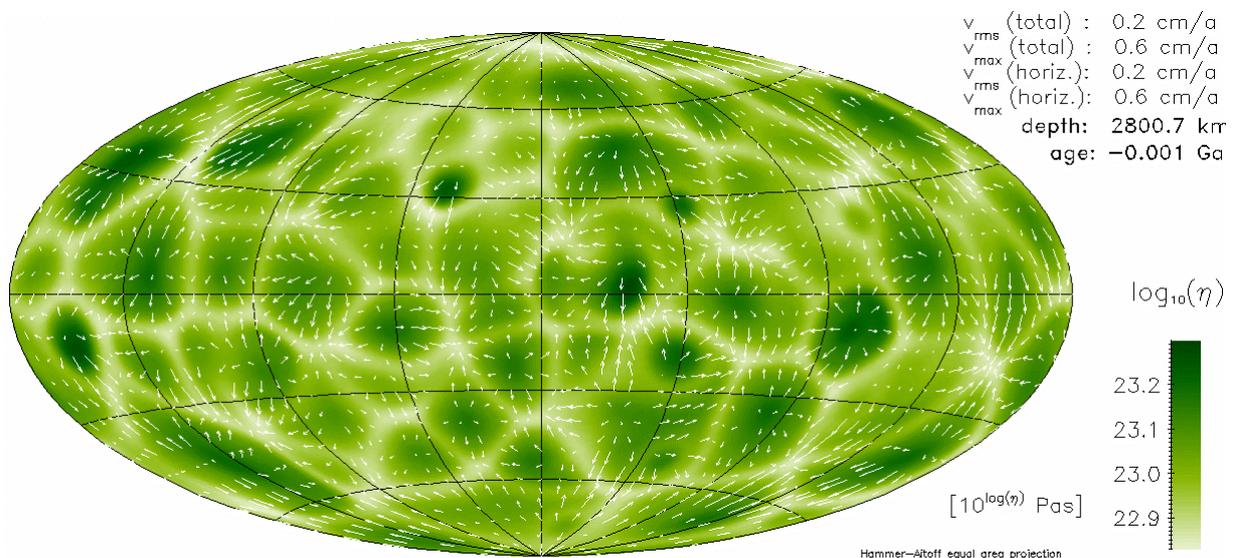
**Abb. 5.4-9:** Wurzel des Betrages der zweiten Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors



**Abb. 5.4-10:** Plattigkeit an der Oberfläche

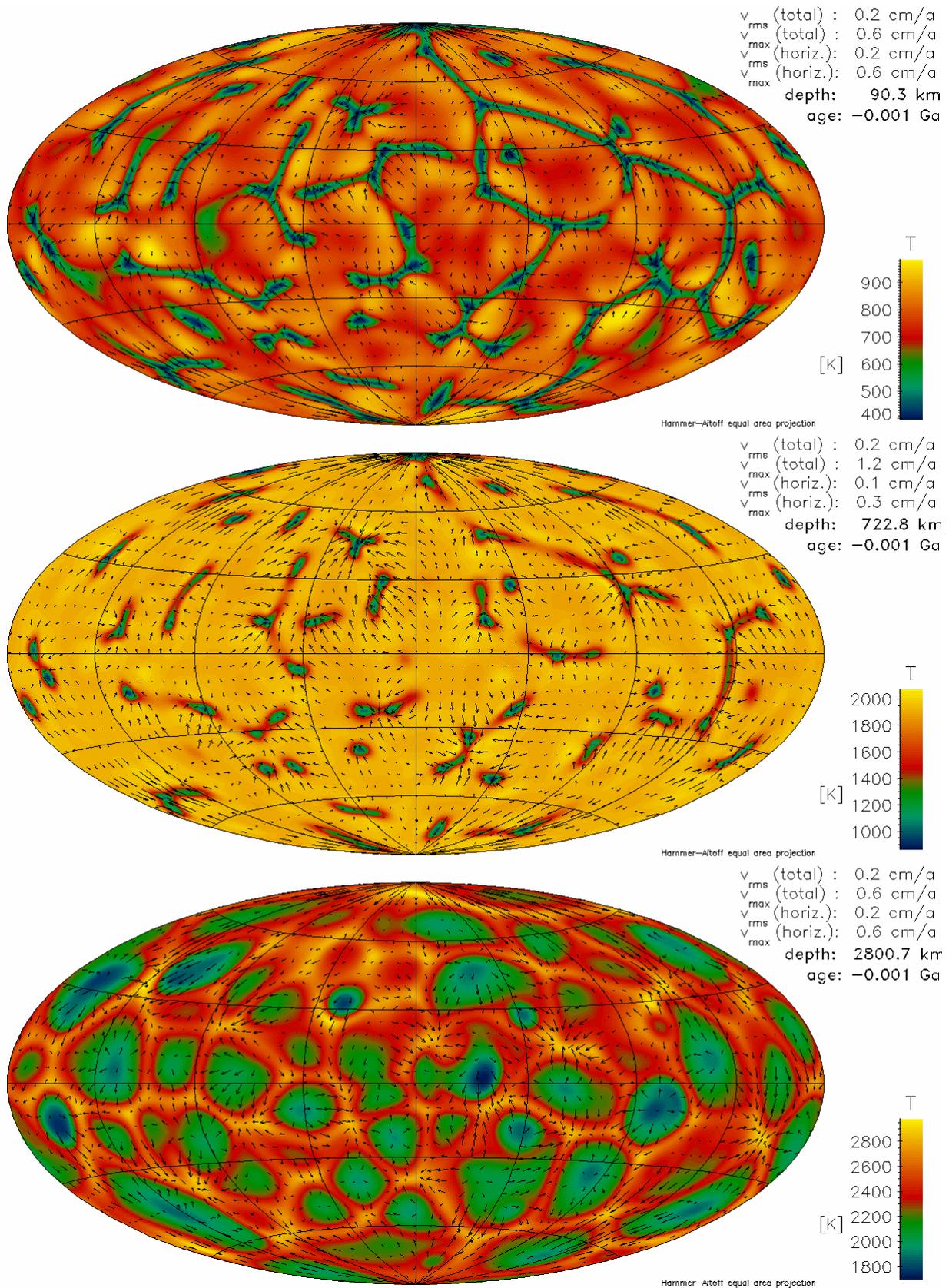


**Abb. 5.4-11:** Viskositätsprofil



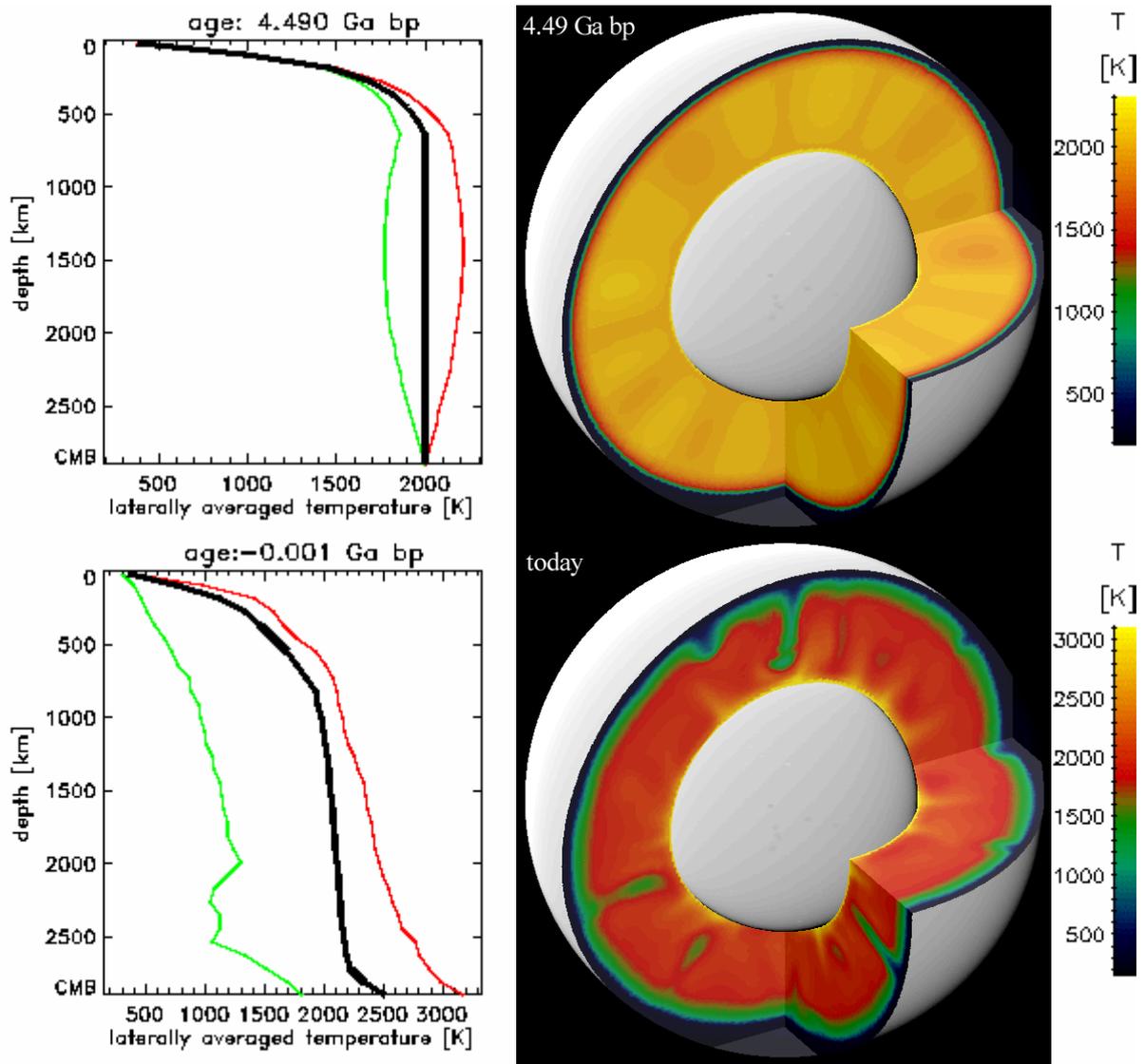
**Abb. 5.4-12:** Viskosität in der Tiefe mit großen lateralen Unterschieden

## 5.4. Modell 639

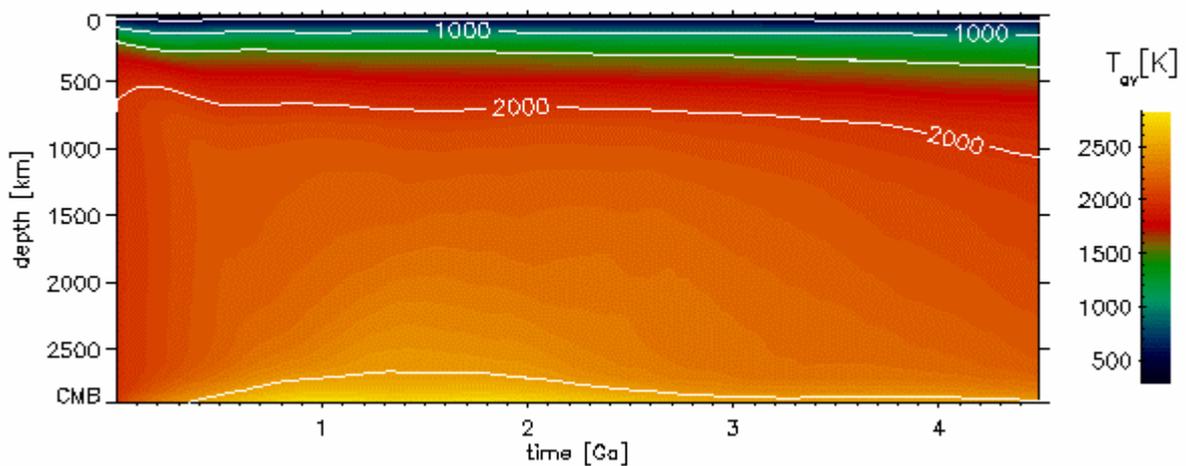


**Abb. 5.4-5:** Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen

## 5.4. Modell 639

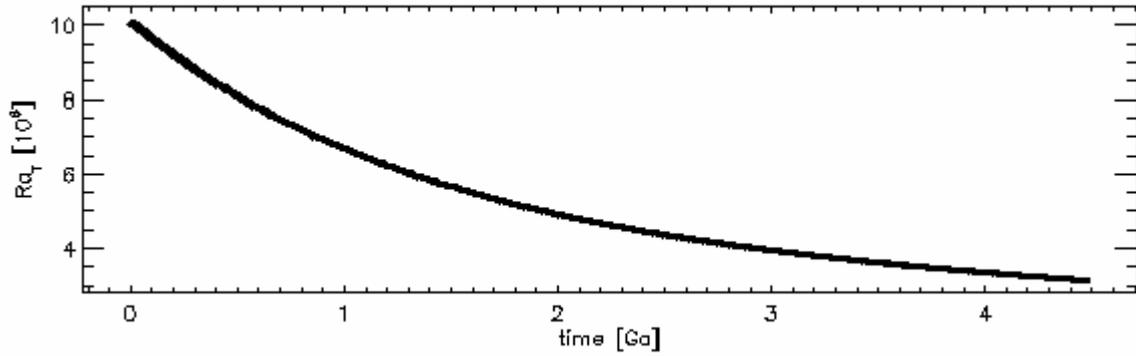


**Abb. 5.4-6:** Temperaturverteilung im Mantel am Anfang der Rechnung und heute

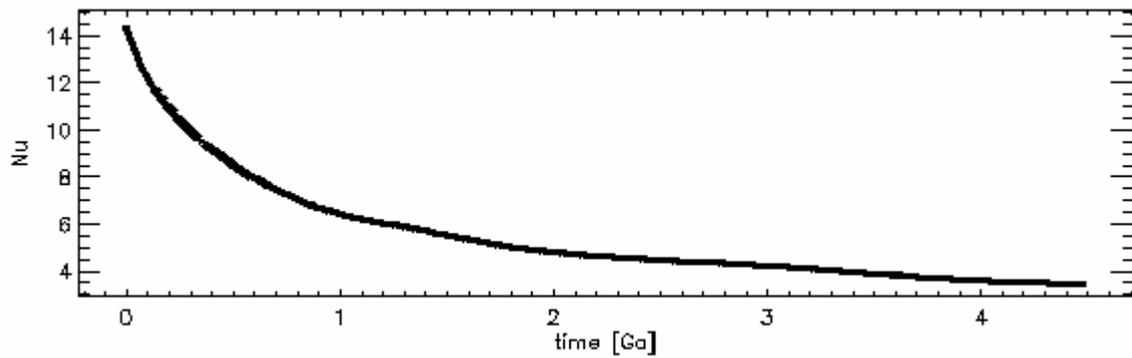


**Abb. 5.4-7:** Zeitliche Entwicklung des Temperaturprofiles

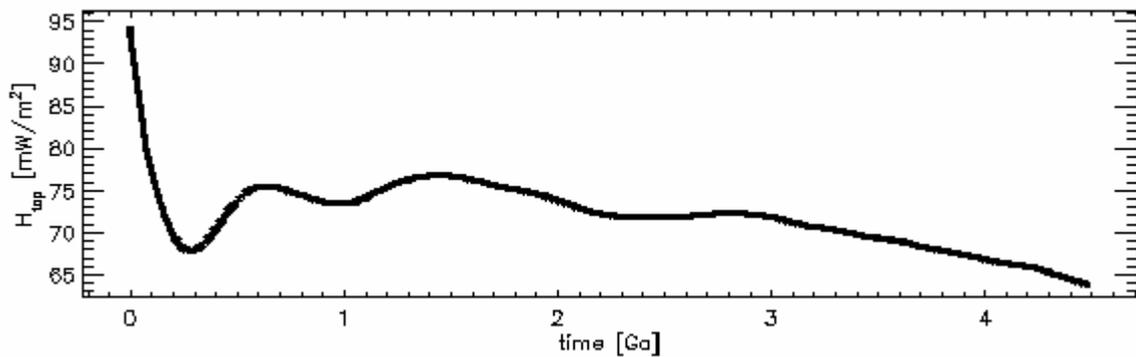
## 5.4. Modell 639



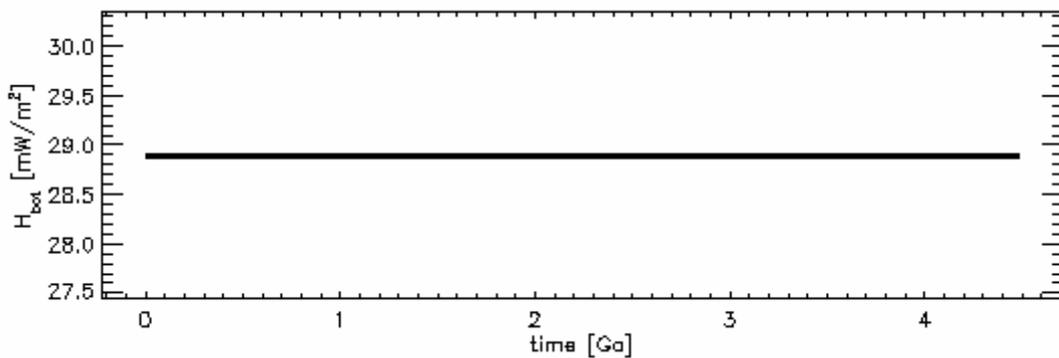
**Abb. 5.4-8:** Zeitliche Entwicklung der Rayleigh-Zahl



**Abb. 5.4-9:** Zeitliche Entwicklung der Nusselt-Zahl

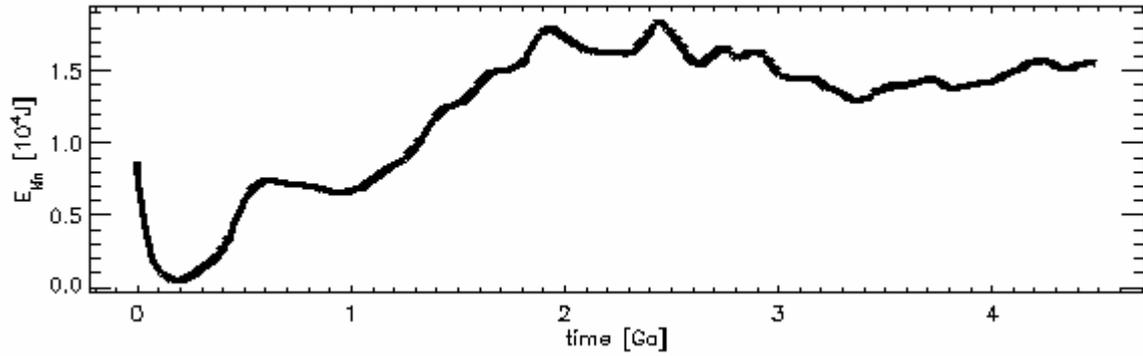


**Abb. 5.4-10:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Oberfläche

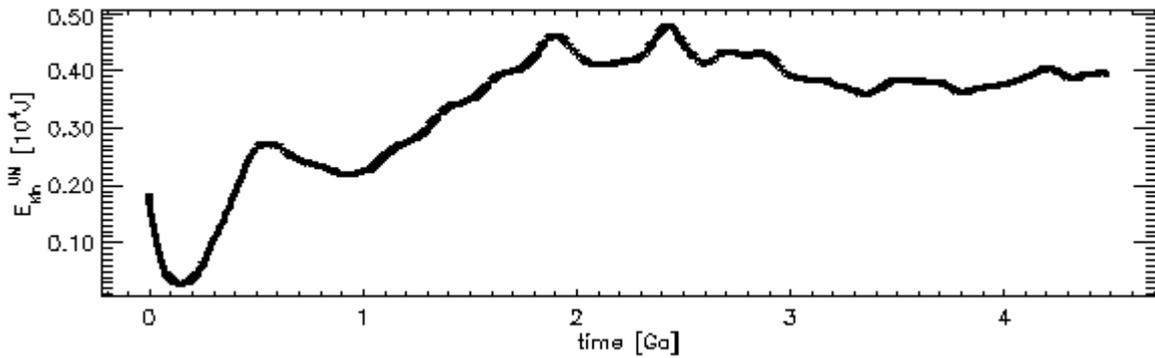


**Abb. 5.4-11:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Kern-Mantel-Grenze

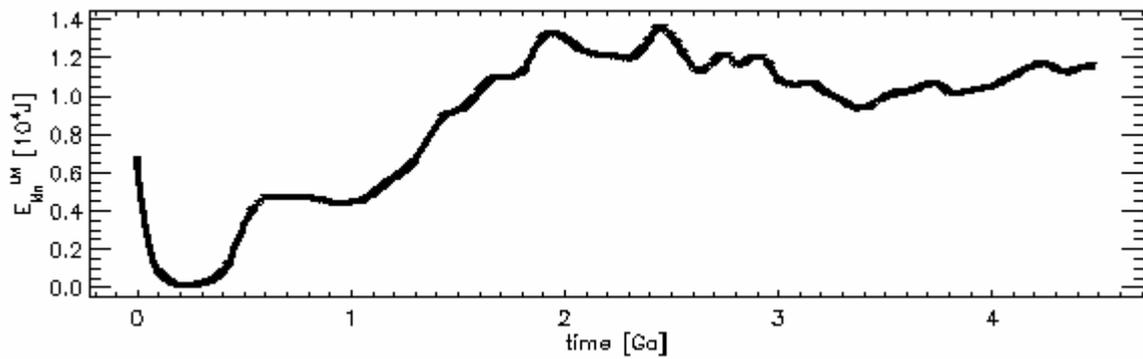
## 5.4. Modell 639



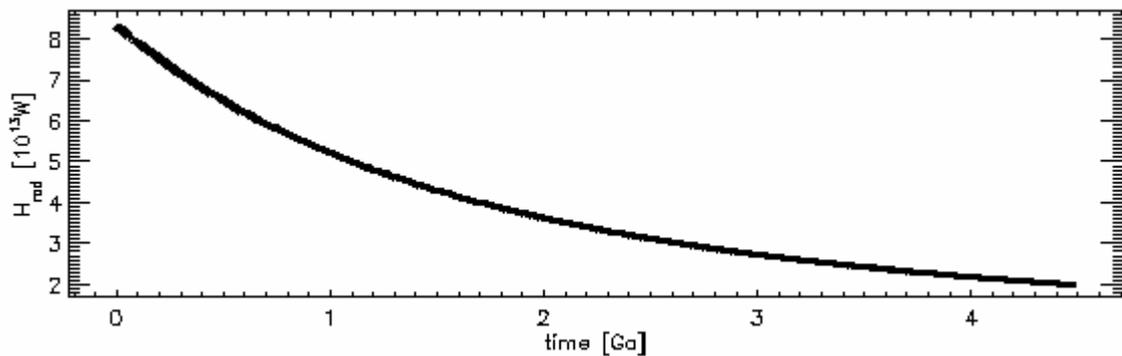
**Abb. 5.4-12:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des gesamten Mantels



**Abb. 5.4-13:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des oberen Mantels

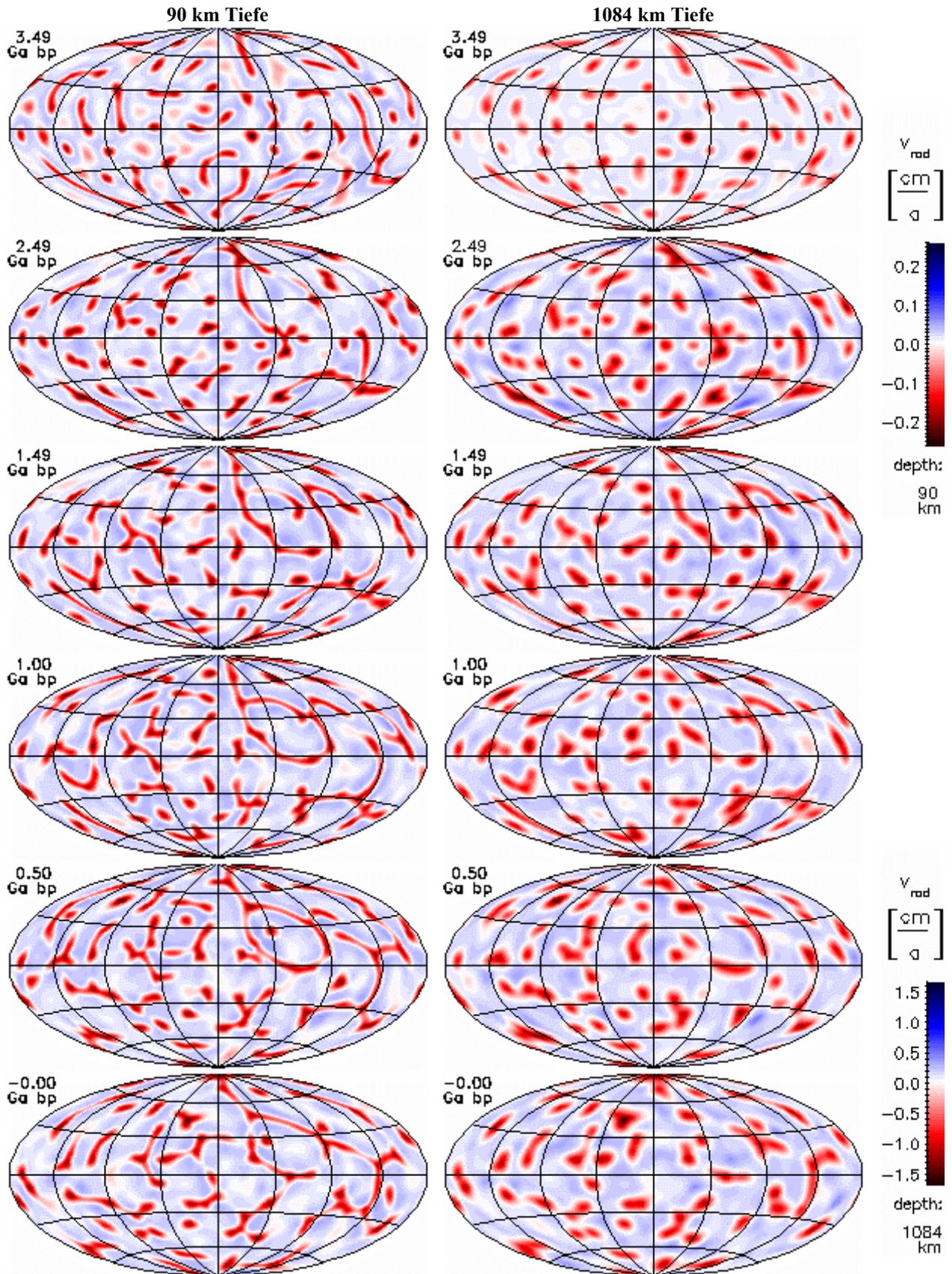


**Abb. 5.4-14:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des unteren Mantels



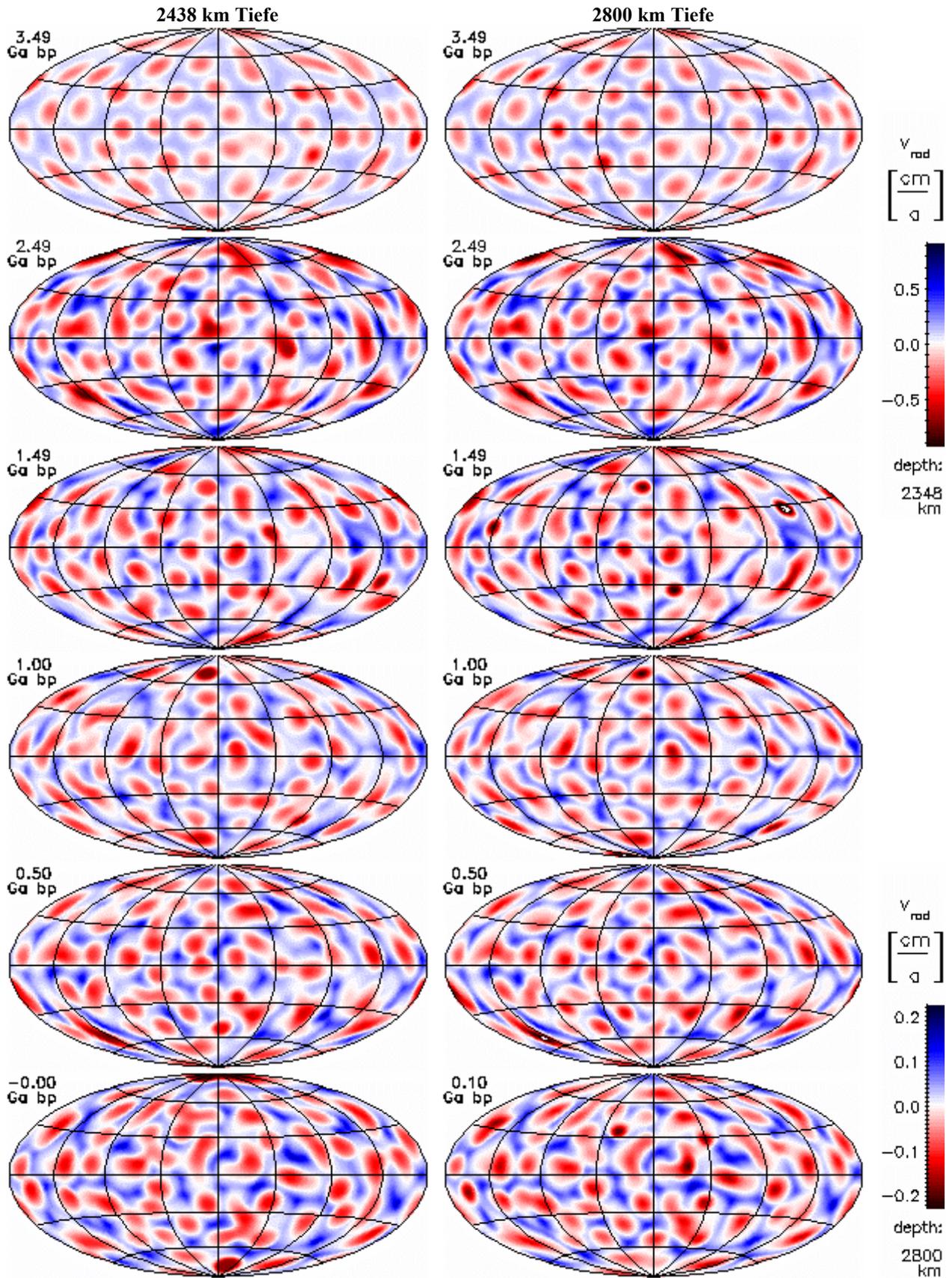
**Abb. 5.4-15:** Zeitliche Entwicklung der Heizleistung durch Zerfall von <sup>40</sup>K, <sup>42</sup>Th, <sup>235</sup>U und <sup>238</sup>U

## 5.4. Modell 639



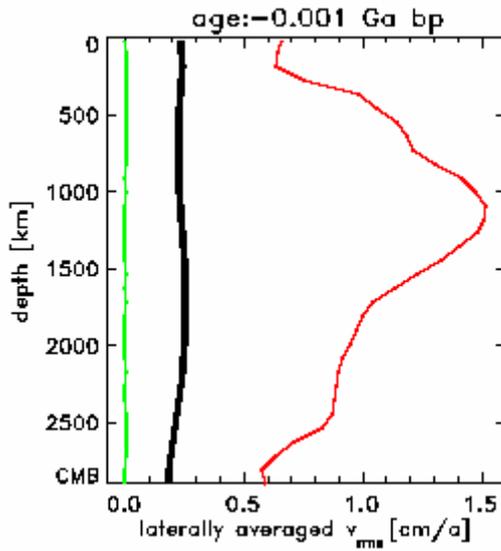
**Abb. 5.4-16:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente nahe der Oberfläche und im unteren Mantel. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind eventuell abgeschnitten.

## 5.4. Modell 639

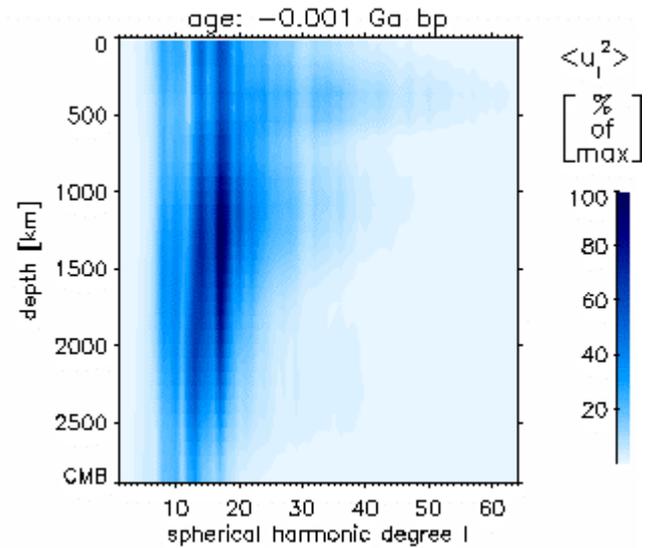


**Abb. 5.4-17:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente im unteren Mantel und nahe der CMB. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind evtl. abgeschnitten.

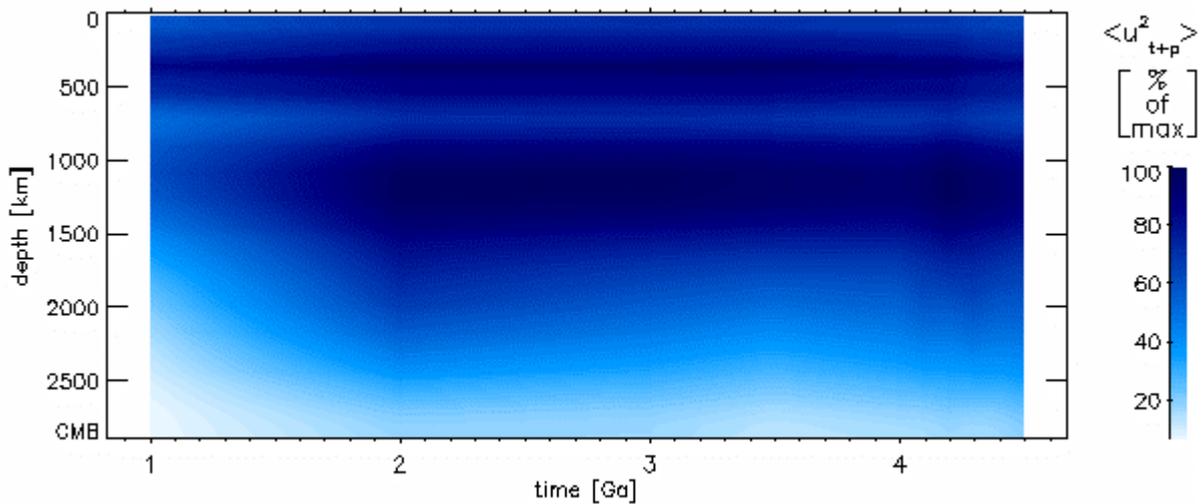
## 5.4. Modell 639



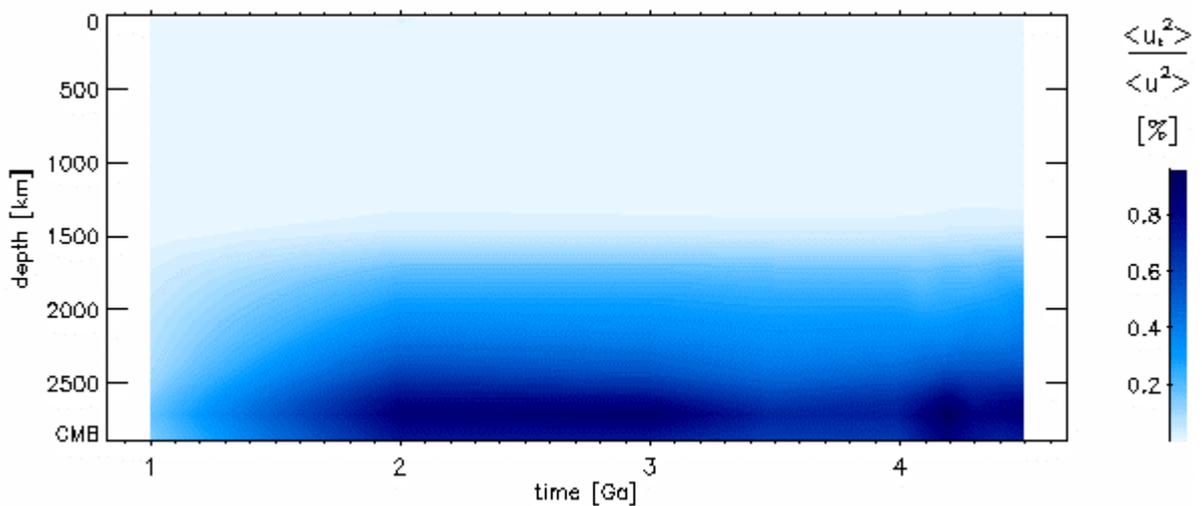
**Abb. 5.4-18:** Heutiges Geschwindigkeitsprofil



**Abb. 5.4-19:** Spektrum von toroidaler plus poloidaler kinetischer Energie

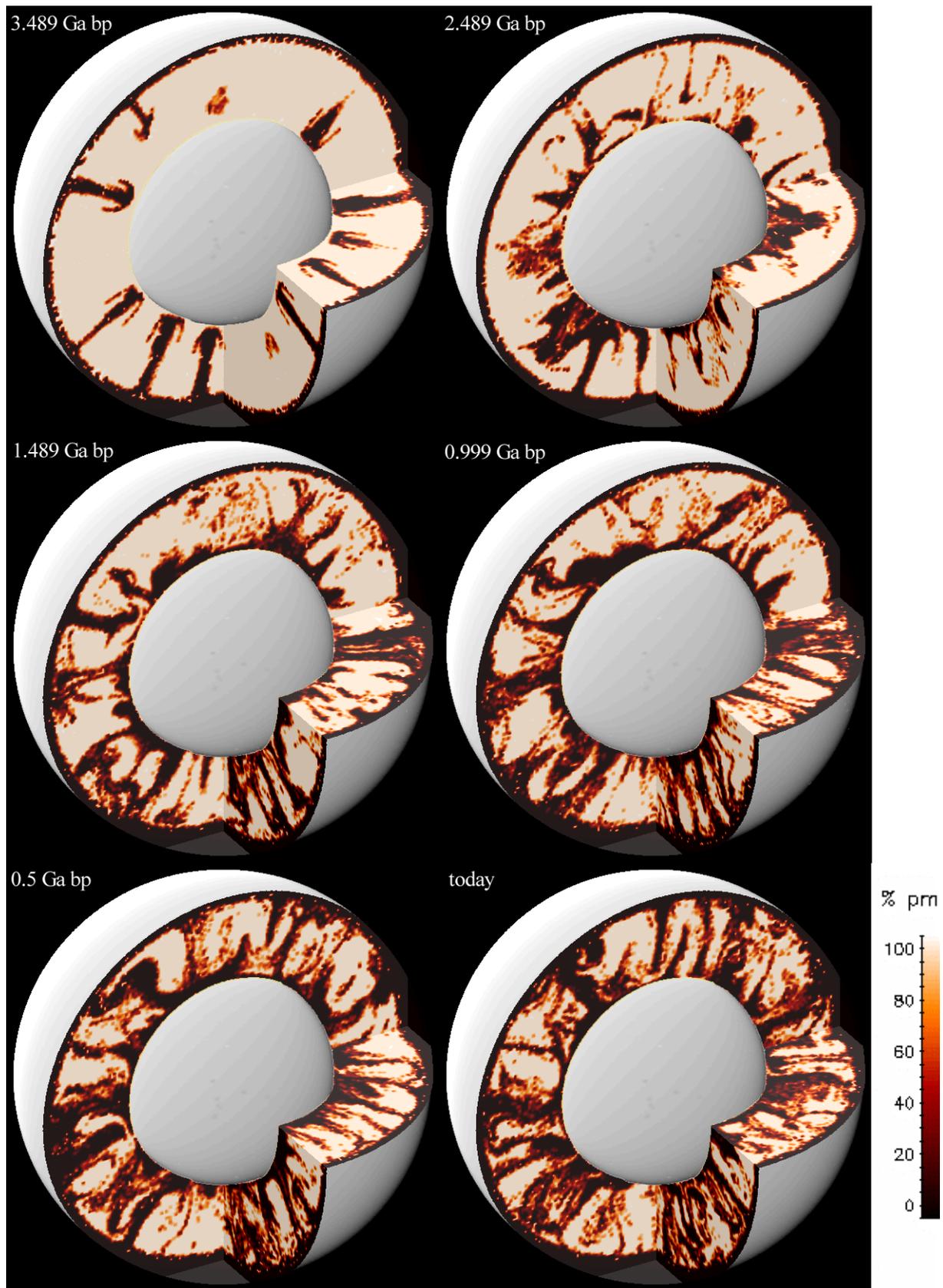


**Abb. 5.4-20:** Entwicklung der Tiefenverteilung der Summe von poloidaler und toroidaler Energie



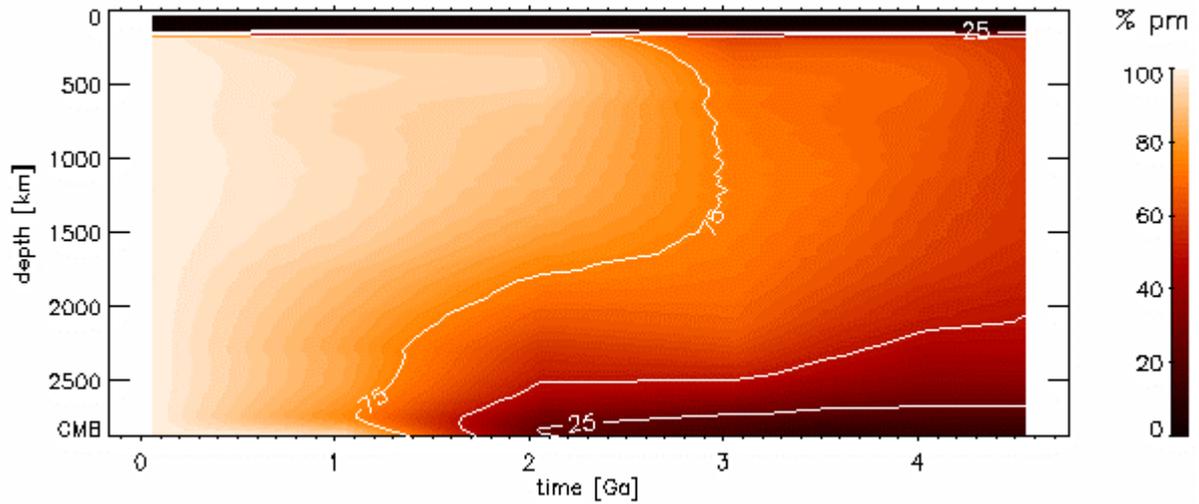
**Abb. 5.4-21:** Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung des toroidalen Anteils

## 5.4. Modell 639

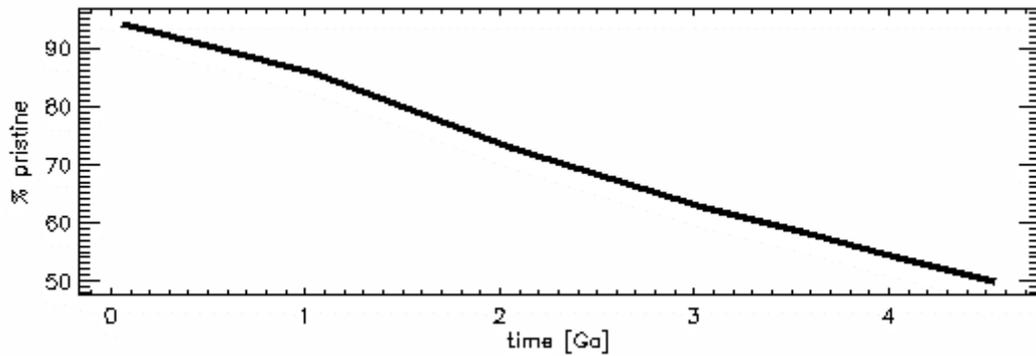


**Abb. 5.4-22:** Verteilung ursprünglichen Materials (pm) zu verschiedenen Zeiten

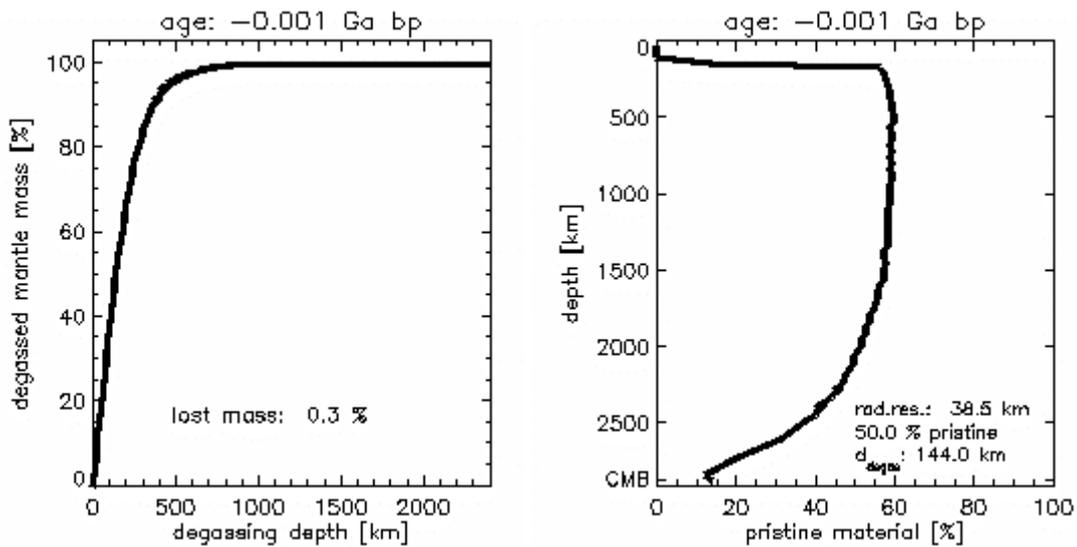
## 5.4. Modell 639



**Abb. 5.4-23:** Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung ursprünglichen Materials



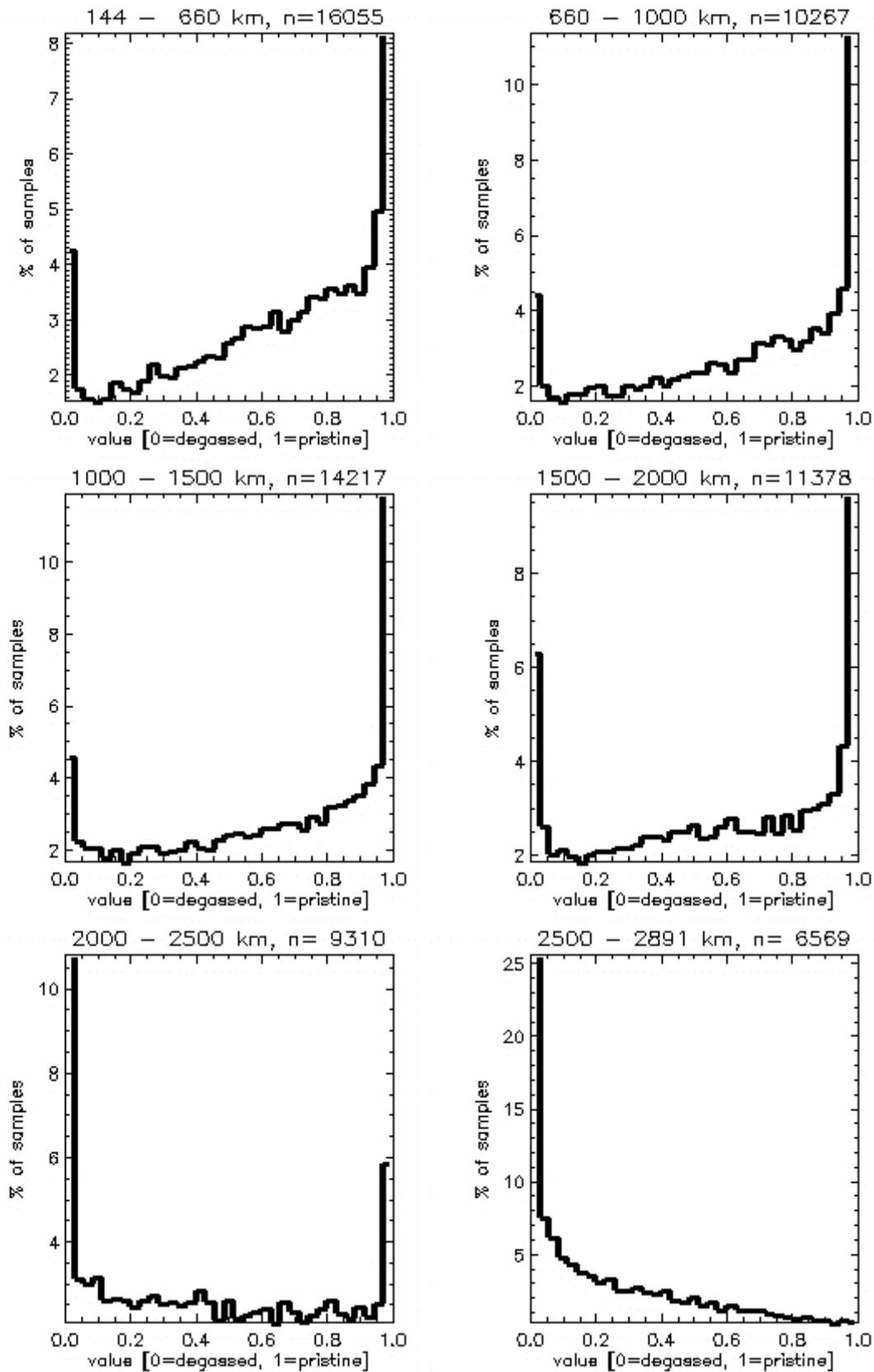
**Abb. 5.4-24:** Abnahme ursprünglichen Materials im Mantel



**Abb. 5.4-25:** Die Entgasungstiefe wird so festgelegt, dass am Ende der Rechnung 50 % des Mantels entgast sind

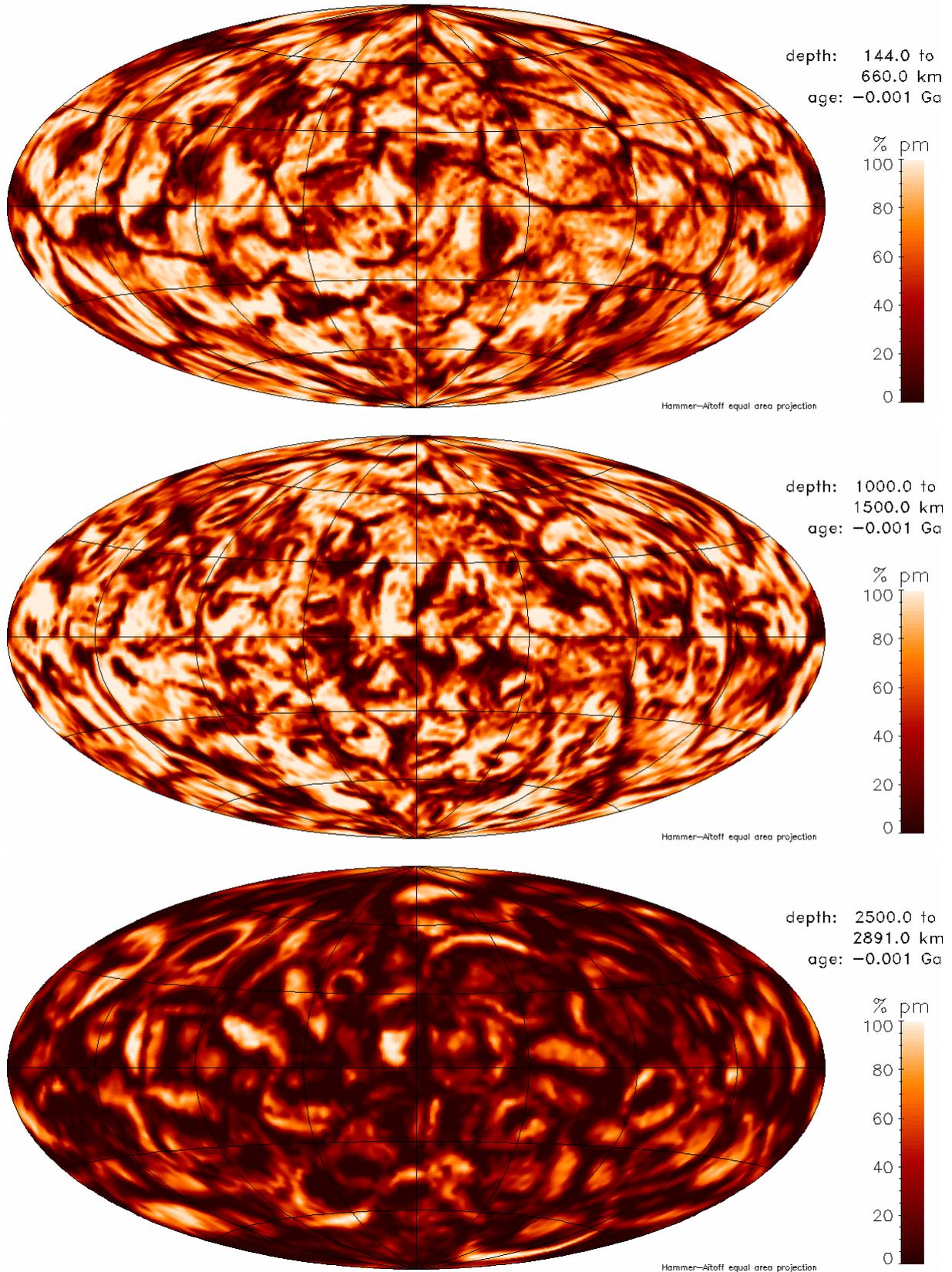
**Abb. 5.4-26:** Tiefenverteilung ursprünglichen Materials im heutigen Mantel

## 5.4. Modell 639



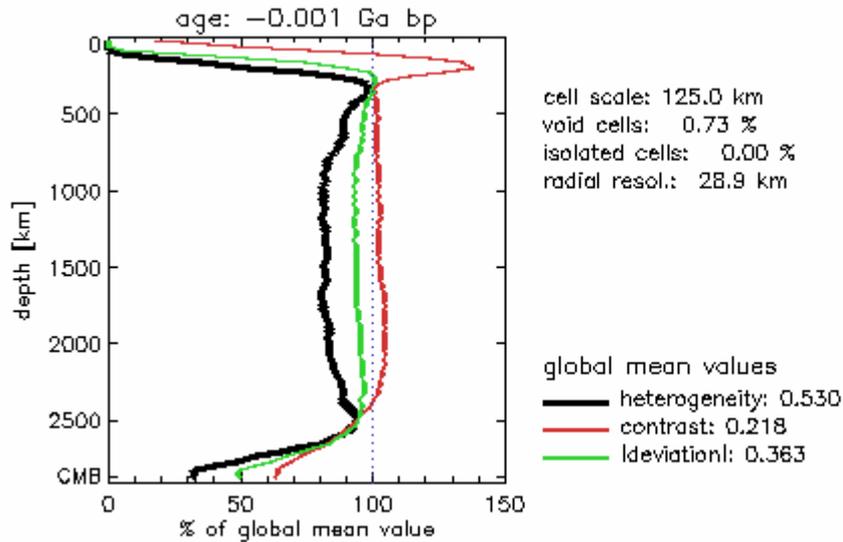
**Abb. 5.4-27:** Histogramme der Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Manteltiefen. Eine Probe repräsentiert den Mittelwert des gesamten radialen Intervalls. n ist die Anzahl der Unterteilungen der Kugelfläche in der jeweiligen Tiefe.

## 5.4. Modell 639

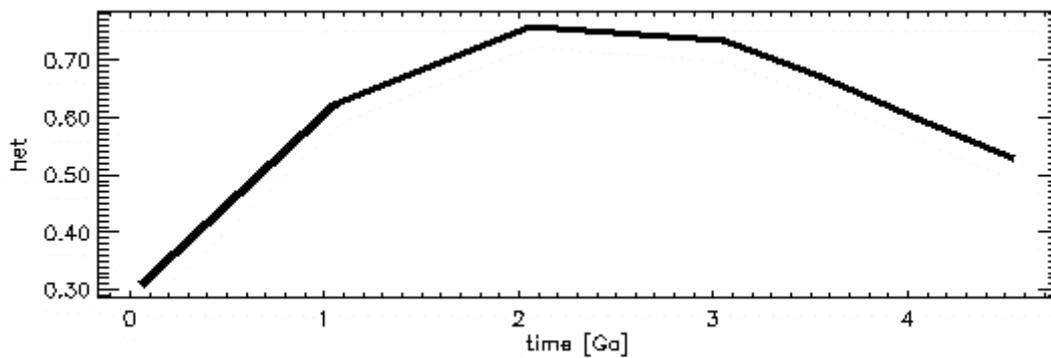


**Abb. 5.4-28:** Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Tiefenintervallen. Die laterale Auflösung entspricht der des jeweils passenden Histogramms in Abb. 5.4-27.

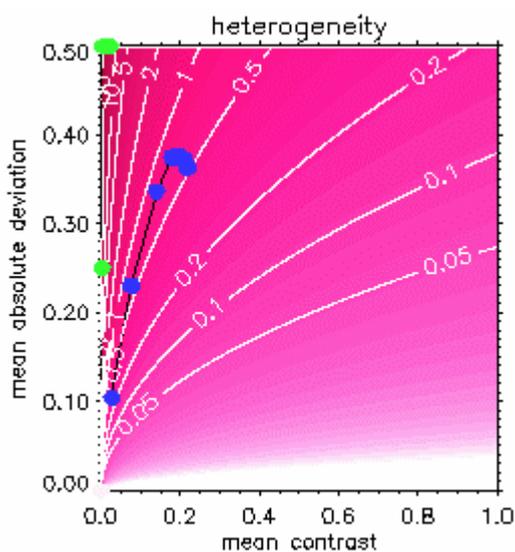
## 5.4. Modell 639



**Abb. 5.4-29:** Heutige Tiefenprofile der lateral gemittelten Werte von Heterogenität, Kontrast und mittlerer Absolutabweichung. Sie werden mit dem Mittelwert in der jeweiligen Kugelschale berechnet. Der globale Wert dient nur Skalierung der Abszisse.



**Abb. 5.4-30:** Zeitliche Entwicklung der Heterogenität

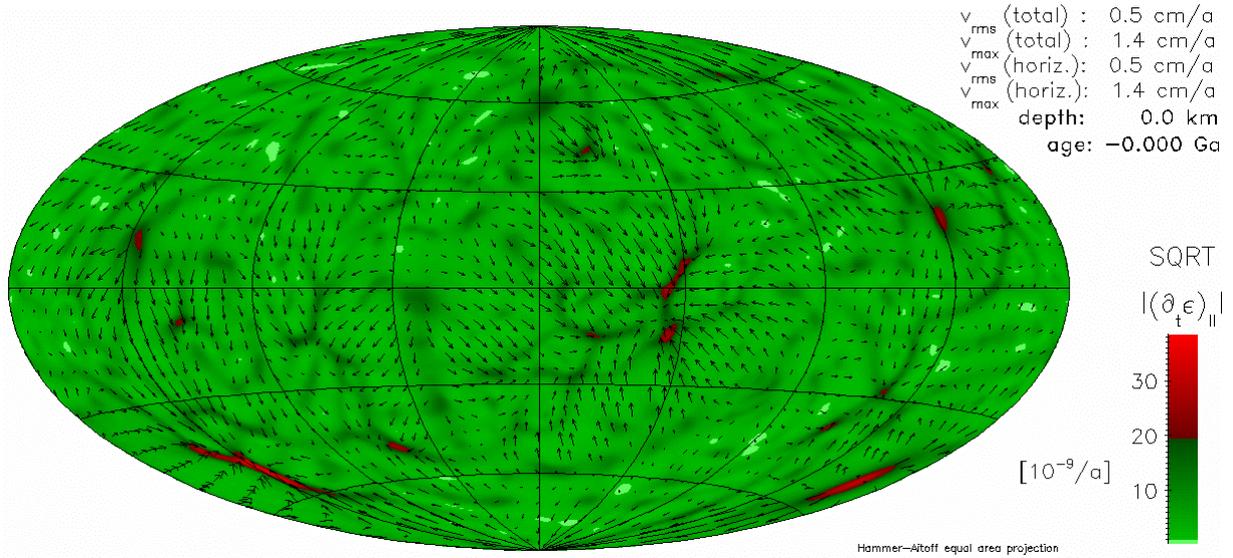


**Abb. 5.4-31:** Entwicklung der globalen Mittelwerte von Heterogenität, mittlerer Absolutabweichung und Kontrast.

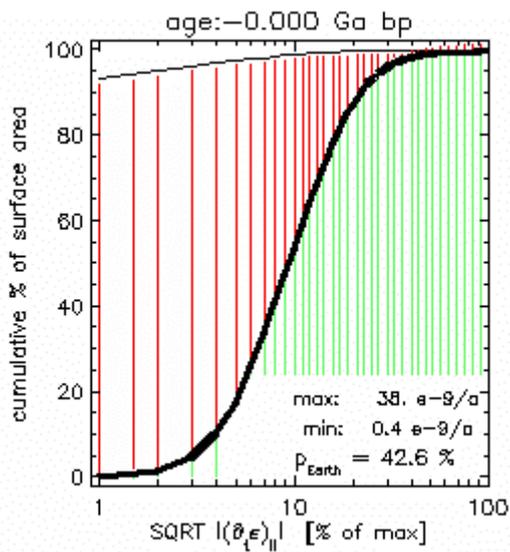
Jeder blaue Punkt entspricht einem ausgewerteten Zeitschritt. Die schwarze Verbindungslinie folgt der zeitlichen Entwicklung. Der älteste Zeitschritt liegt näher am Koordinatenursprung als die jüngeren. Die grünen Punkte markieren die Lage der in Kapitel 4.2.3 vorgestellten Referenzmodelle. Die rötliche Farbkodierung mit Höhenlinien stellt den Wert der Heterogenität dar.

## 5.5. Modell 640

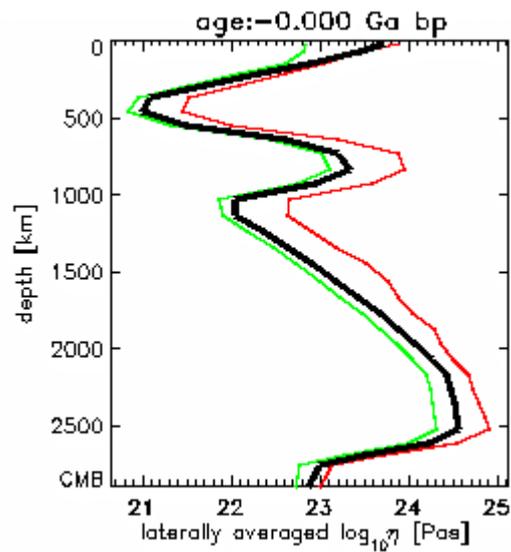
### 5.5. Modell 640



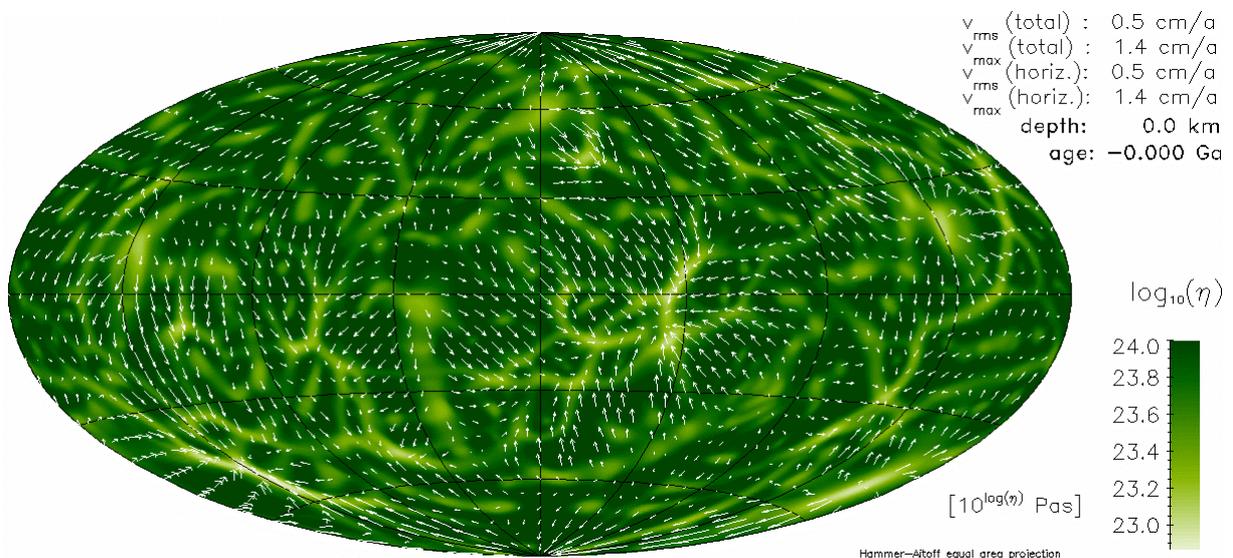
**Abb. 5.5-13:** Wurzel des Betrages der zweiten Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors



**Abb. 5.5-14:** Plattigkeit an der Oberfläche

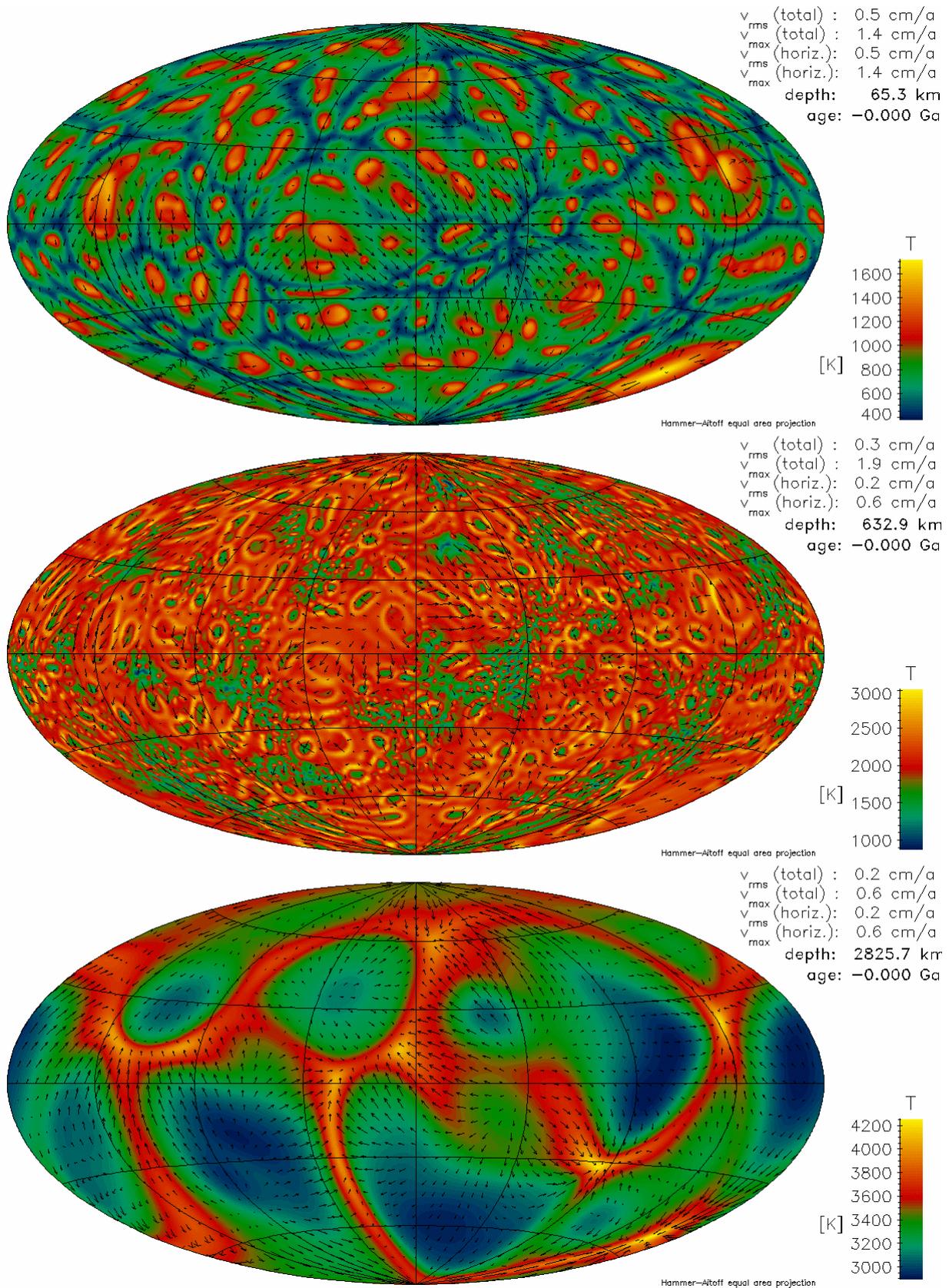


**Abb. 5.5-15:** Viskositätsprofil



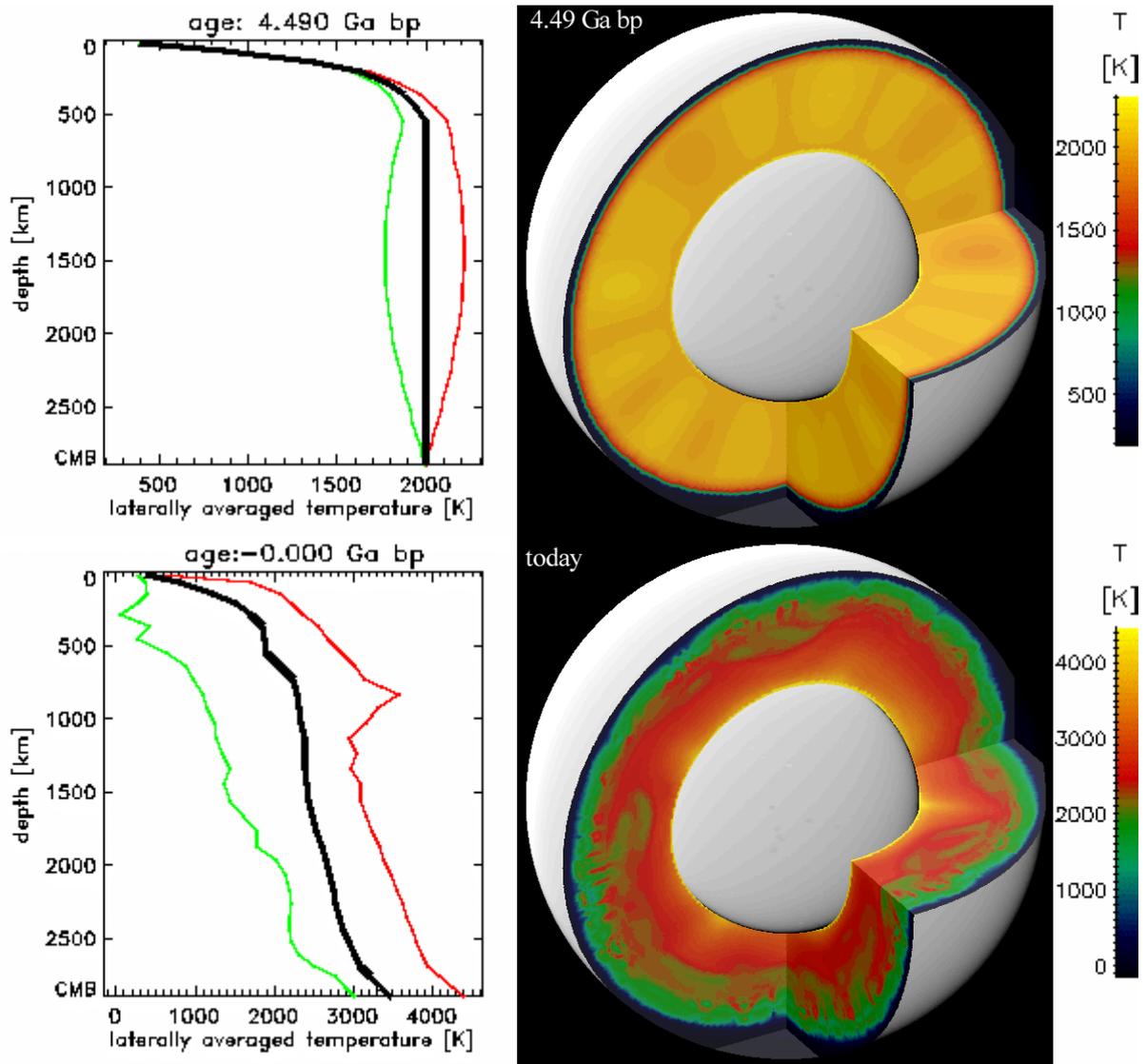
**Abb. 5.5-16:** Viskosität an der Oberfläche

## 5.5. Modell 640

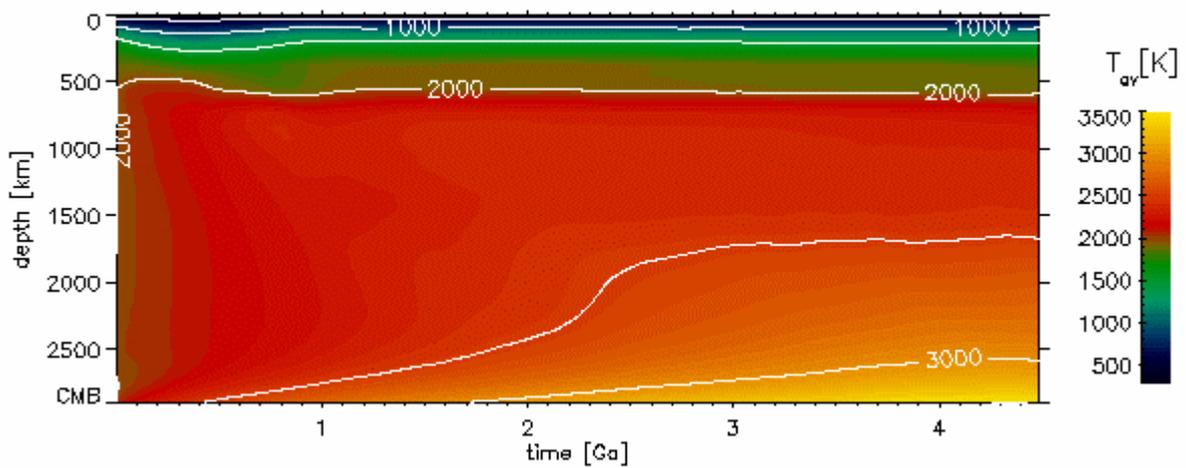


**Abb. 5.5-5:** Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten nahe der Oberfläche, im oberen Mantel und nahe der Kern-Mantel-Grenze

## 5.5. Modell 640

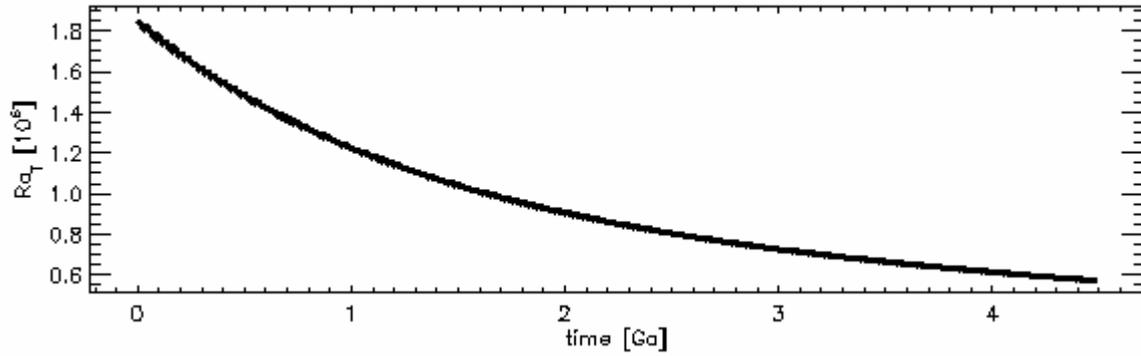


**Abb. 5.5-6:** Temperaturverteilung im Mantel am Anfang der Rechnung und heute

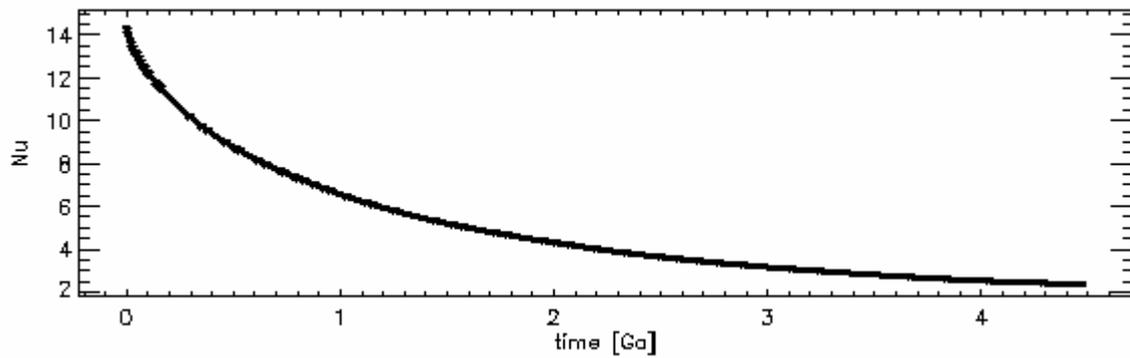


**Abb. 5.5-7:** Zeitliche Entwicklung des Temperaturprofils

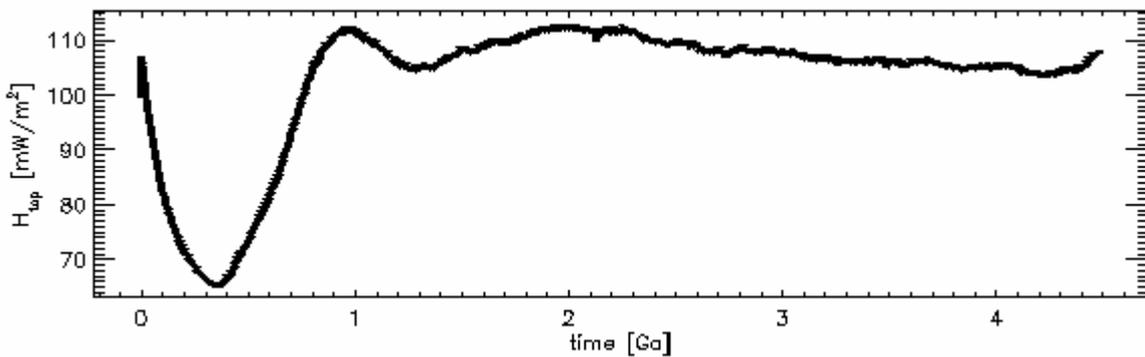
## 5.5. Modell 640



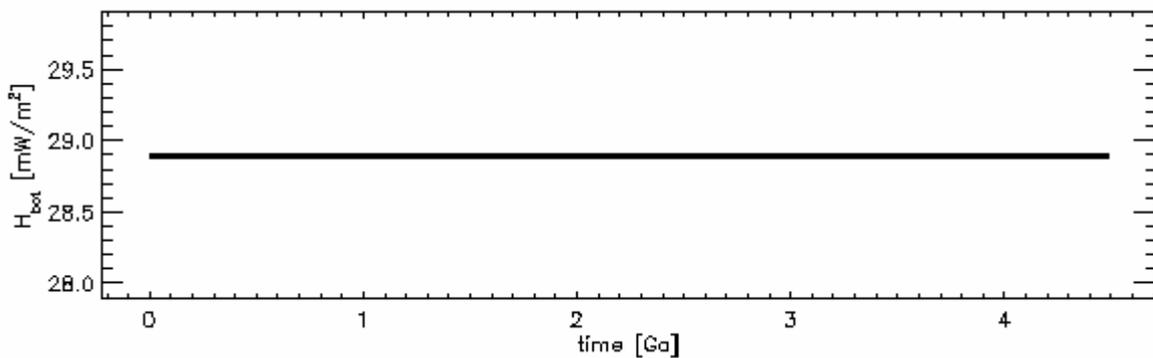
**Abb. 5.5-8:** Zeitliche Entwicklung der Rayleigh-Zahl



**Abb. 5.5-9:** Zeitliche Entwicklung der Nusselt-Zahl

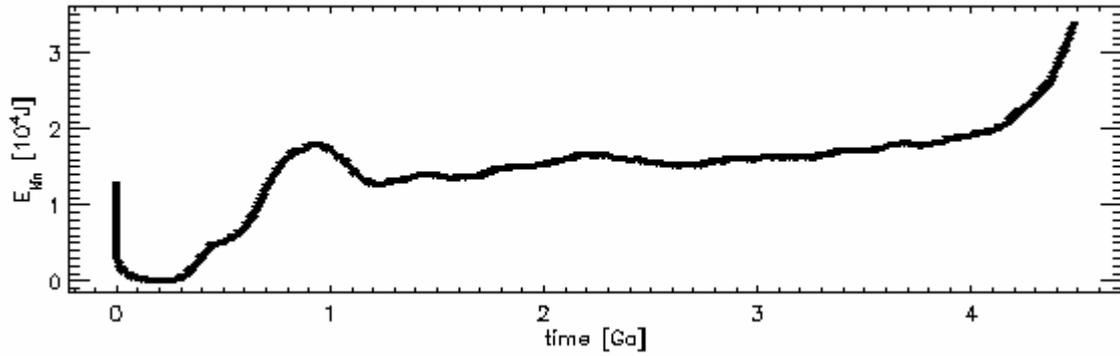


**Abb. 5.5-10:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Oberfläche

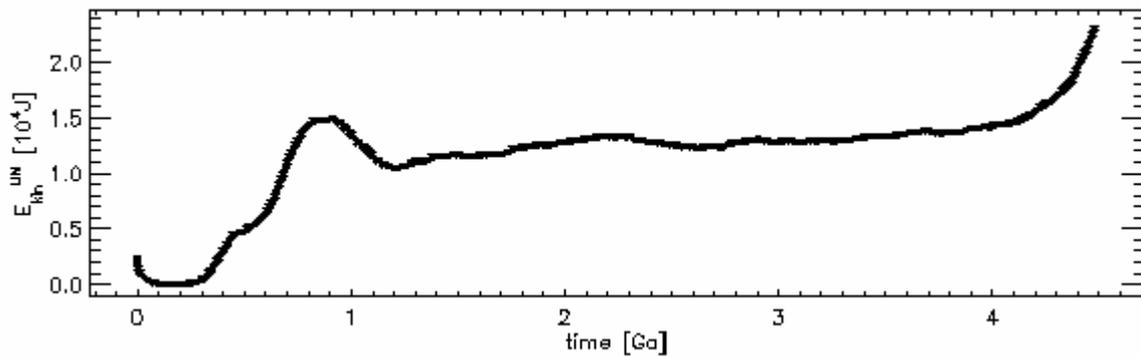


**Abb. 5.5-11:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Kern-Mantel-Grenze

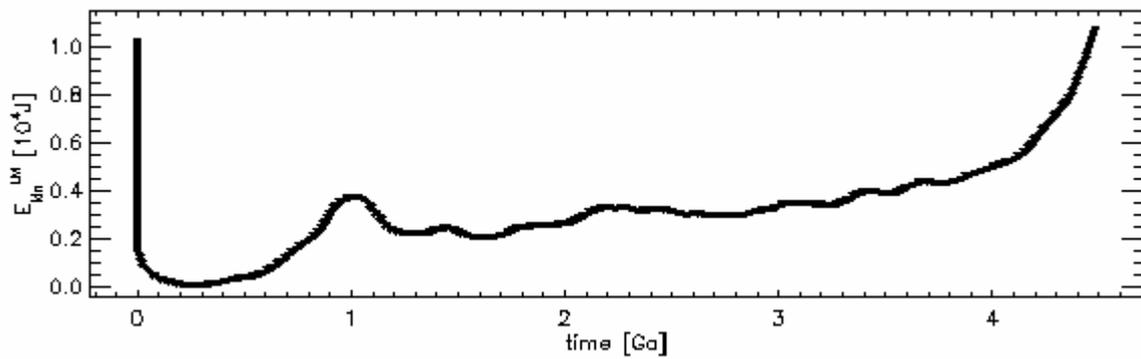
## 5.5. Modell 640



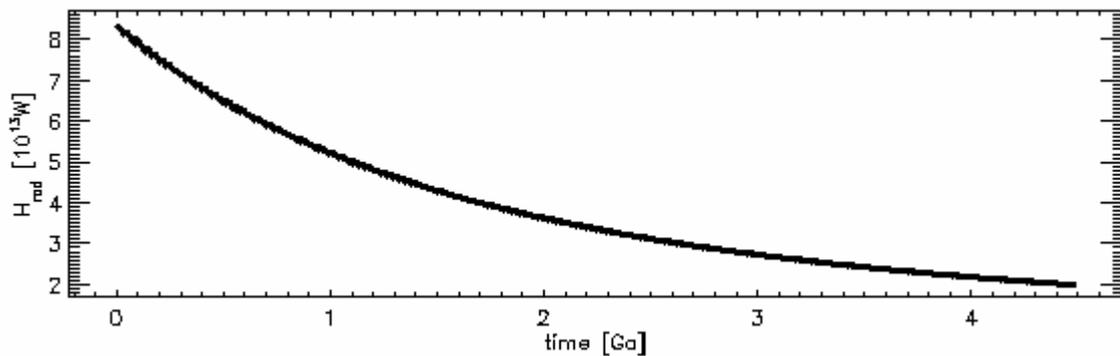
**Abb. 5.5-12:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des gesamten Mantels



**Abb. 5.5-13:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des oberen Mantels

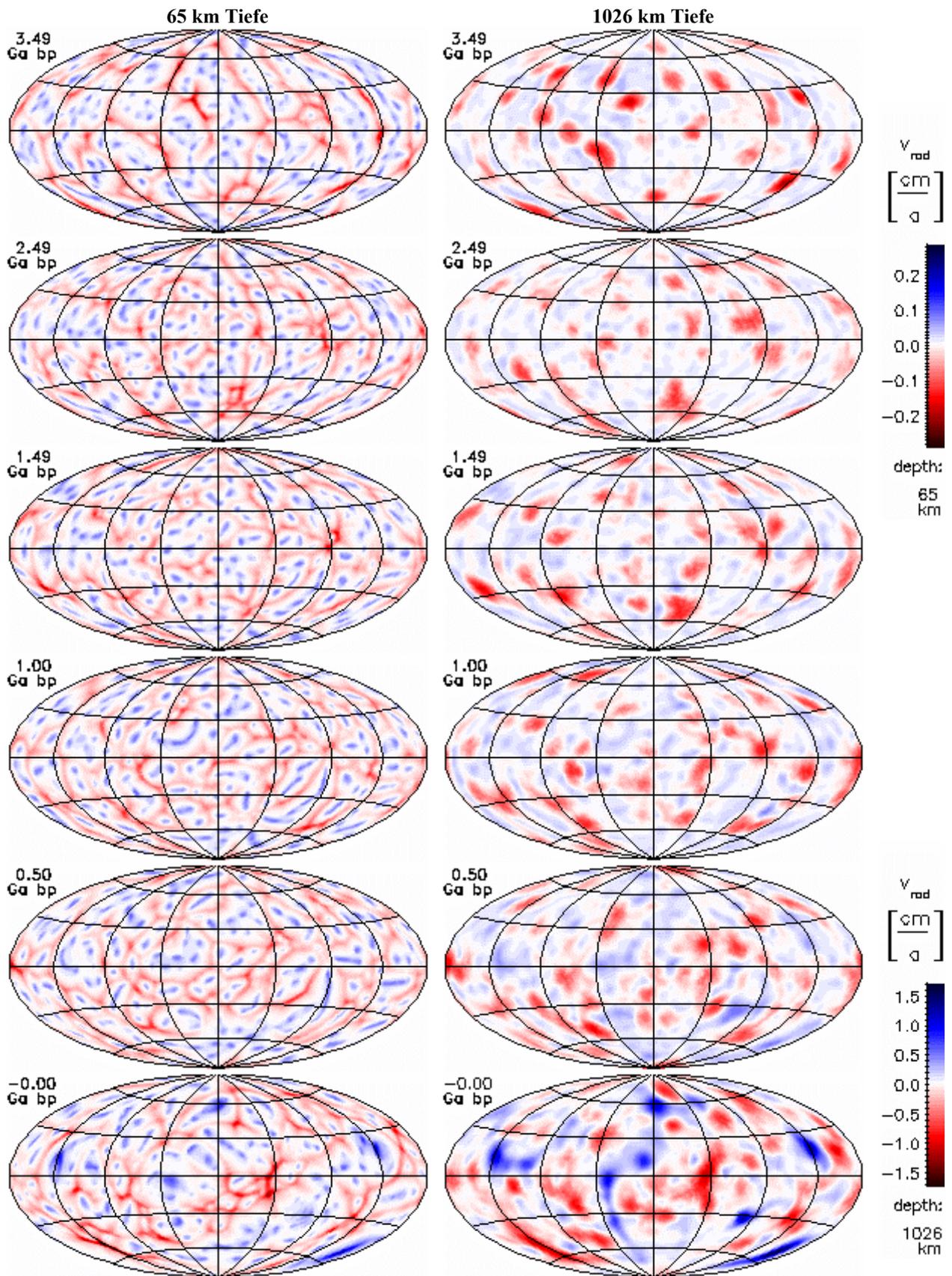


**Abb. 5.5-14:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des unteren Mantels



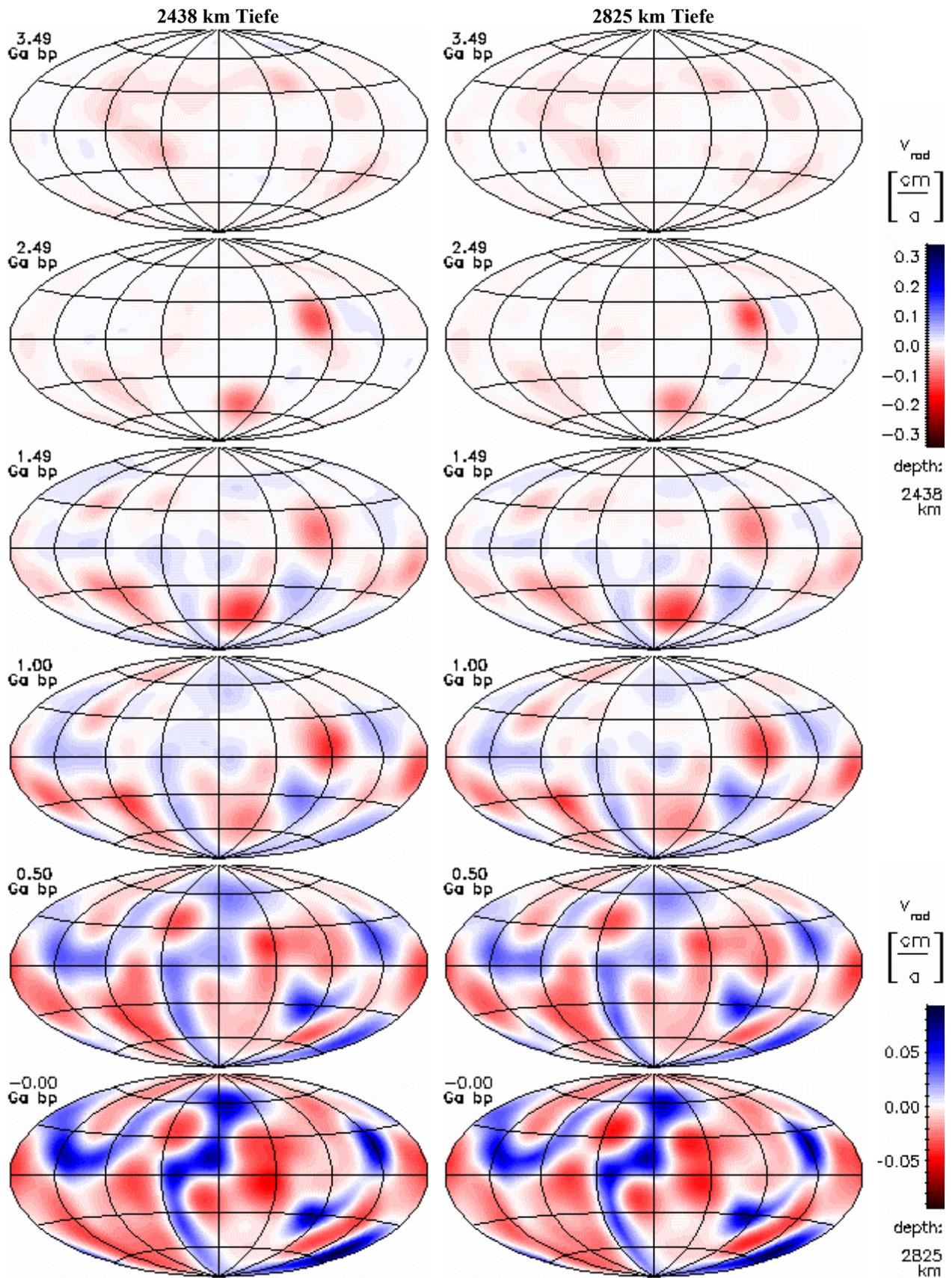
**Abb. 5.5-15:** Zeitliche Entwicklung der Heizleistung durch Zerfall von  $^{40}\text{K}$ ,  $^{42}\text{Th}$ ,  $^{235}\text{U}$  und  $^{238}\text{U}$

## 5.5. Modell 640



**Abb. 5.5-16:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente nahe der Oberfläche und im unteren Mantel. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind eventuell abgeschnitten.

## 5.5. Modell 640



**Abb. 5.5-17:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente im unteren Mantel und nahe der CMB. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind evtl. abgeschnitten.

## 5.5. Modell 640

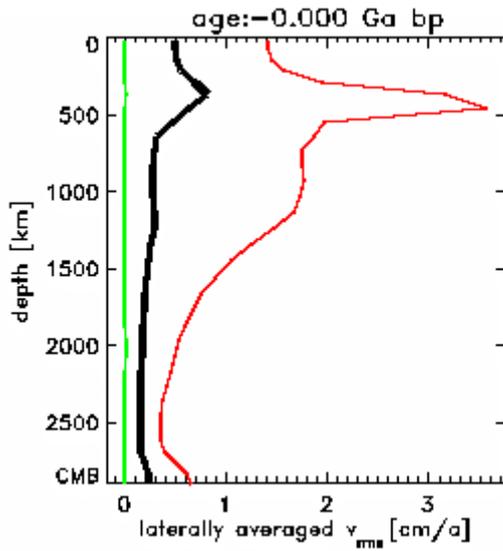


Abb. 5.5-18: Heutiges Geschwindigkeitsprofil

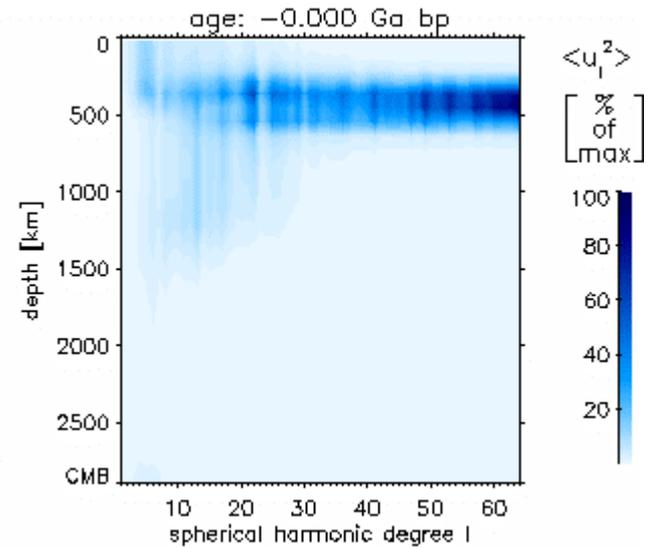


Abb. 5.5-19: Spektrum von toroidaler plus poloidaler kinetischer Energie

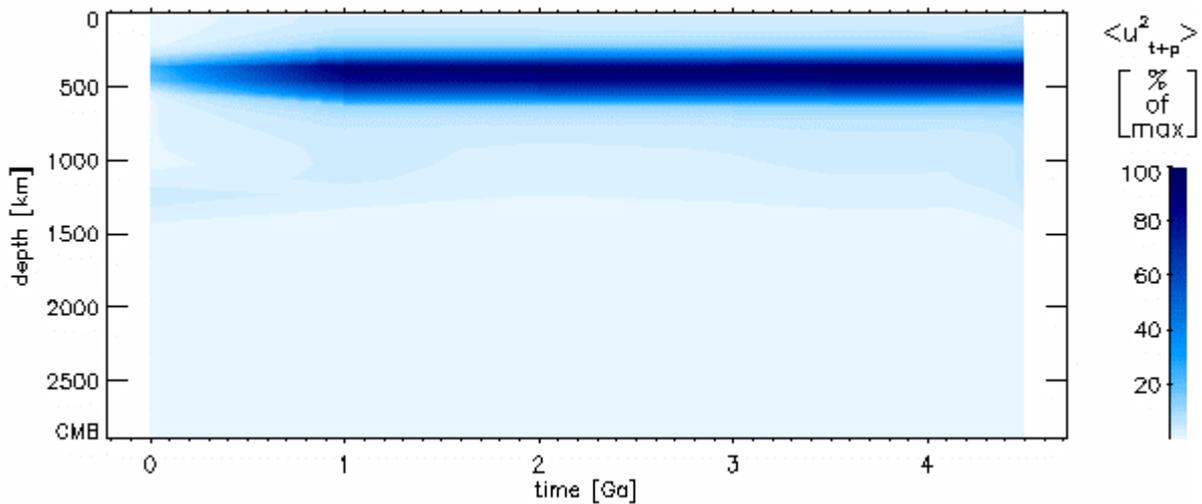


Abb. 5.5-20: Entwicklung der Tiefenverteilung der Summe von poloidaler und toroidaler Energie

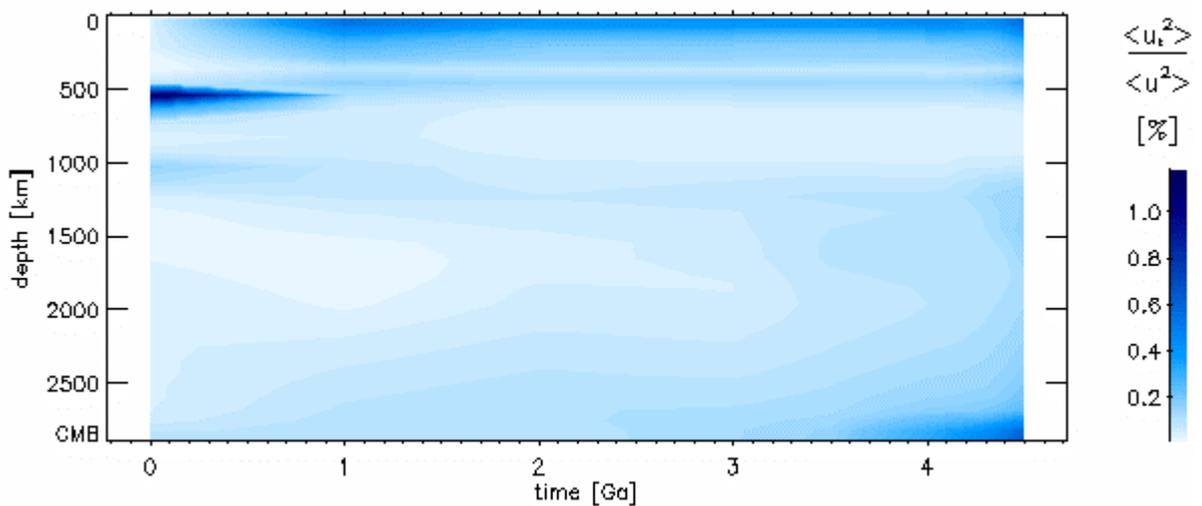
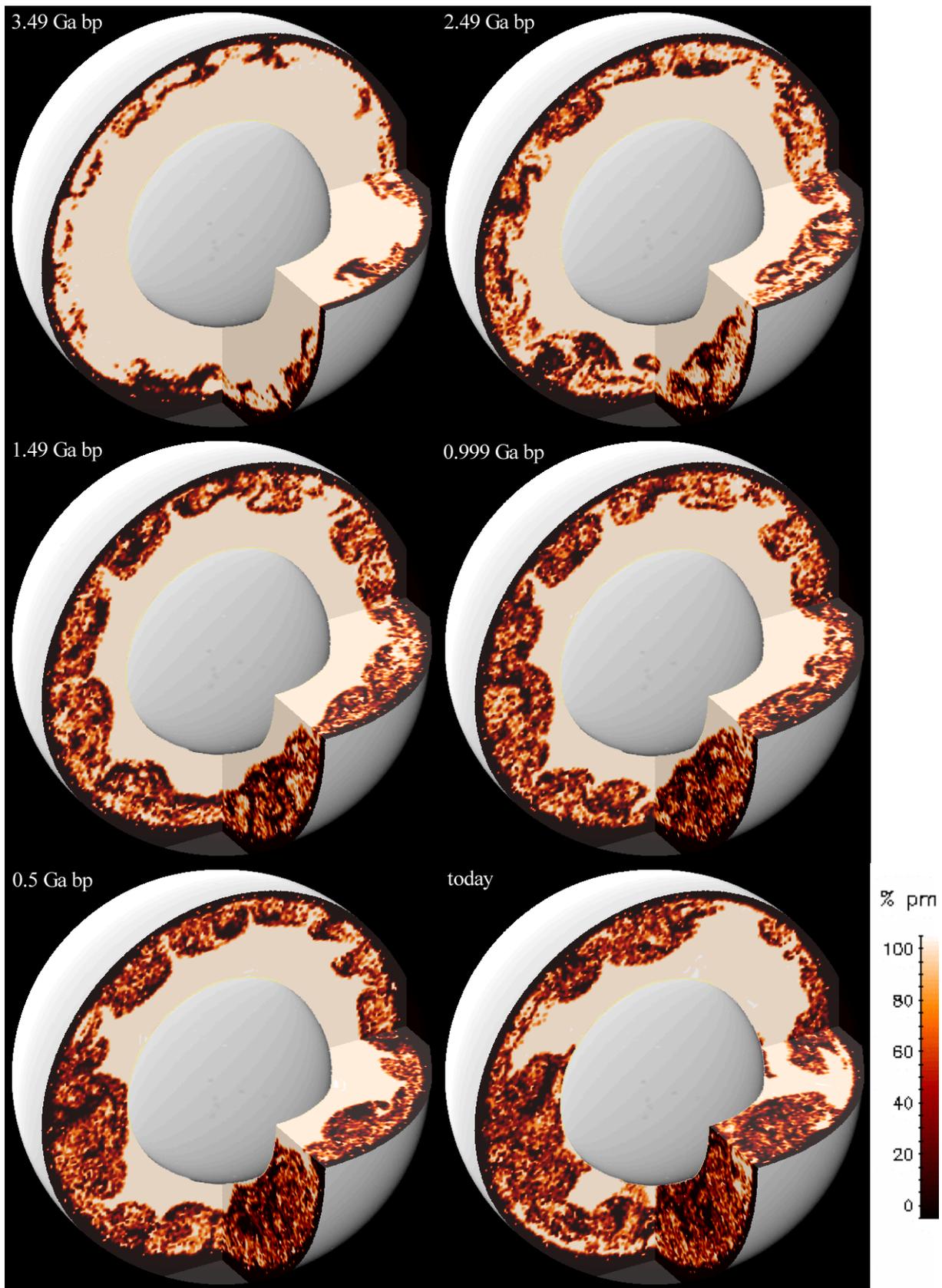


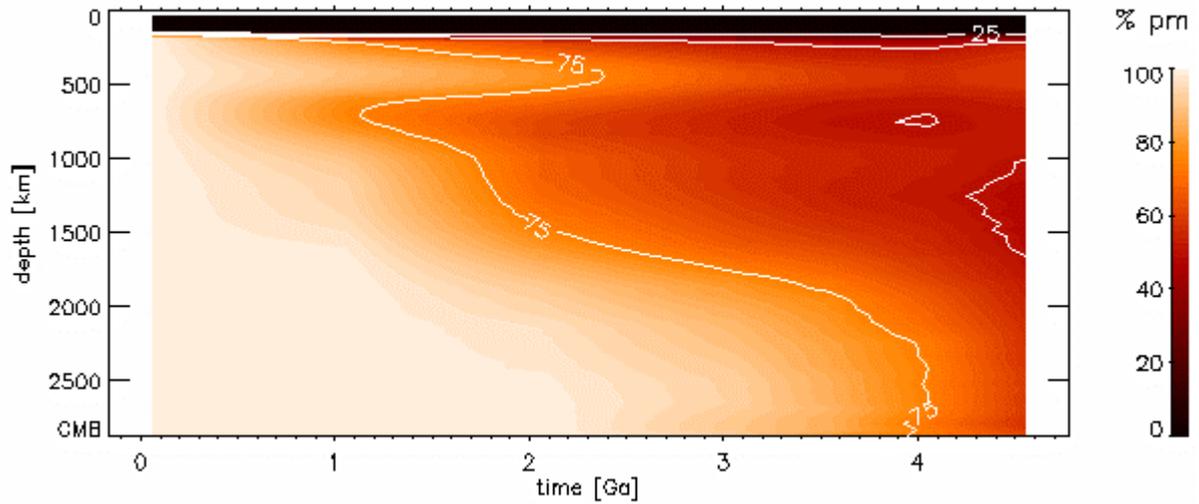
Abb. 5.5-21: Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung des toroidalen Anteils

## 5.5. Modell 640

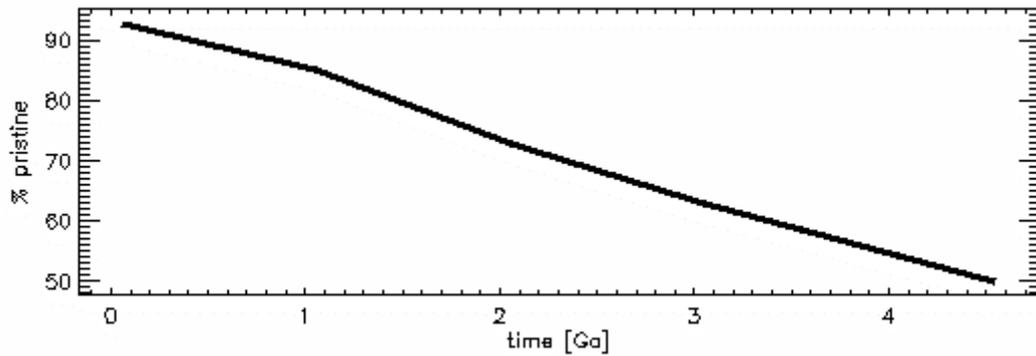


**Abb. 5.5-22:** Verteilung ursprünglichen Materials (pm) zu verschiedenen Zeiten

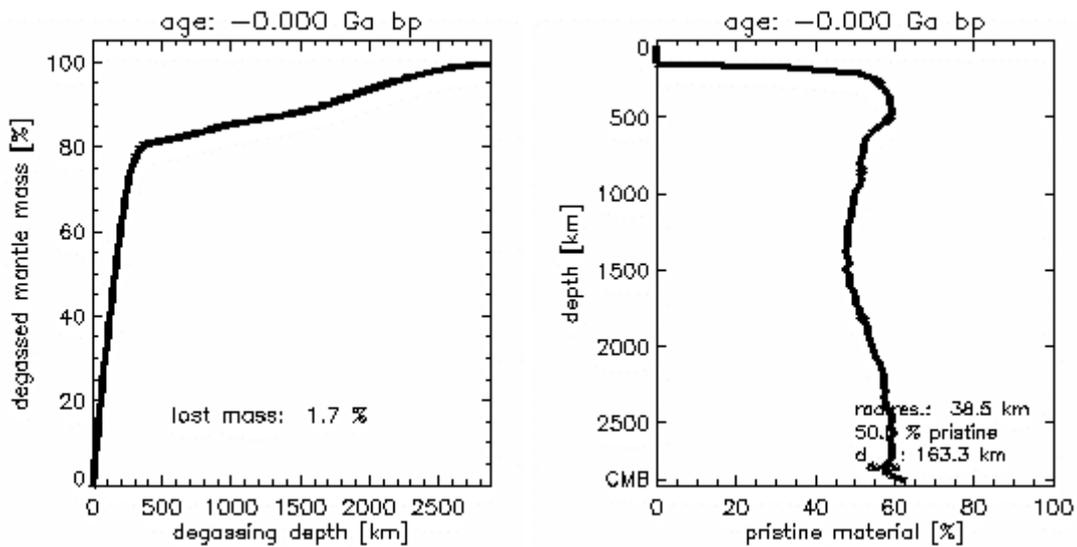
## 5.5. Modell 640



**Abb. 5.5-23:** Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung ursprünglichen Materials



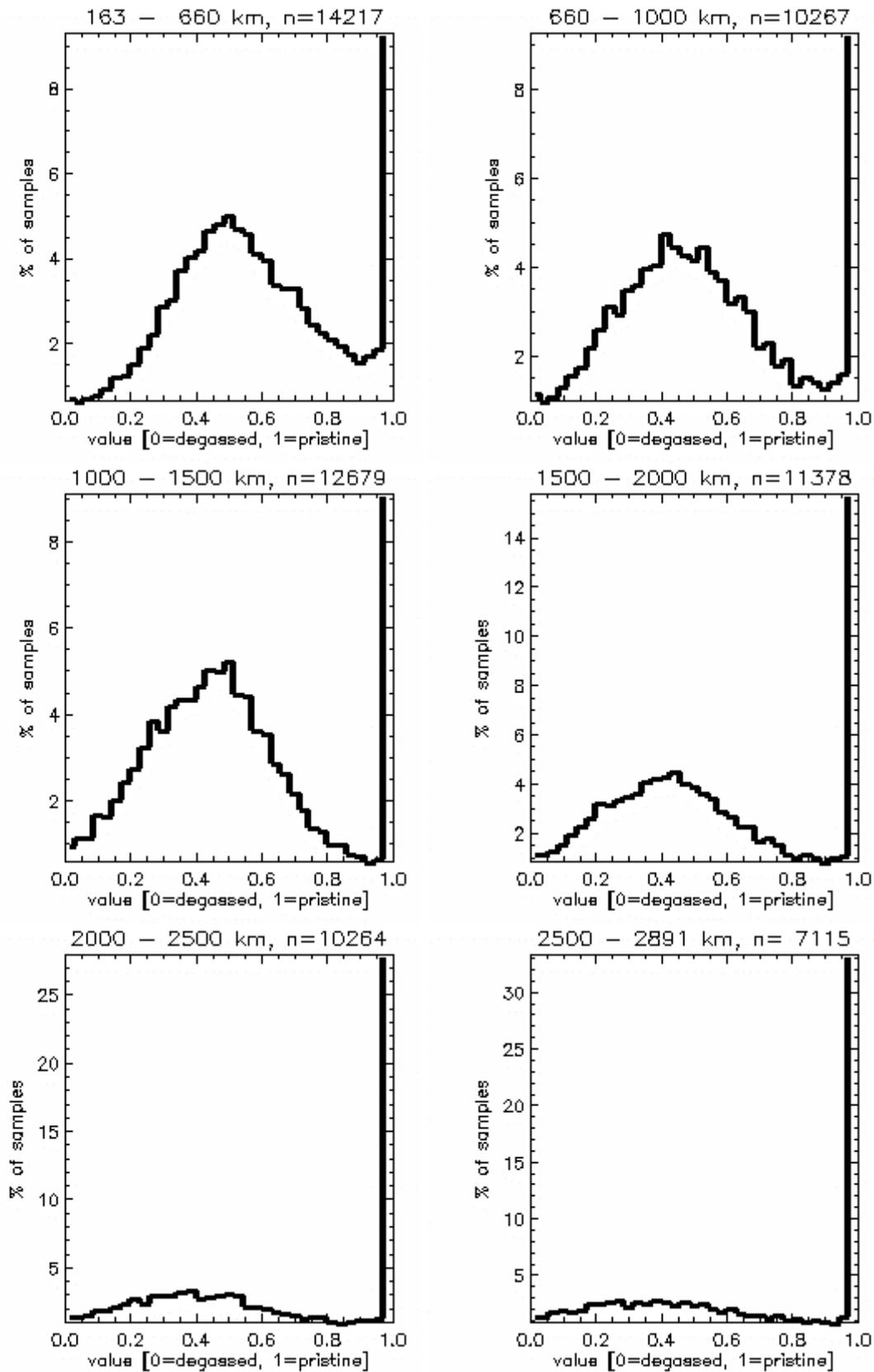
**Abb. 5.5-24:** Abnahme ursprünglichen Materials im Mantel



**Abb. 5.5-25:** Die Entgasungstiefe wird so festgelegt, dass am Ende der Rechnung 50 % des Mantels entgast sind

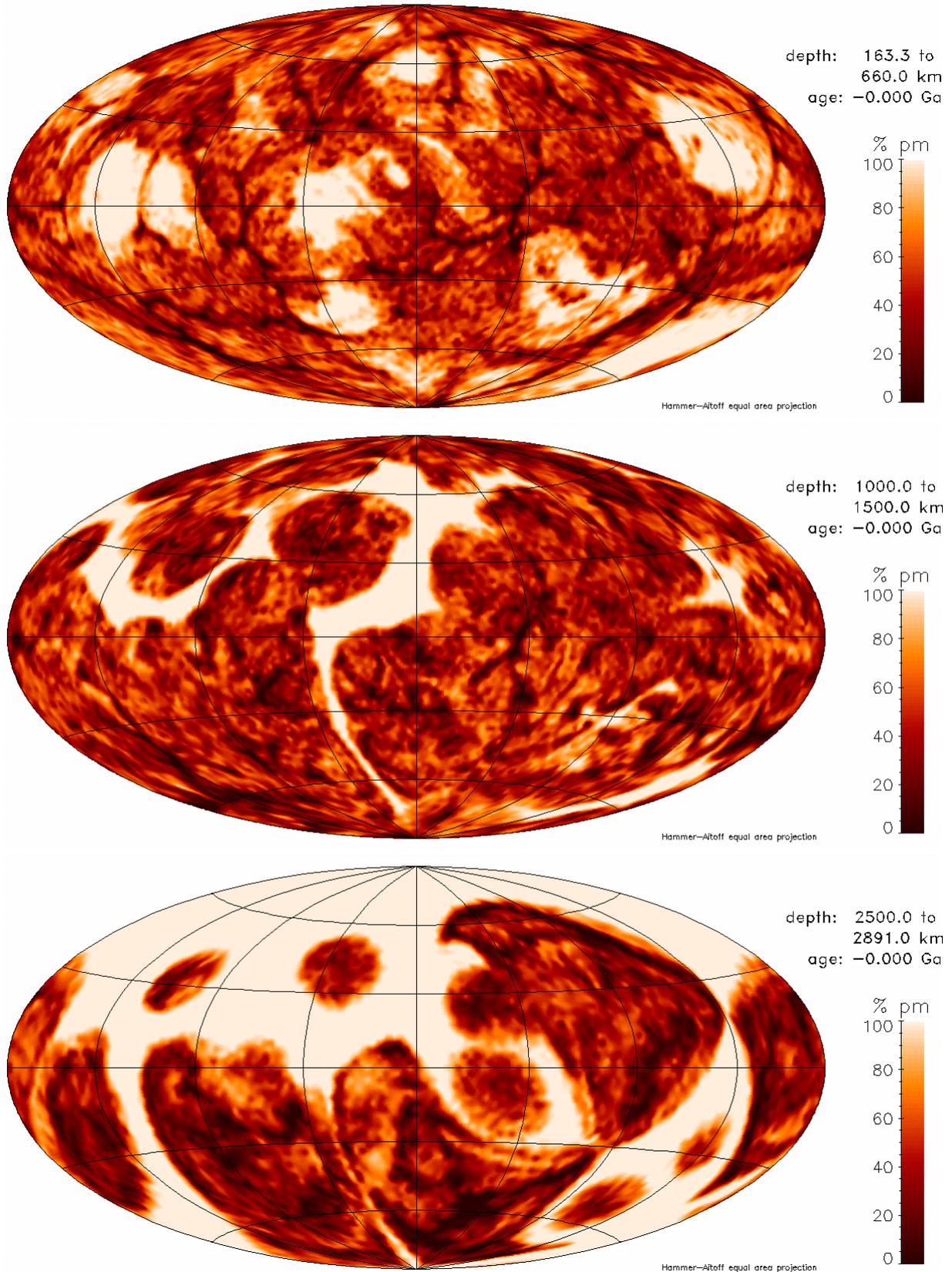
**Abb. 5.5-26:** Tiefenverteilung ursprünglichen Materials im heutigen Mantel

## 5.5. Modell 640



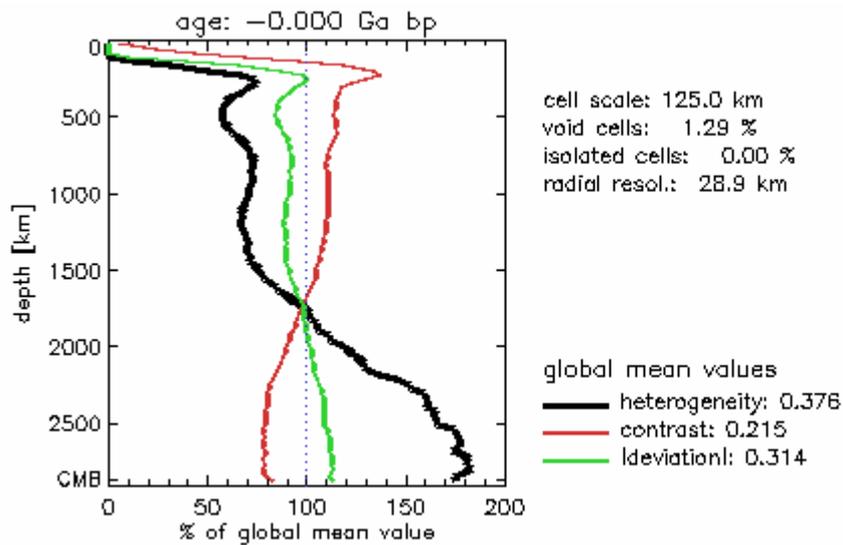
**Abb. 5.5-27:** Histogramme der Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Manteltiefen. Eine Probe repräsentiert den Mittelwert des gesamten radialen Intervalls. n ist die Anzahl der Unterteilungen der Kugelfläche in der jeweiligen Tiefe.

## 5.5. Modell 640

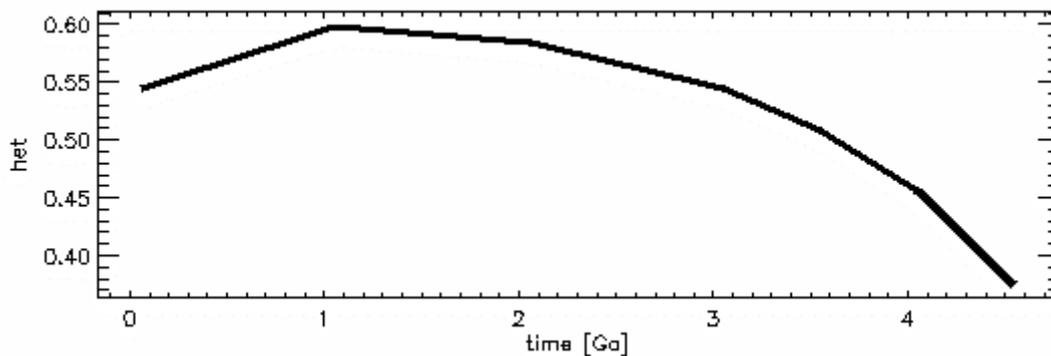


**Abb. 5.5-28:** Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Tiefenintervallen. Die laterale Auflösung entspricht der des jeweils passenden Histogramms in Abb. 5.5-27.

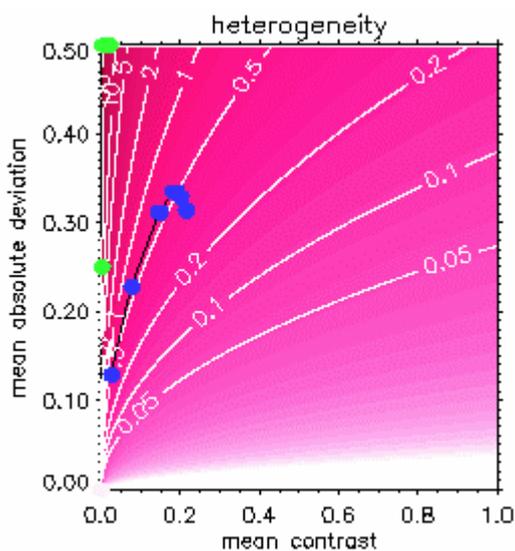
## 5.5. Modell 640



**Abb. 5.5-29:** Heutige Tiefenprofile der lateral gemittelten Werte von Heterogenität, Kontrast und mittlerer Absolutabweichung. Sie werden mit dem Mittelwert in der jeweiligen Kugelschale berechnet. Der globale Wert dient nur Skalierung der Abszisse.



**Abb. 5.5-30:** Zeitliche Entwicklung der Heterogenität

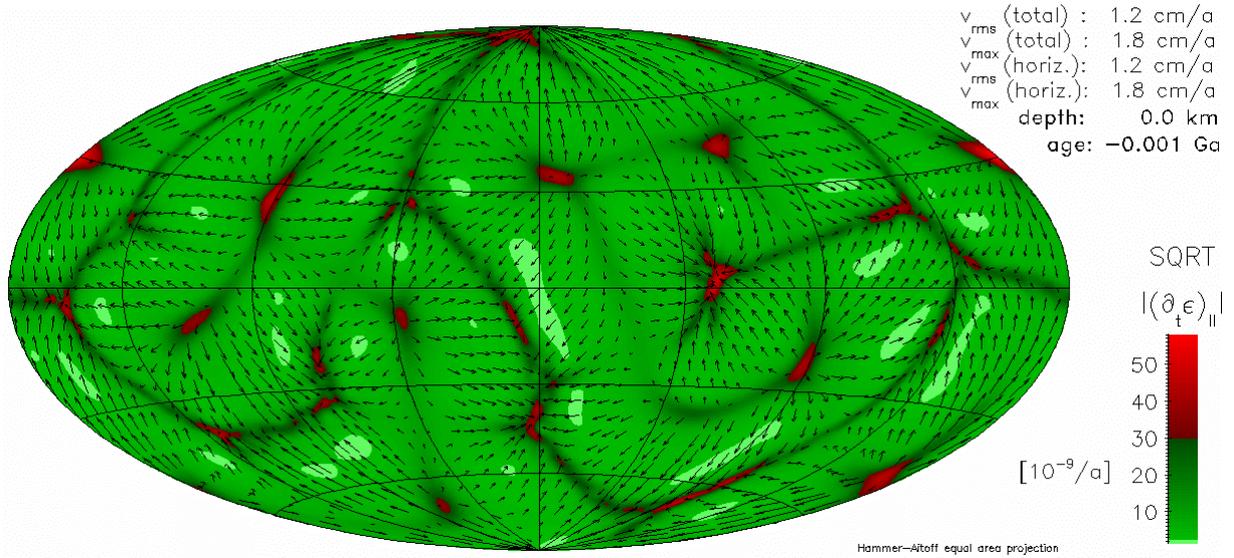


**Abb. 5.5-31:** Entwicklung der globalen Mittelwerte von Heterogenität, mittlerer Absolutabweichung und Kontrast.

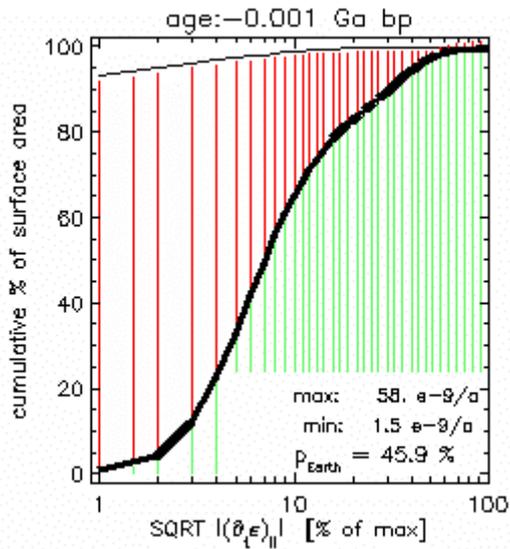
Jeder blaue Punkt entspricht einem ausgewerteten Zeitschritt. Die schwarze Verbindungslinie folgt der zeitlichen Entwicklung. Der älteste Zeitschritt liegt näher am Koordinatenursprung als die jüngeren. Die grünen Punkte markieren die Lage der in Kapitel 4.2.3 vorgestellten Referenzmodelle. Die rötliche Farbkodierung mit Höhenlinien stellt den Wert der Heterogenität dar.

## 5.6. Modell 641

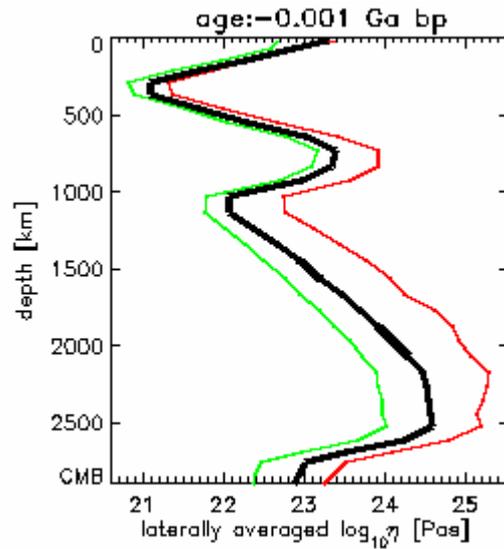
### 5.6. Modell 641



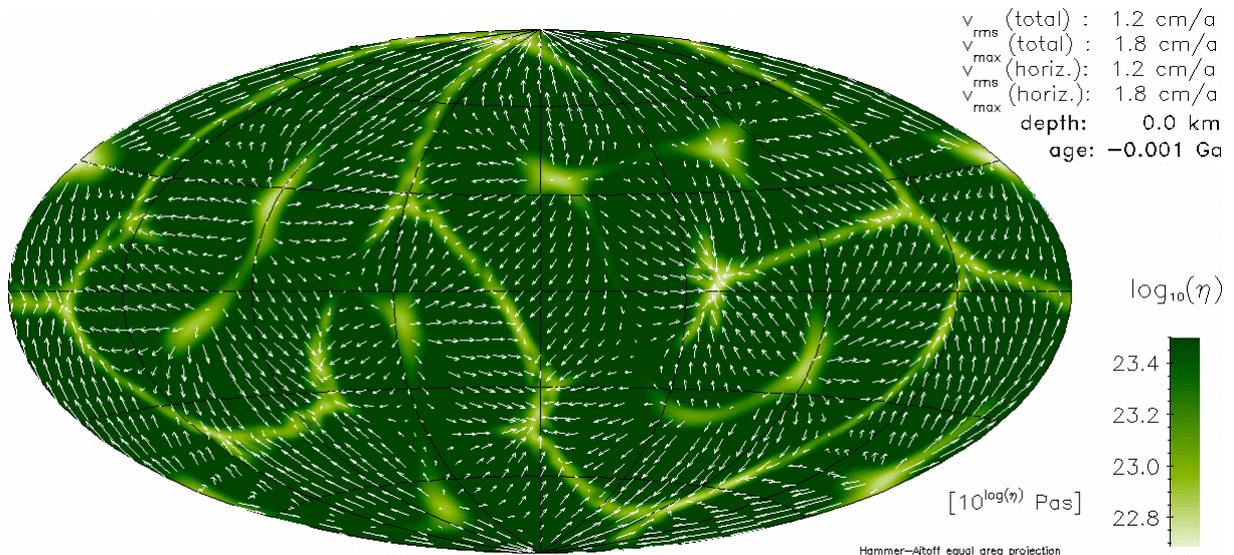
**Abb. 5.6-17:** Wurzel des Betrages der zweiten Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors



**Abb. 5.6-18:** Plattigkeit an der Oberfläche

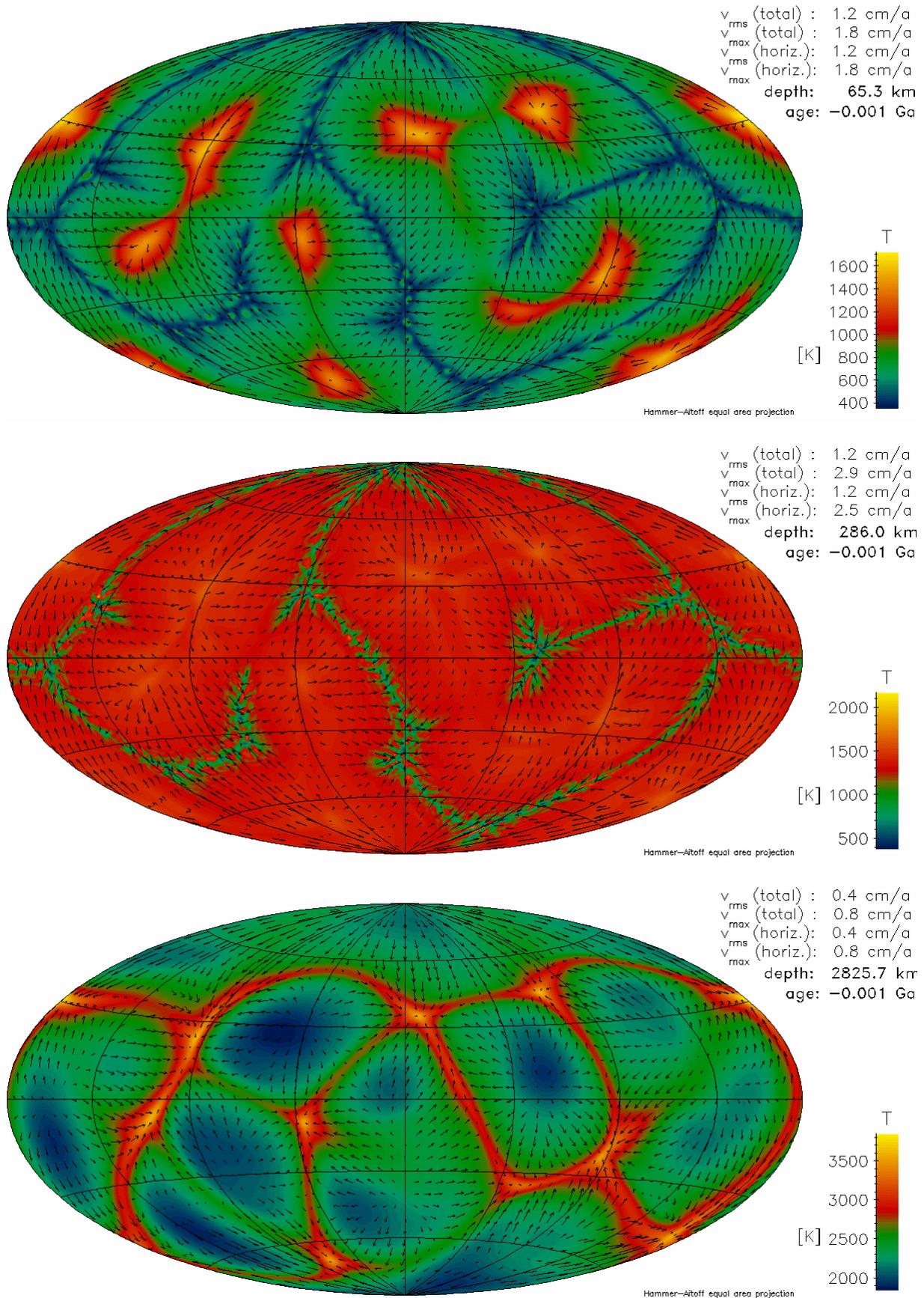


**Abb. 5.6-19:** Viskositätsprofil



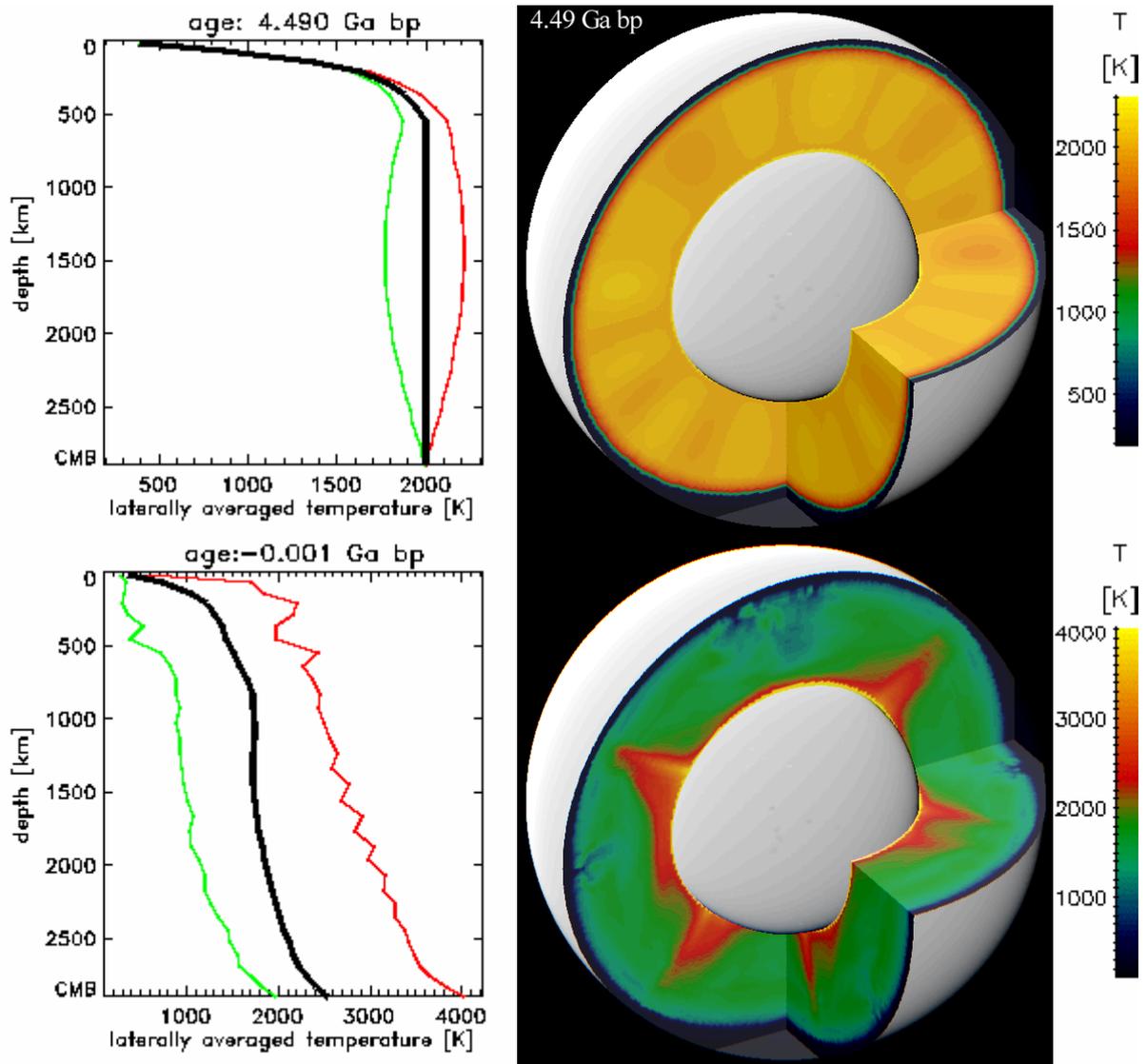
**Abb. 5.6-20:** Viskosität an der Oberfläche

## 5.6. Modell 641

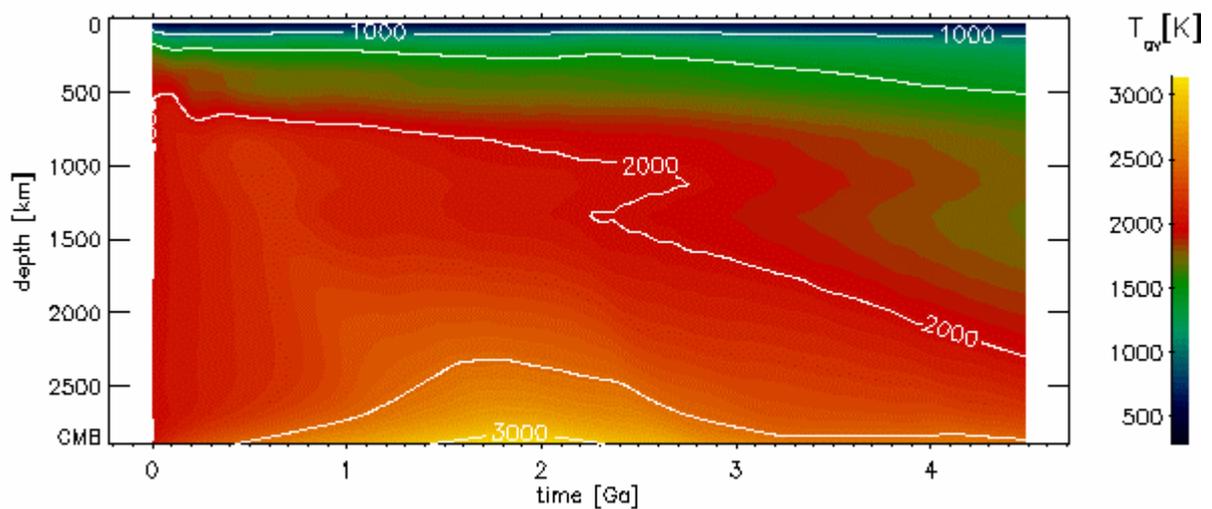


**Abb. 5.6-5:** Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten nahe der Oberfläche, im oberen Mantel und nahe der Kern-Mantel-Grenze

## 5.6. Modell 641

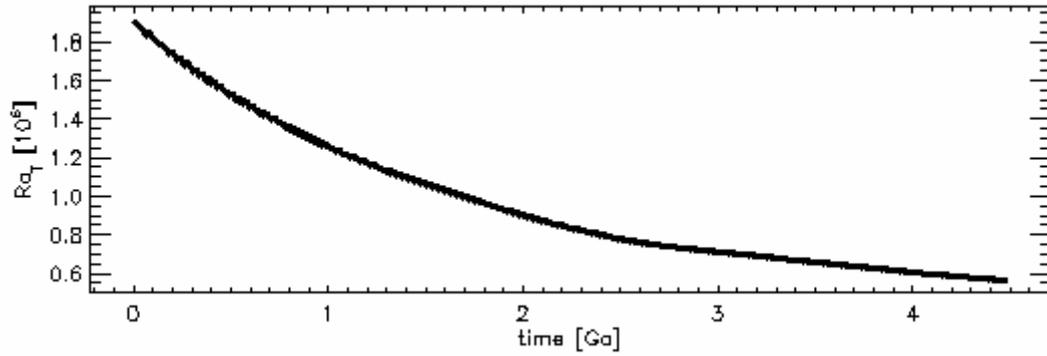


**Abb. 5.6-6:** Temperaturverteilung im Mantel am Anfang der Rechnung und heute

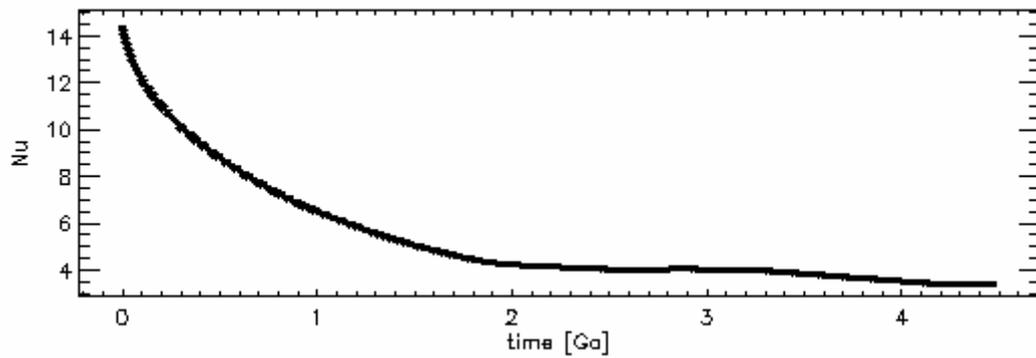


**Abb. 5.6-7:** Zeitliche Entwicklung des Temperaturprofils

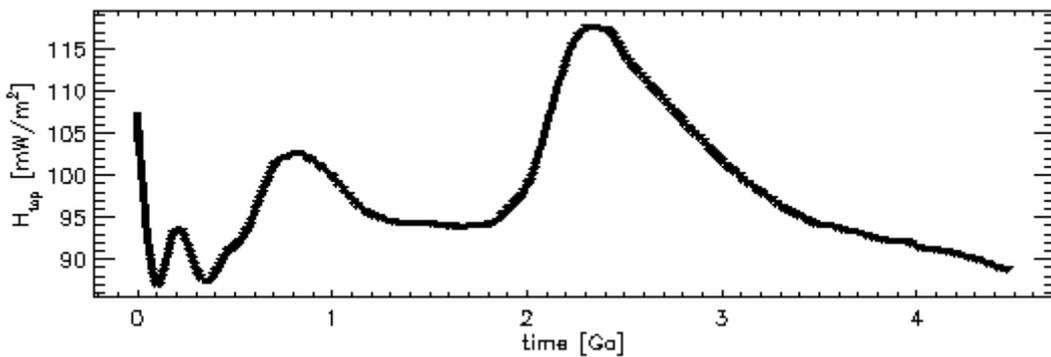
## 5.6. Modell 641



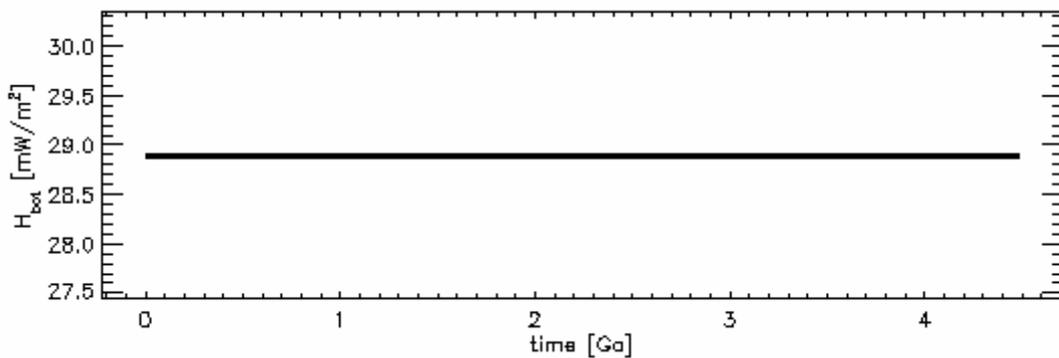
**Abb. 5.6-8:** Zeitliche Entwicklung der Rayleigh-Zahl



**Abb. 5.6-9:** Zeitliche Entwicklung der Nusselt-Zahl

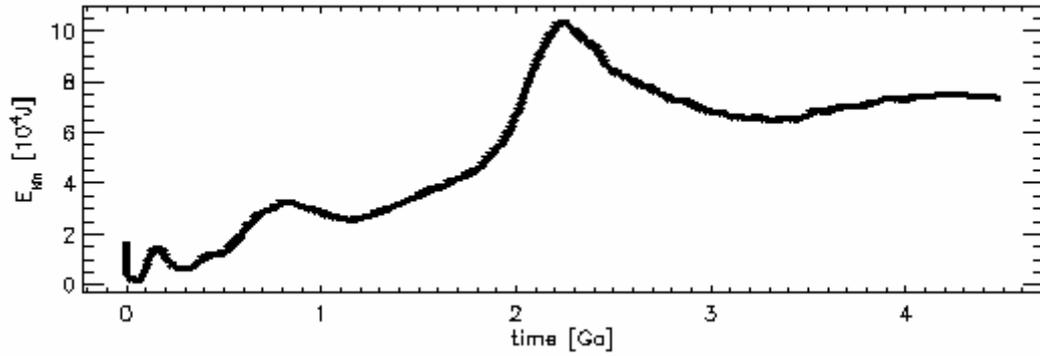


**Abb. 5.6-10:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Oberfläche

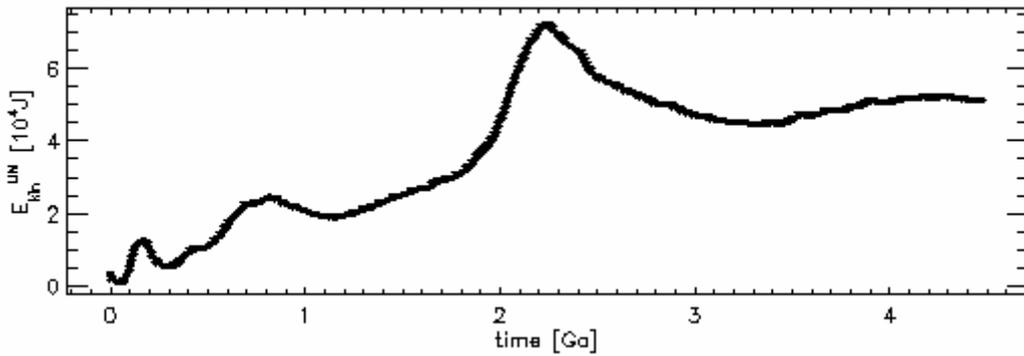


**Abb. 5.6-11:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Kern-Mantel-Grenze

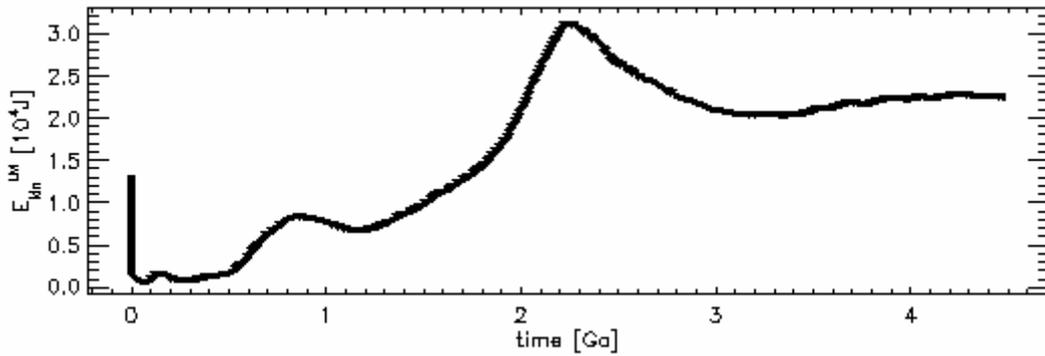
## 5.6. Modell 641



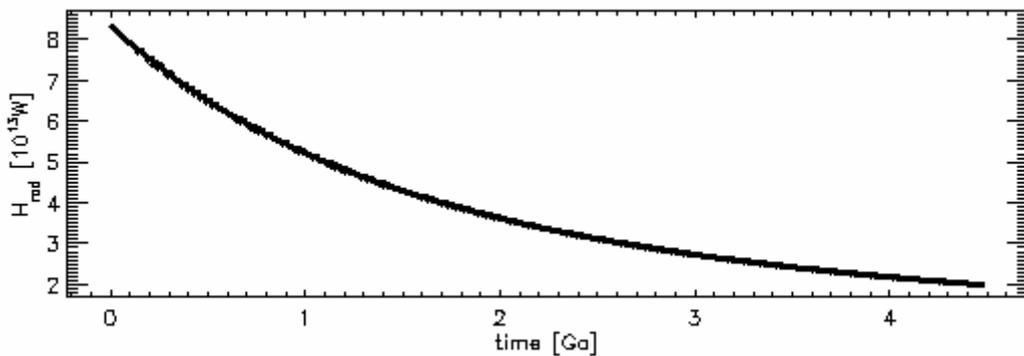
**Abb. 5.6-12:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des gesamten Mantels



**Abb. 5.6-13:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des oberen Mantels

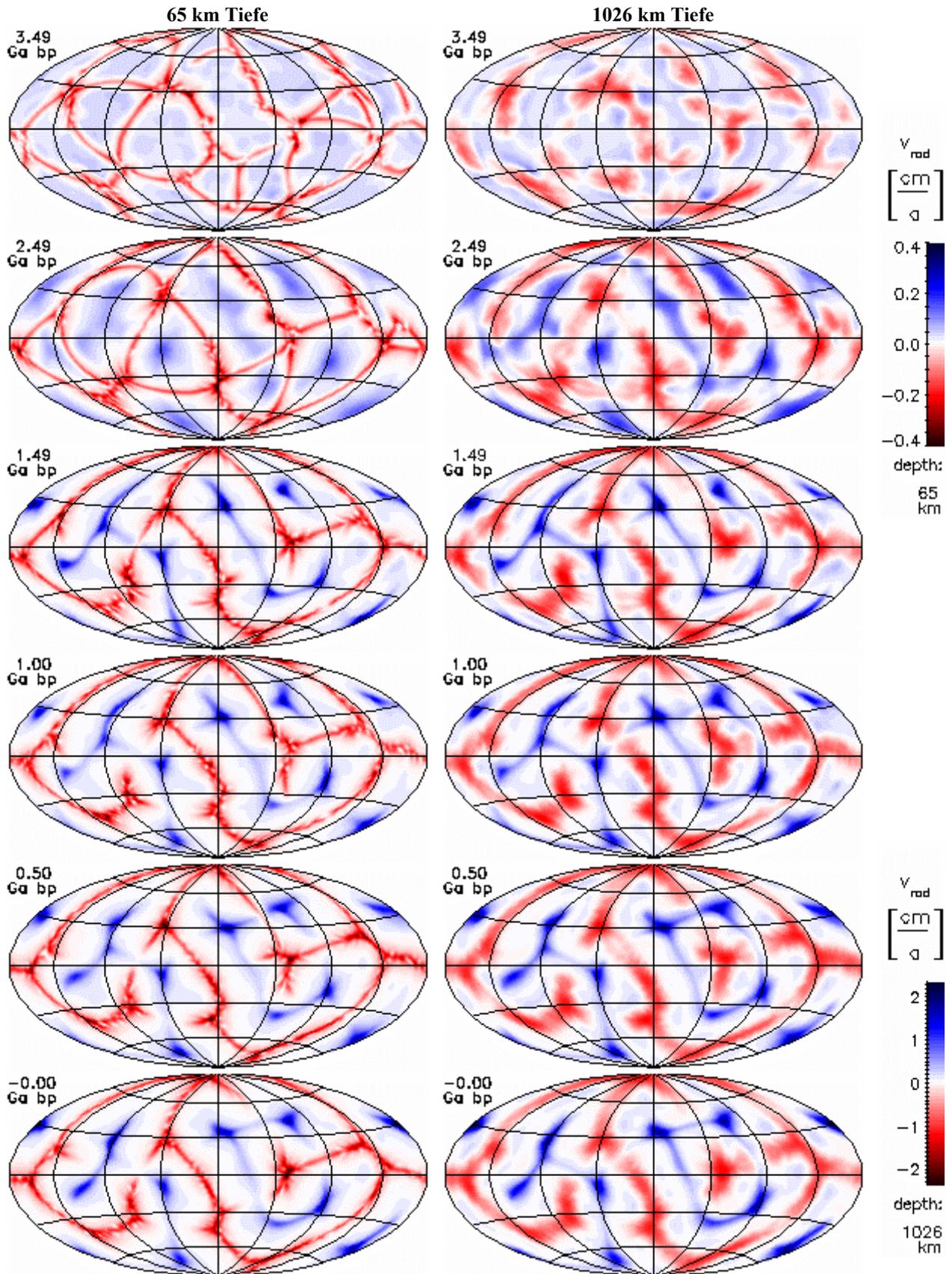


**Abb. 5.6-14:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des unteren Mantels



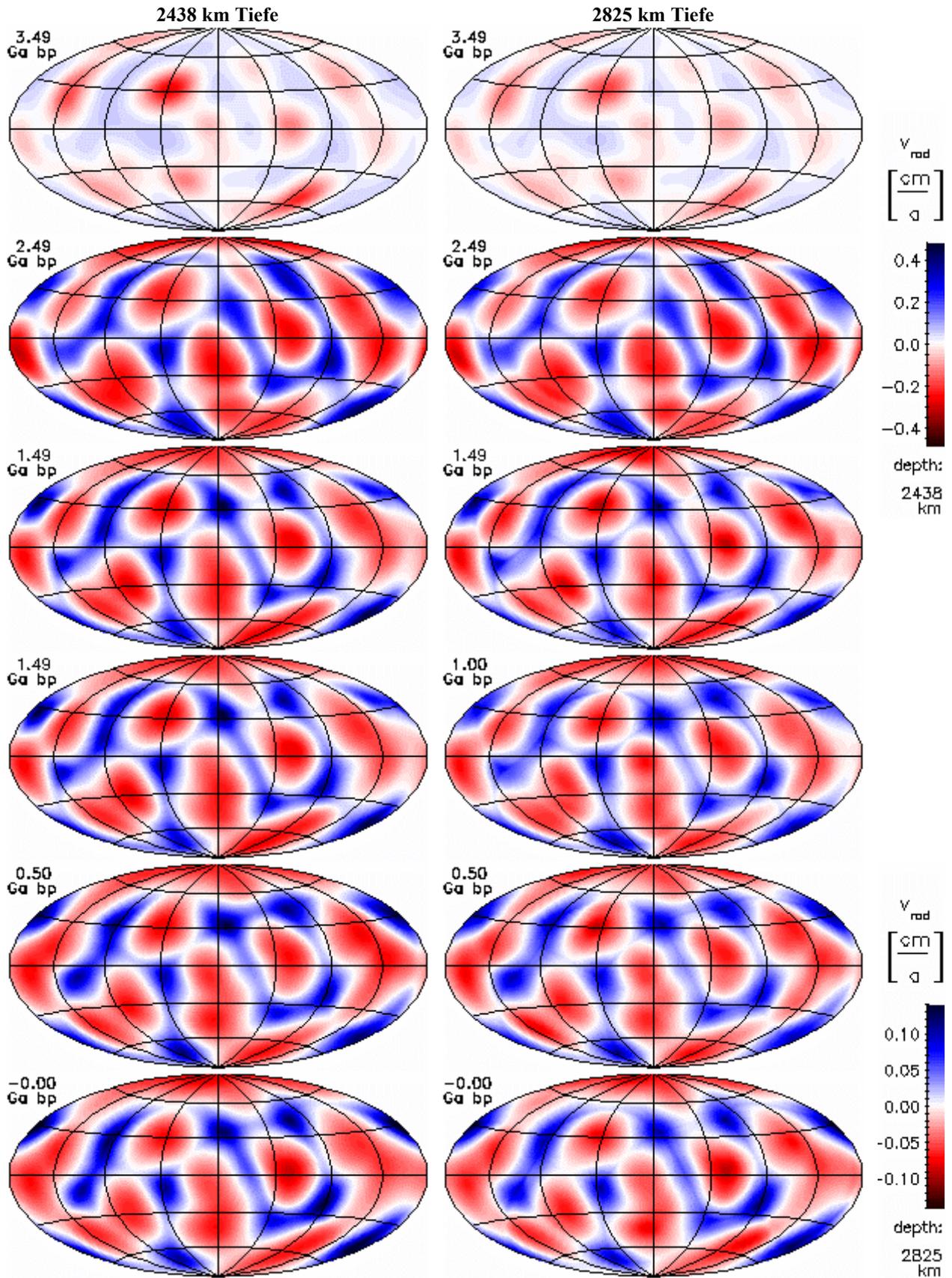
**Abb. 5.6-15:** Zeitliche Entwicklung der Heizleistung durch Zerfall von  $^{40}K$ ,  $^{42}Th$ ,  $^{235}U$  und  $^{238}U$

## 5.6. Modell 641



**Abb. 5.6-16:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente nahe der Oberfläche und im unteren Mantel. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind eventuell abgeschnitten.

## 5.6. Modell 641



**Abb. 5.6-17:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente im unteren Mantel und nahe der CMB. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind evtl. abgeschnitten.

## 5.6. Modell 641

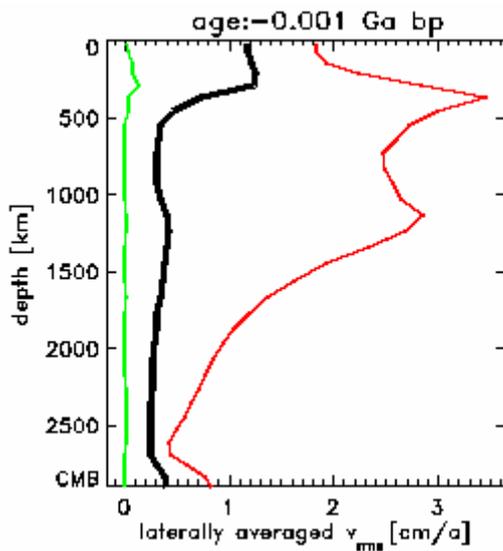


Abb. 5.6-18: Heutiges Geschwindigkeitsprofil

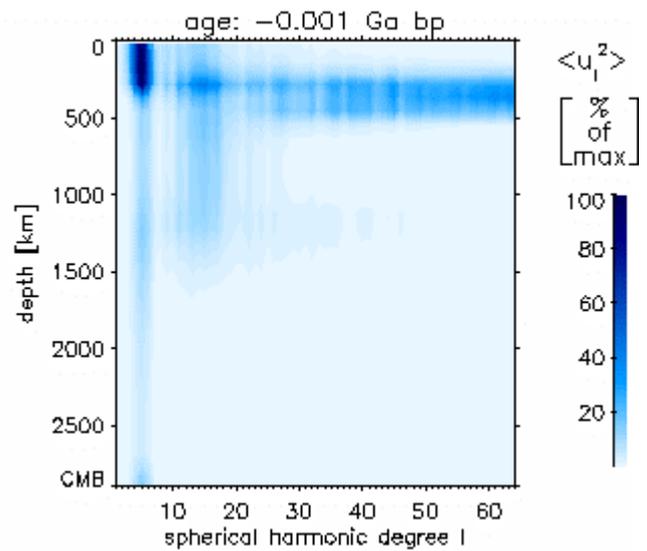


Abb. 5.6-19: Spektrum von toroidaler plus poloidaler kinetischer Energie

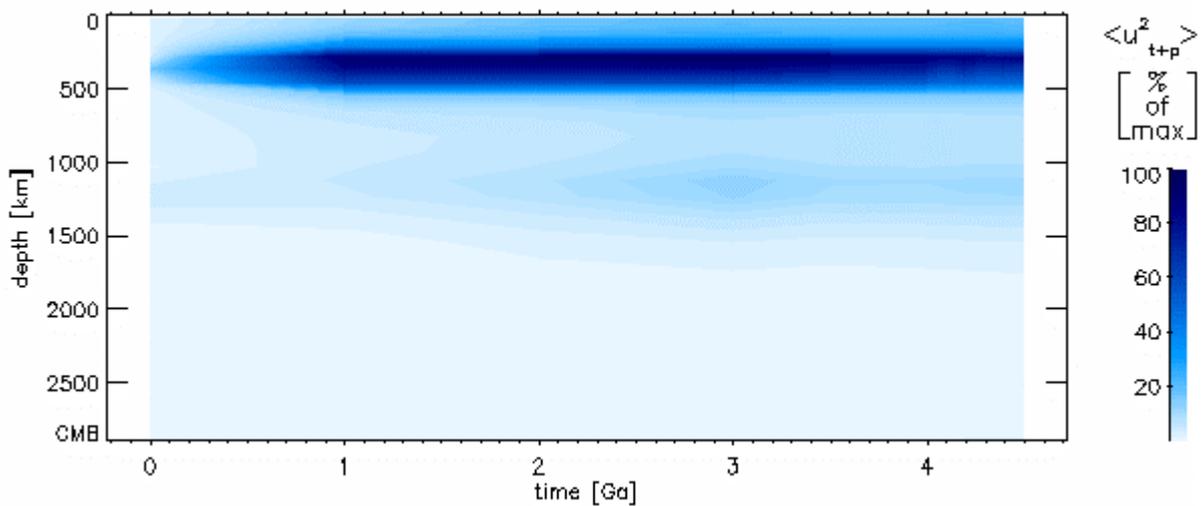


Abb. 5.6-20: Entwicklung der Tiefenverteilung der Summe von poloidaler und toroidaler Energie

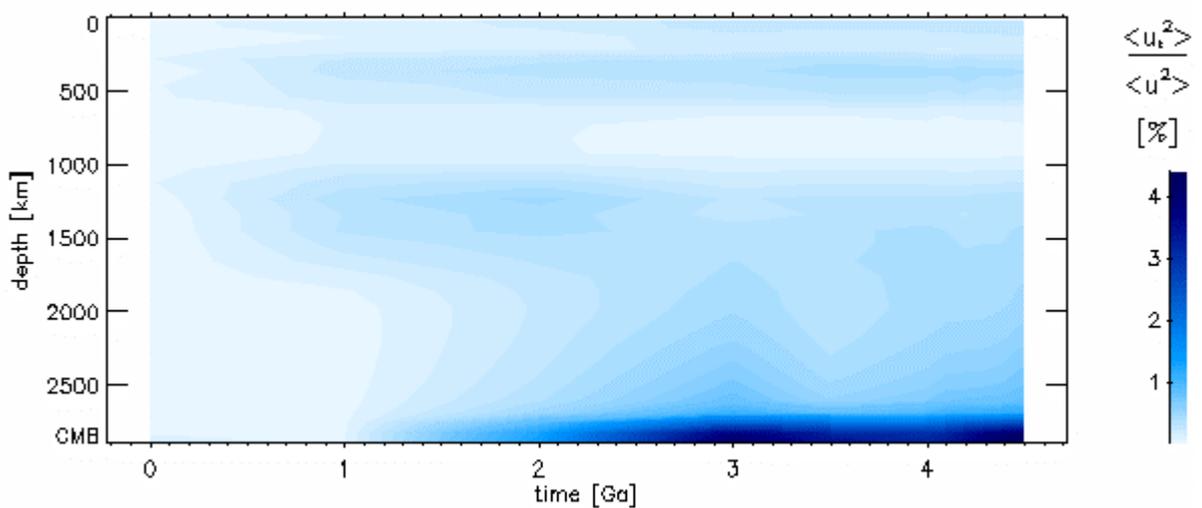
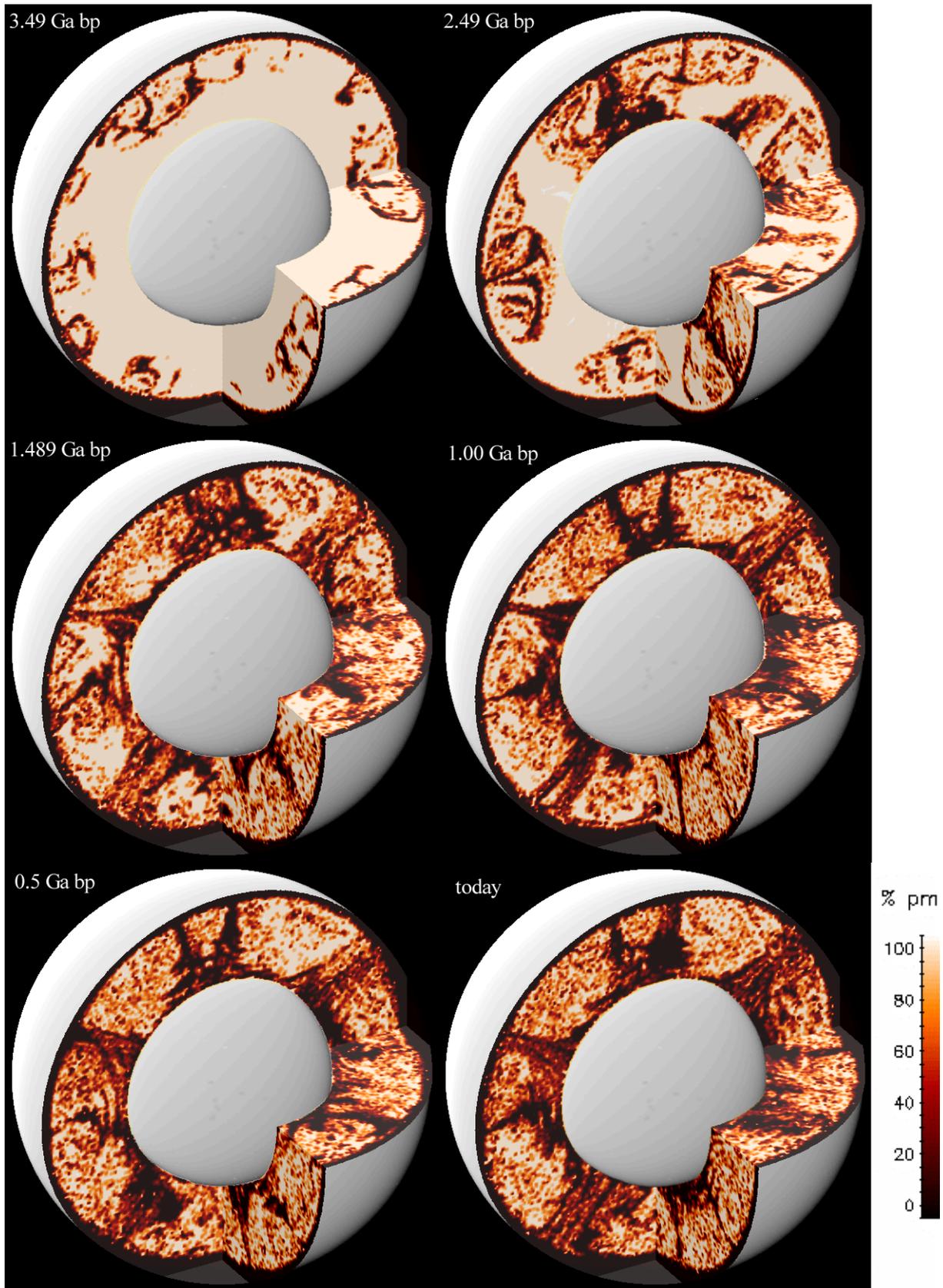


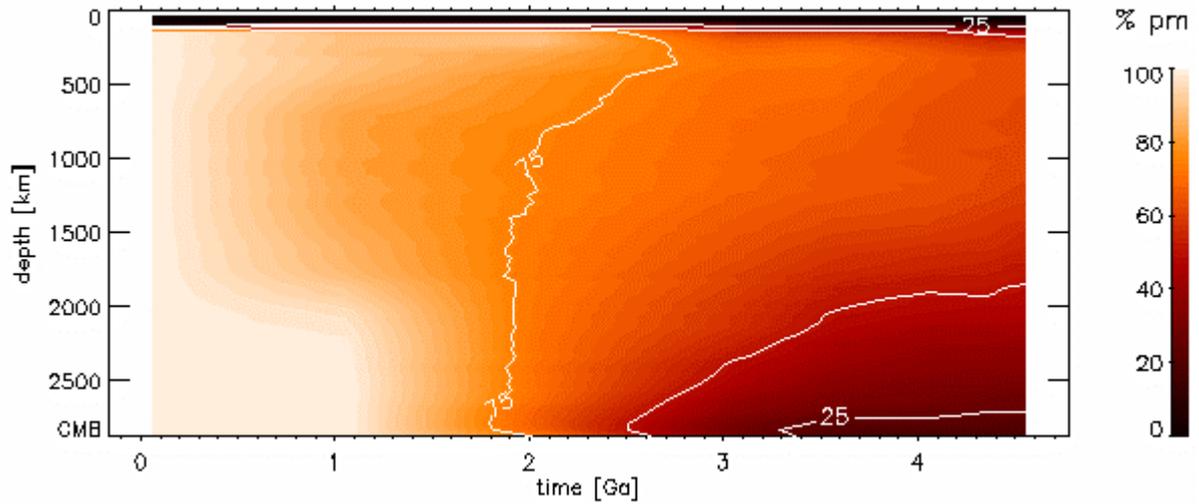
Abb. 5.6-21: Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung des toroidalen Anteils

## 5.6. Modell 641

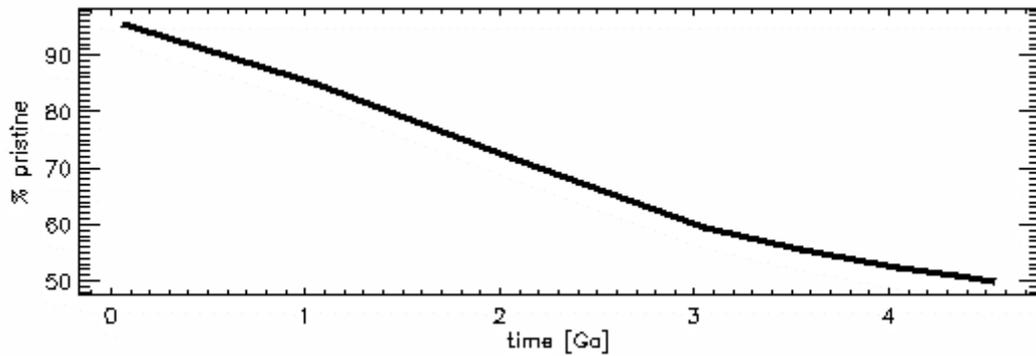


**Abb. 5.6-22:** Verteilung ursprünglichen Materials (pm) zu verschiedenen Zeiten

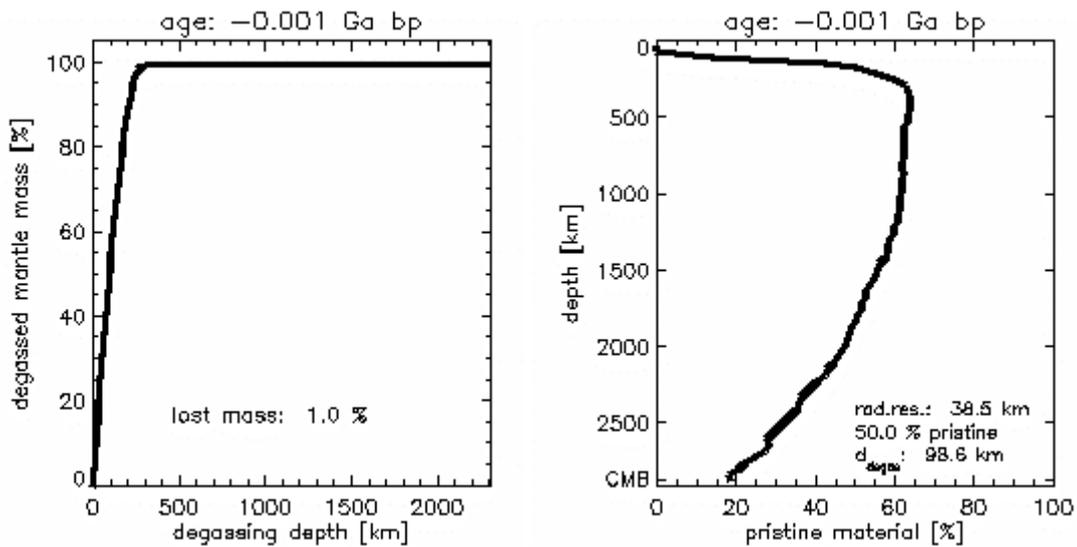
## 5.6. Modell 641



**Abb. 5.6-23:** Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung ursprünglichen Materials



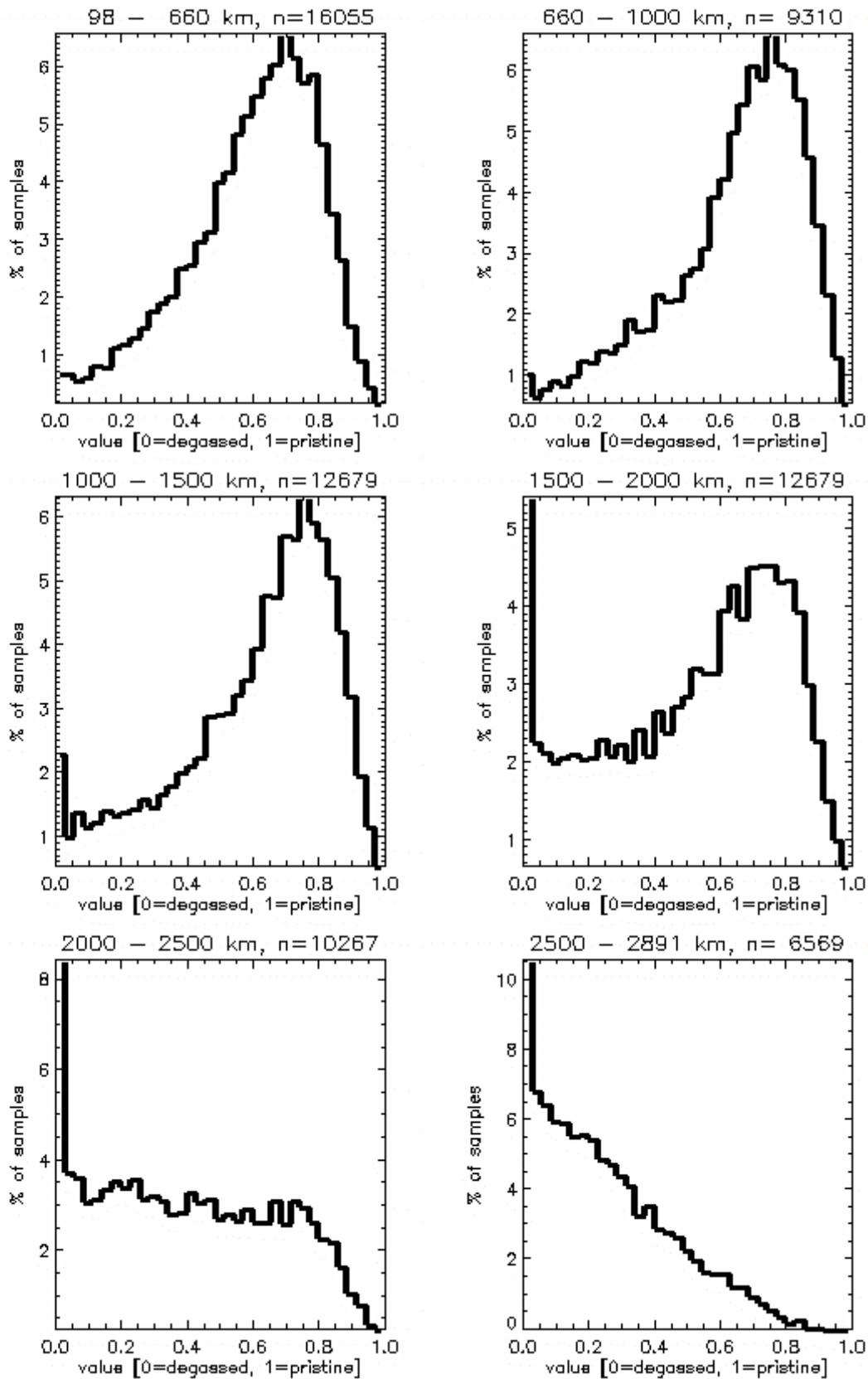
**Abb. 5.6-24:** Abnahme ursprünglichen Materials im Mantel



**Abb. 5.6-25:** Die Entgasungstiefe wird so festgelegt, dass am Ende der Rechnung 50 % des Mantels entgast sind

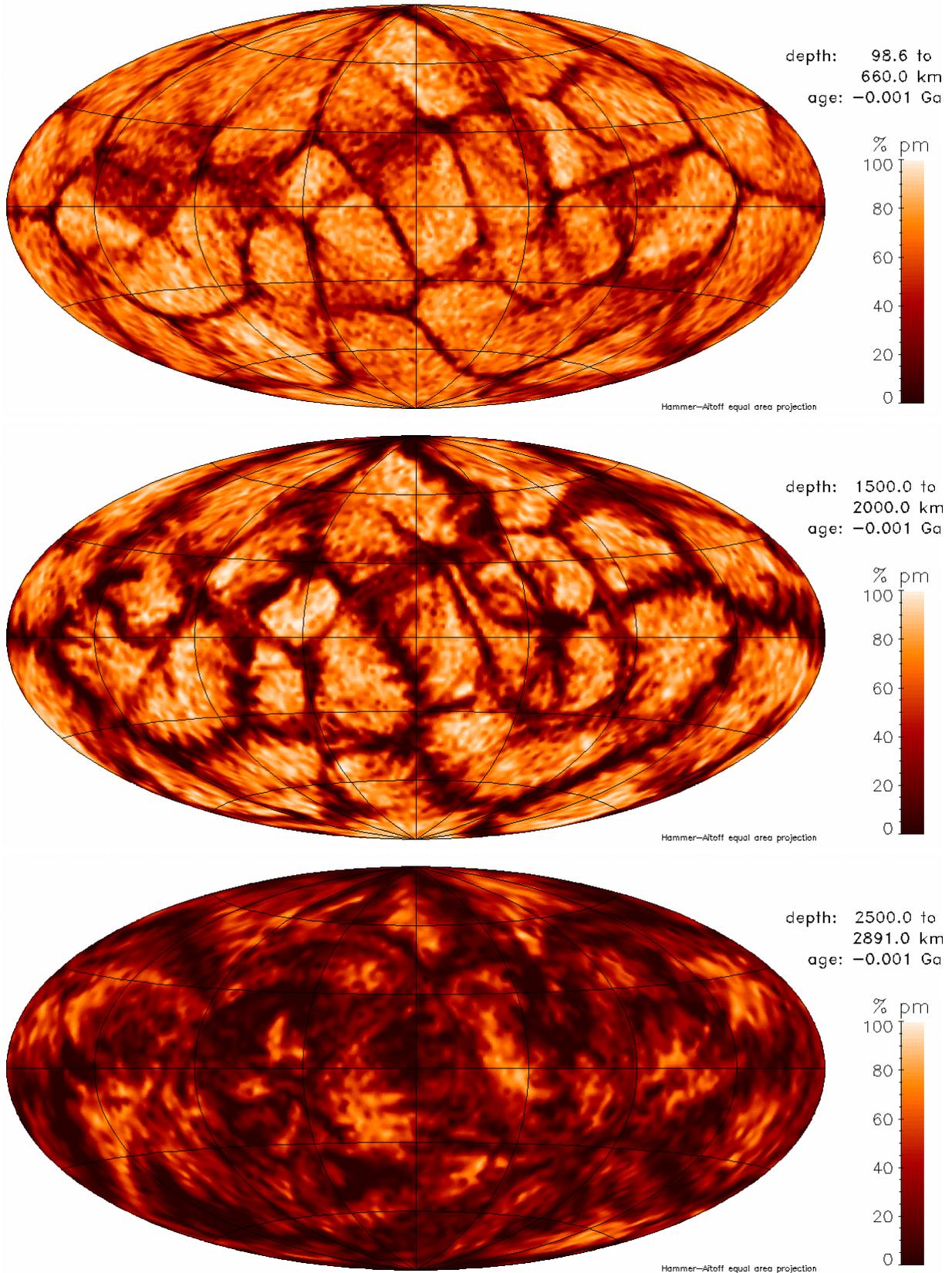
**Abb. 5.6-26:** Tiefenverteilung ursprünglichen Materials im heutigen Mantel

## 5.6. Modell 641



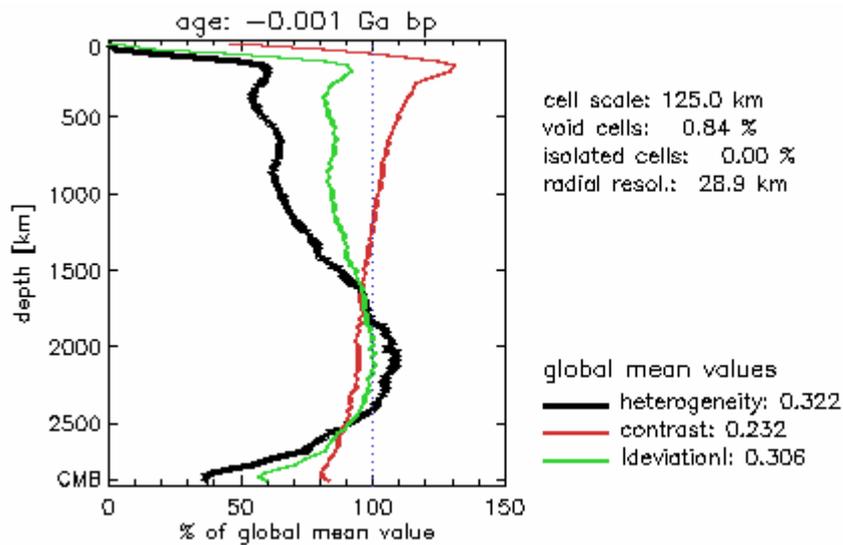
**Abb. 5.6-27:** Histogramme der Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Manteltiefen. Eine Probe repräsentiert den Mittelwert des gesamten radialen Intervalls. n ist die Anzahl der Unterteilungen der Kugelfläche in der jeweiligen Tiefe.

## 5.6. Modell 641

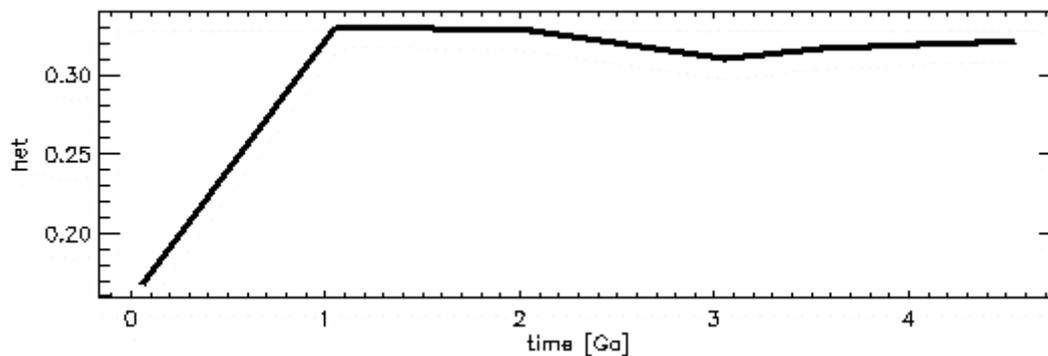


**Abb. 5.6-28:** Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Tiefenintervallen. Die laterale Auflösung entspricht der des jeweils passenden Histogramms in Abb. 5.6-27.

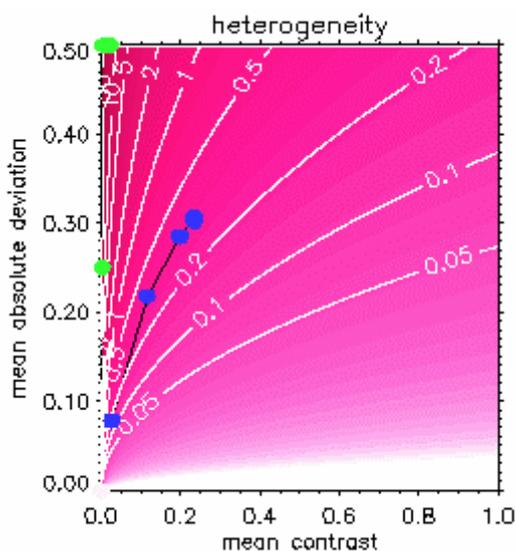
## 5.6. Modell 641



**Abb. 5.6-29:** Heutige Tiefenprofile der lateral gemittelten Werte von Heterogenität, Kontrast und mittlerer Absolutabweichung. Sie werden mit dem Mittelwert in der jeweiligen Kugelschale berechnet. Der globale Wert dient nur Skalierung der Abszisse.



**Abb. 5.6-30:** Zeitliche Entwicklung der Heterogenität

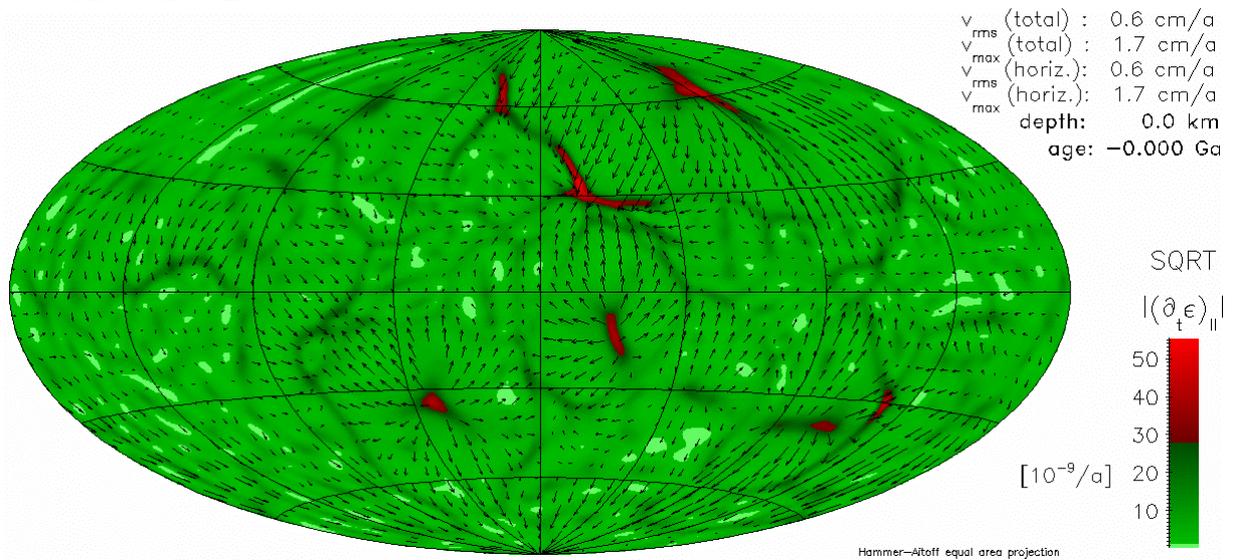


**Abb. 5.6-31:** Entwicklung der globalen Mittelwerte von Heterogenität, mittlerer Absolutabweichung und Kontrast.

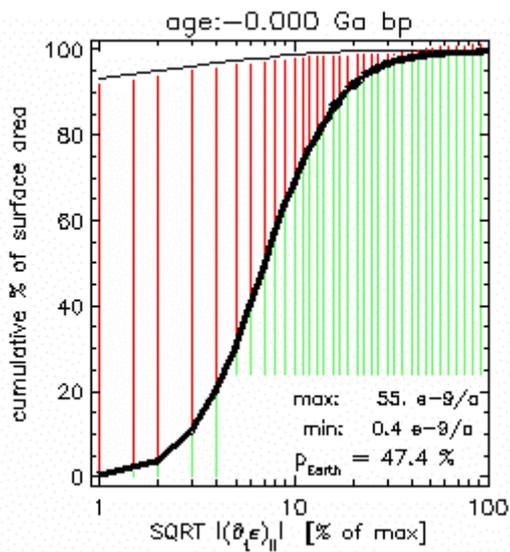
Jeder blaue Punkt entspricht einem ausgewerteten Zeitschritt. Die schwarze Verbindungslinie folgt der zeitlichen Entwicklung. Der älteste Zeitschritt liegt näher am Koordinatenursprung als die jüngeren. Die grünen Punkte markieren die Lage der in Kapitel 4.2.3 vorgestellten Referenzmodelle. Die rötliche Farbkodierung mit Höhenlinien stellt den Wert der Heterogenität dar.

## 5.7. Modell 642

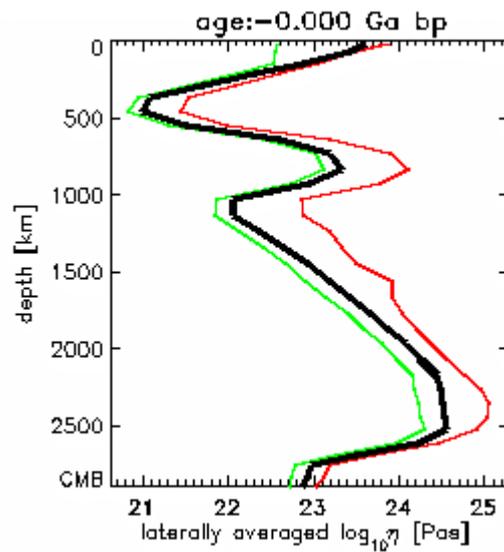
### 5.7. Modell 642



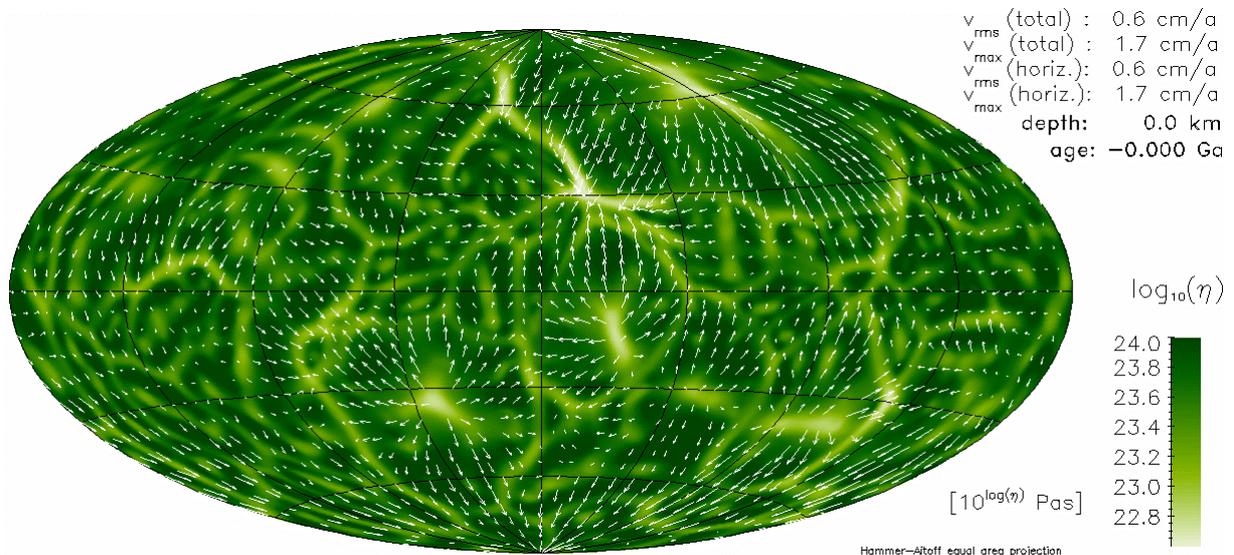
**Abb. 5.7-21:** Wurzel des Betrages der zweiten Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors



**Abb. 5.7-22:** Plattigkeit an der Oberfläche

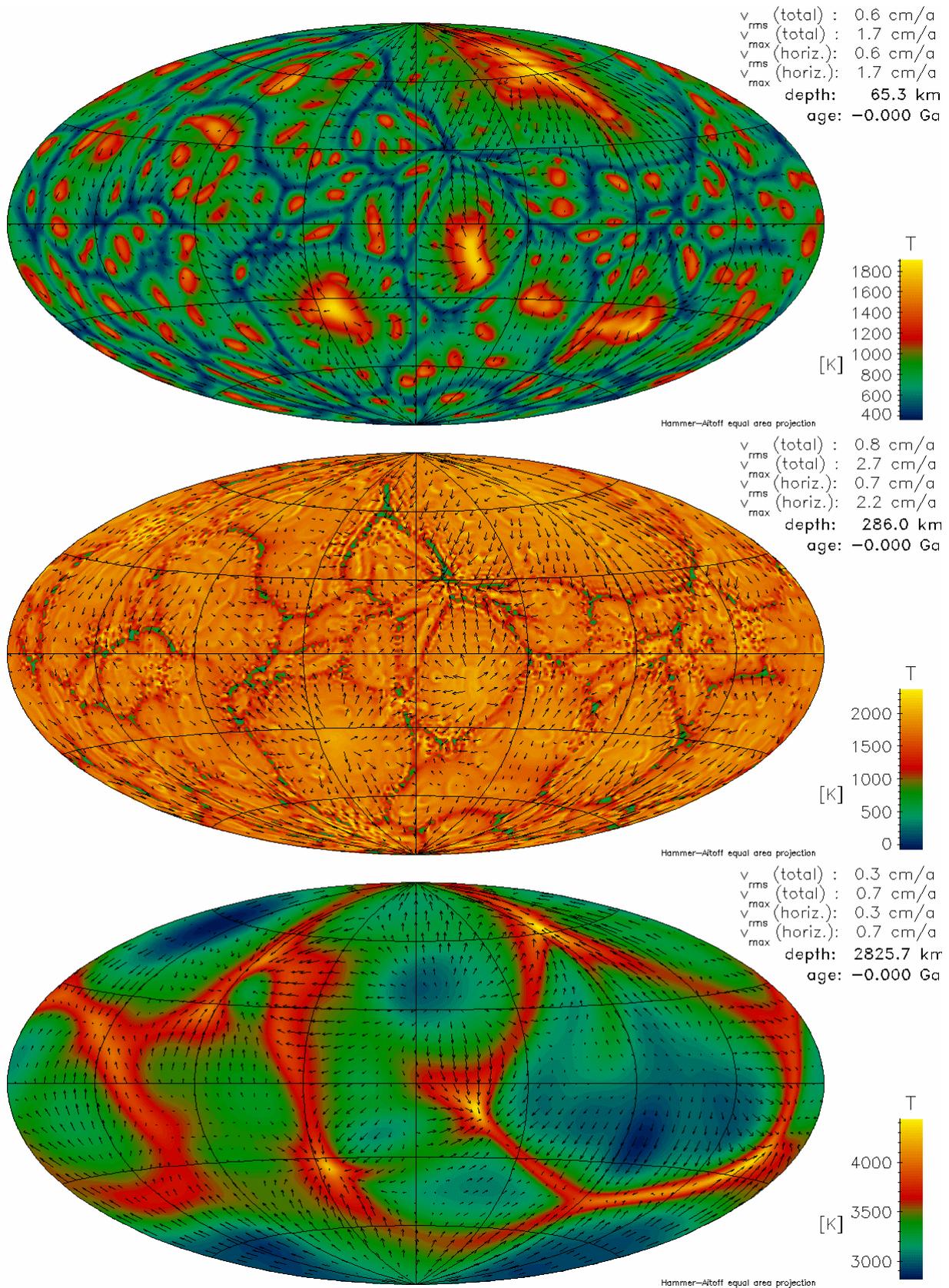


**Abb. 5.7-23:** Viskositätsprofil



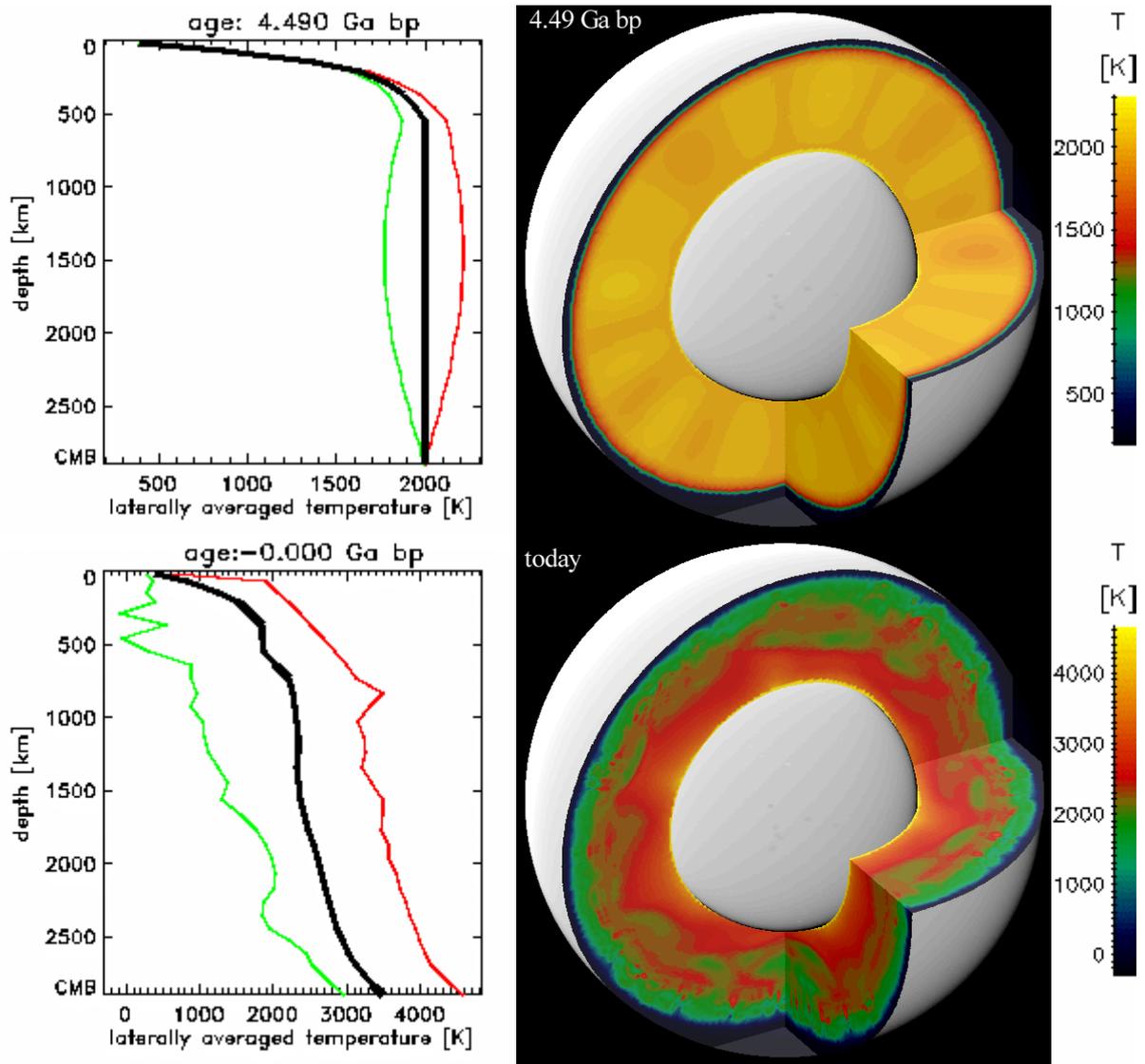
**Abb. 5.7-24:** Viskosität an der Oberfläche

## 5.7. Modell 642

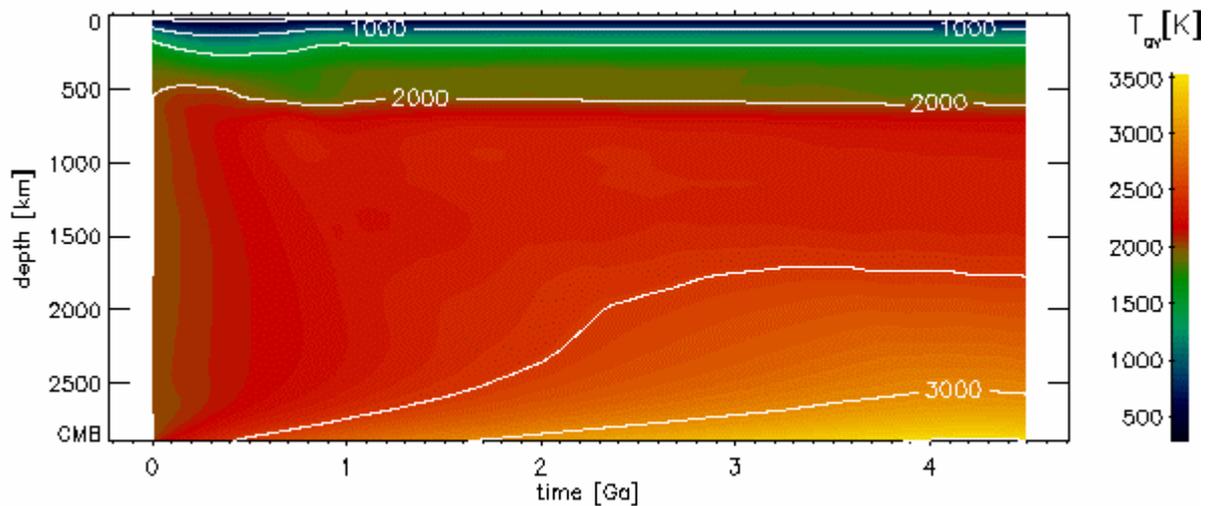


**Abb. 5.7-5:** Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten nahe der Oberfläche, im oberen Mantel und nahe der Kern-Mantel-Grenze

## 5.7. Modell 642

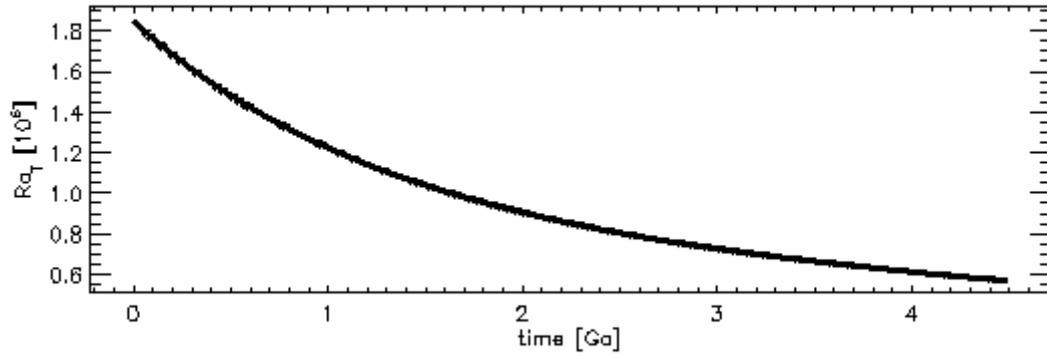


**Abb. 5.7-6:** Temperaturverteilung im Mantel am Anfang der Rechnung und heute

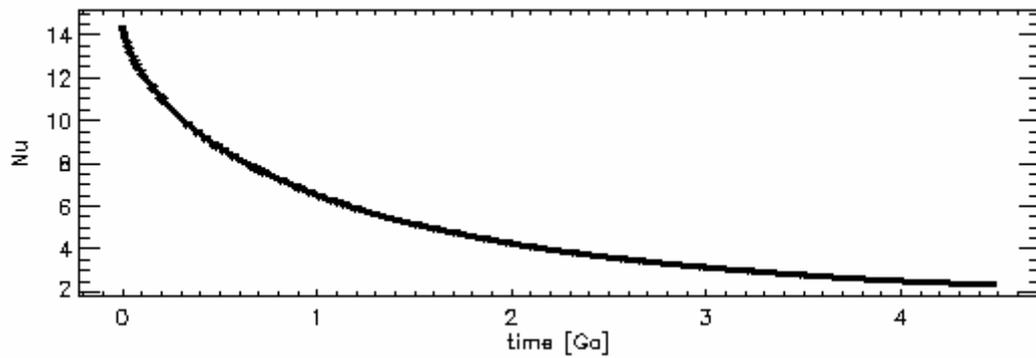


**Abb. 5.7-7:** Zeitliche Entwicklung des Temperaturprofils

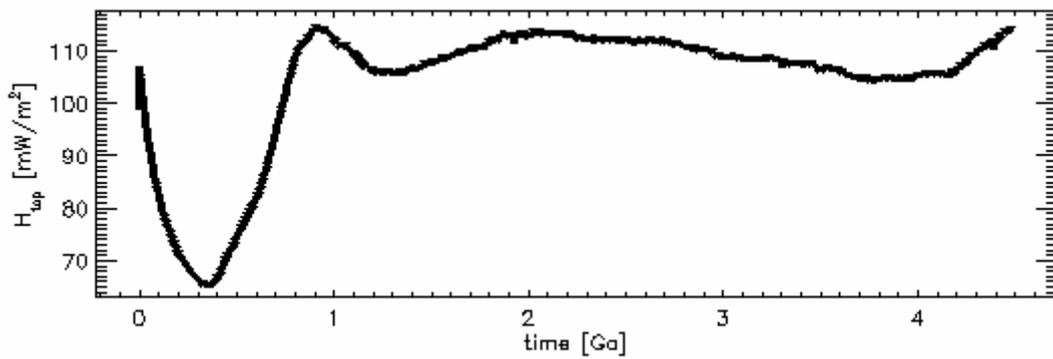
## 5.7. Modell 642



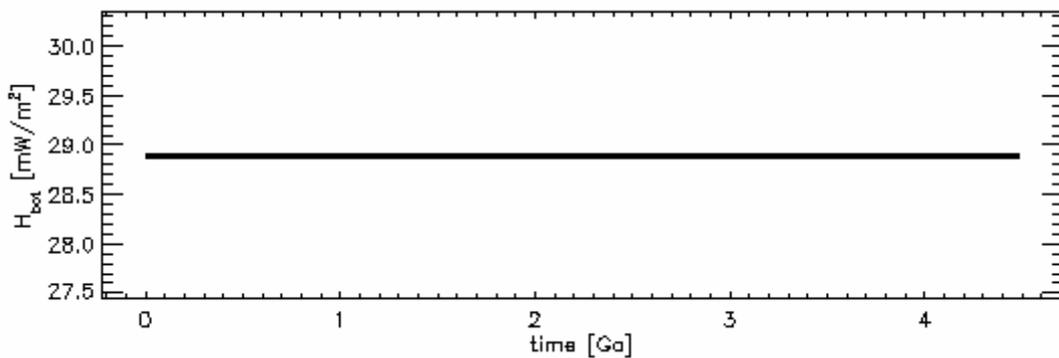
**Abb. 5.7-8:** Zeitliche Entwicklung der Rayleigh-Zahl



**Abb. 5.7-9:** Zeitliche Entwicklung der Nusselt-Zahl

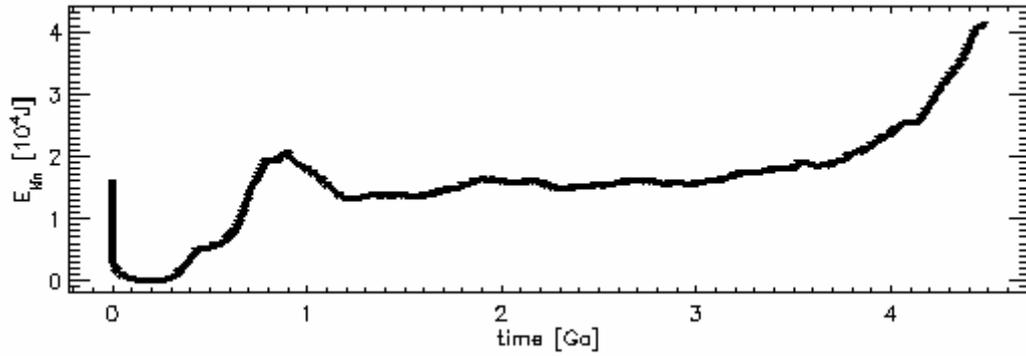


**Abb. 5.7-10:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Oberfläche

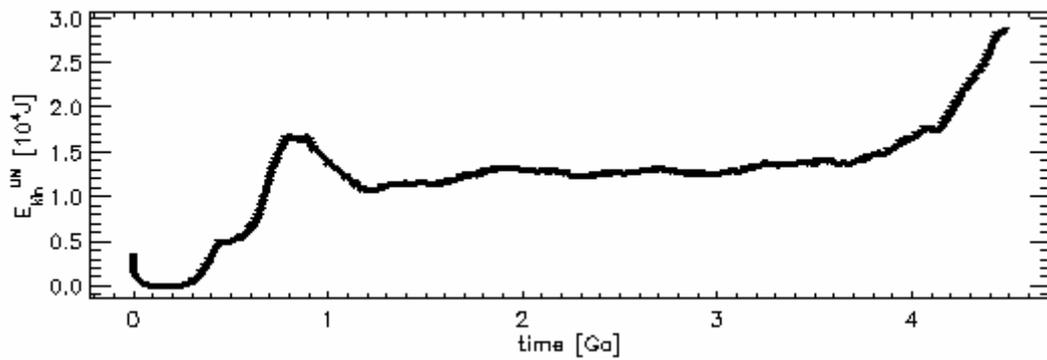


**Abb. 5.7-11:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Kern-Mantel-Grenze

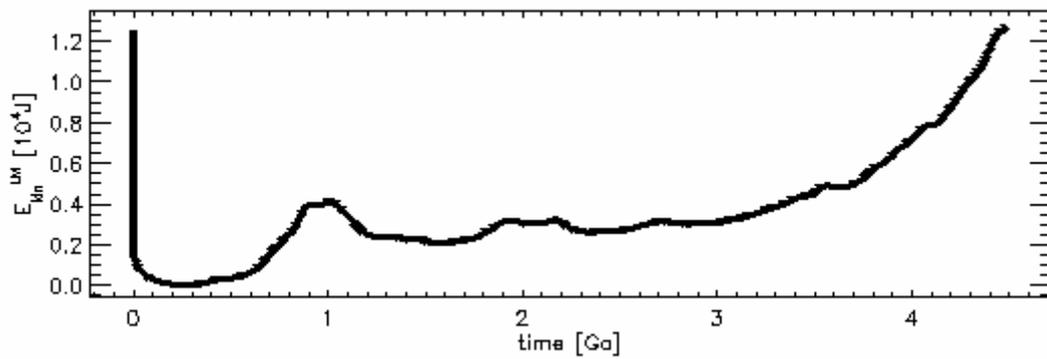
## 5.7. Modell 642



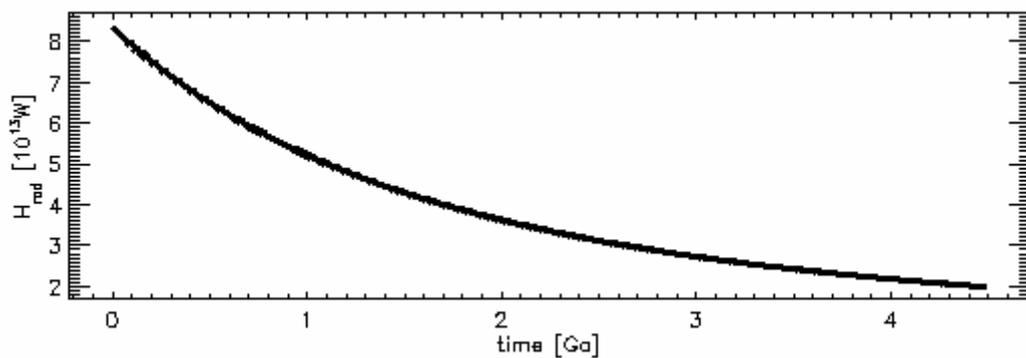
**Abb. 5.7-12:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des gesamten Mantels



**Abb. 5.7-13:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des oberen Mantels

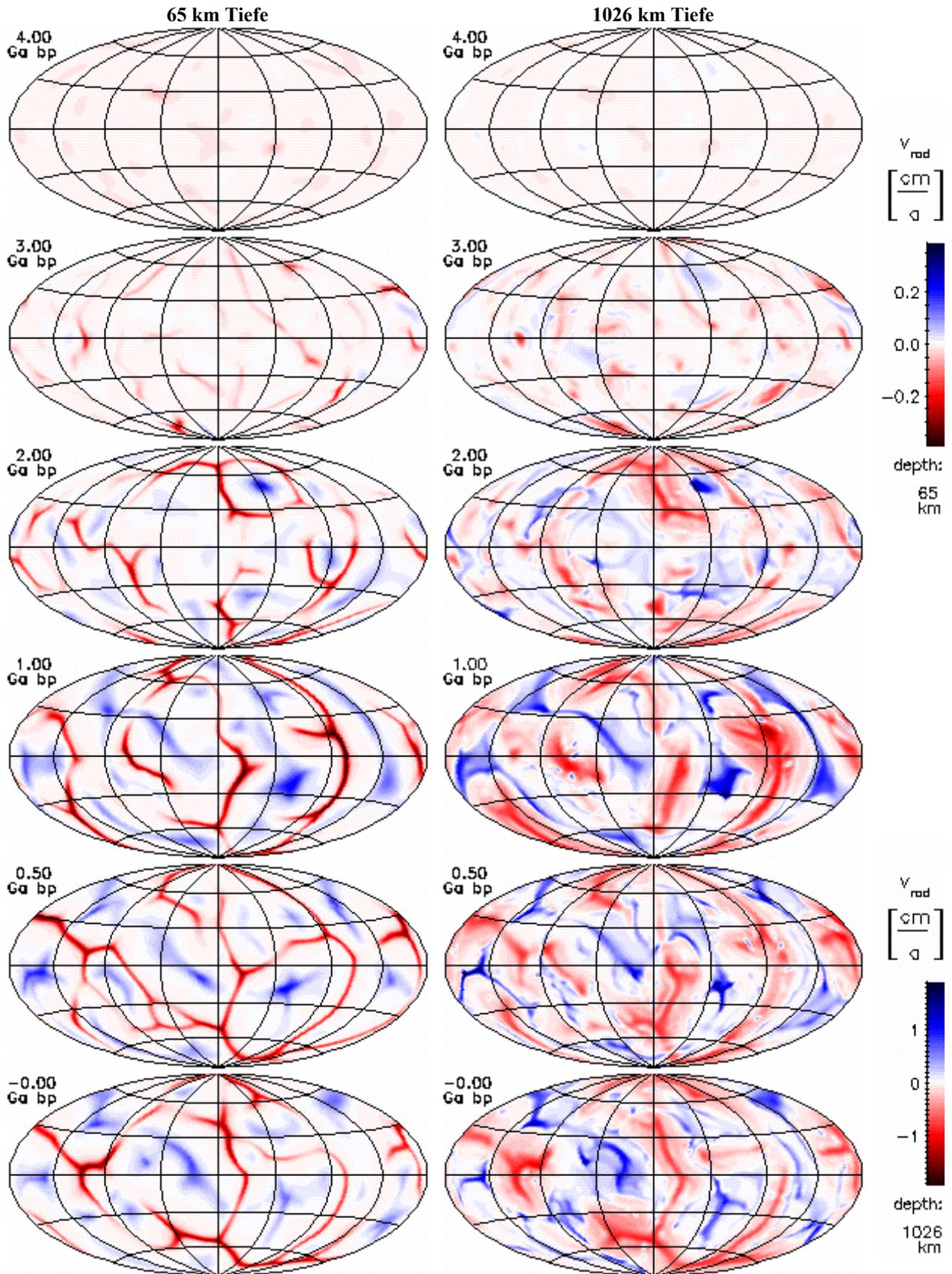


**Abb. 5.7-14:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des unteren Mantels



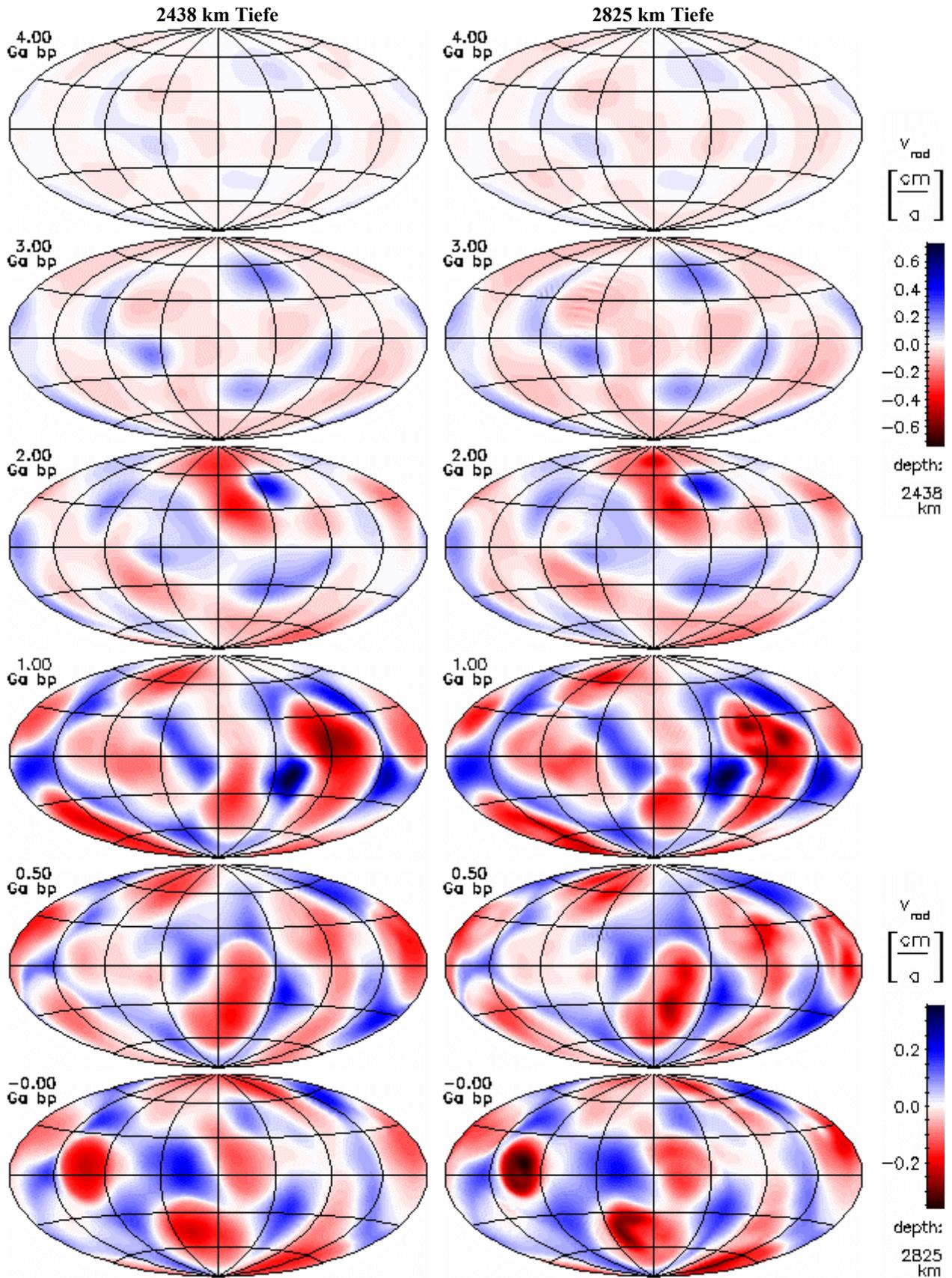
**Abb. 5.7-15:** Zeitliche Entwicklung der Heizleistung durch Zerfall von  $^{40}\text{K}$ ,  $^{42}\text{Th}$ ,  $^{235}\text{U}$  und  $^{238}\text{U}$

## 5.7. Modell 642



**Abb. 5.7-16:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente nahe der Oberfläche und im unteren Mantel. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind eventuell abgeschnitten.

## 5.7. Modell 642



**Abb. 5.7-17:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente im unteren Mantel und nahe der CMB. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind evtl. abgeschnitten.

## 5.7. Modell 642

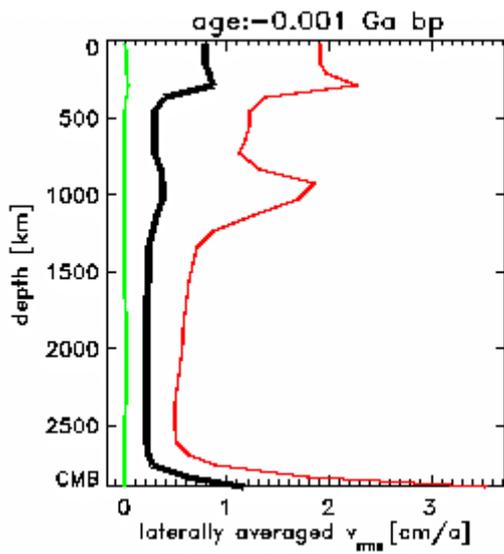


Abb. 5.7-18: Heutiges Geschwindigkeitsprofil

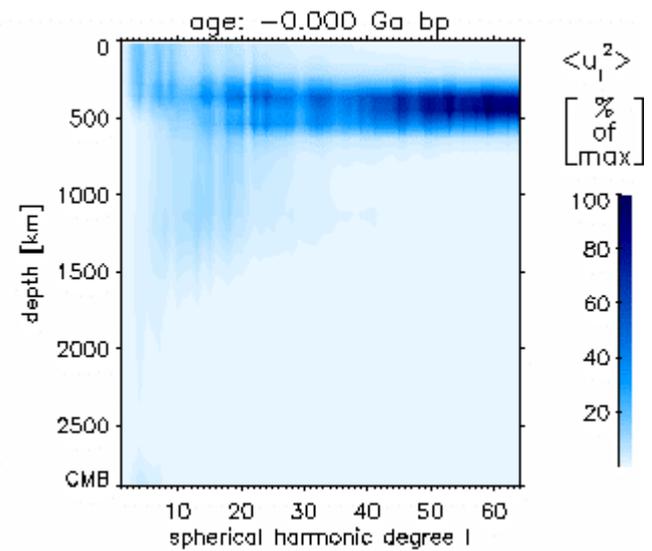


Abb. 5.7-19: Spektrum von toroidaler plus poloidaler kinetischer Energie

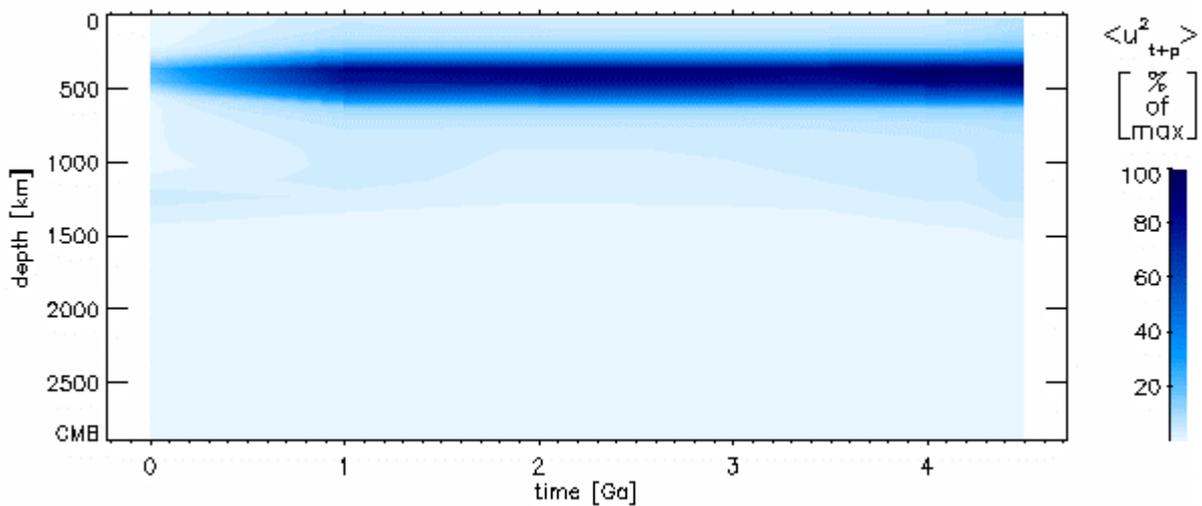


Abb. 5.7-20: Entwicklung der Tiefenverteilung der Summe von poloidaler und toroidaler Energie

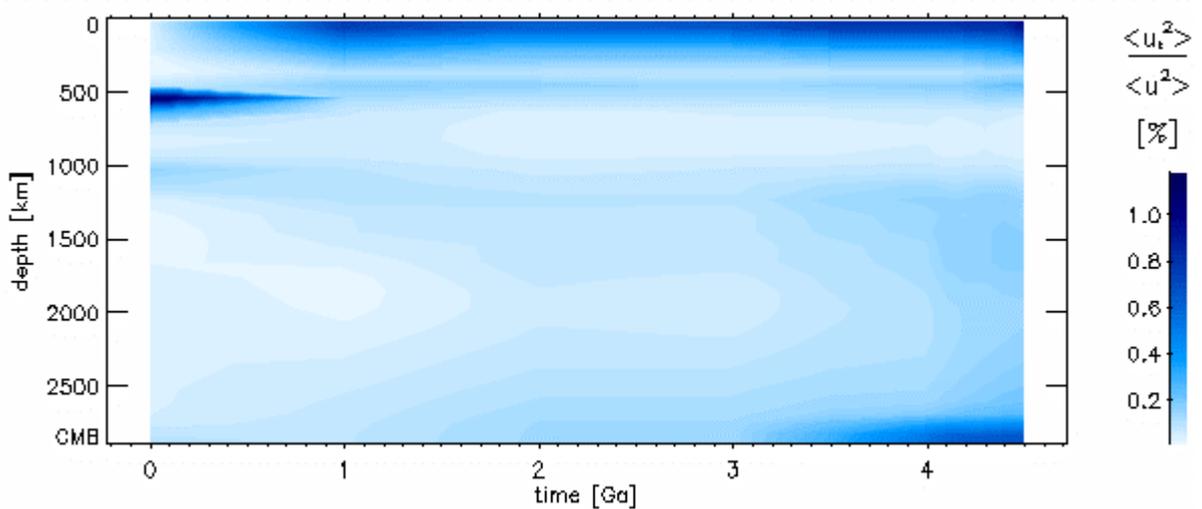
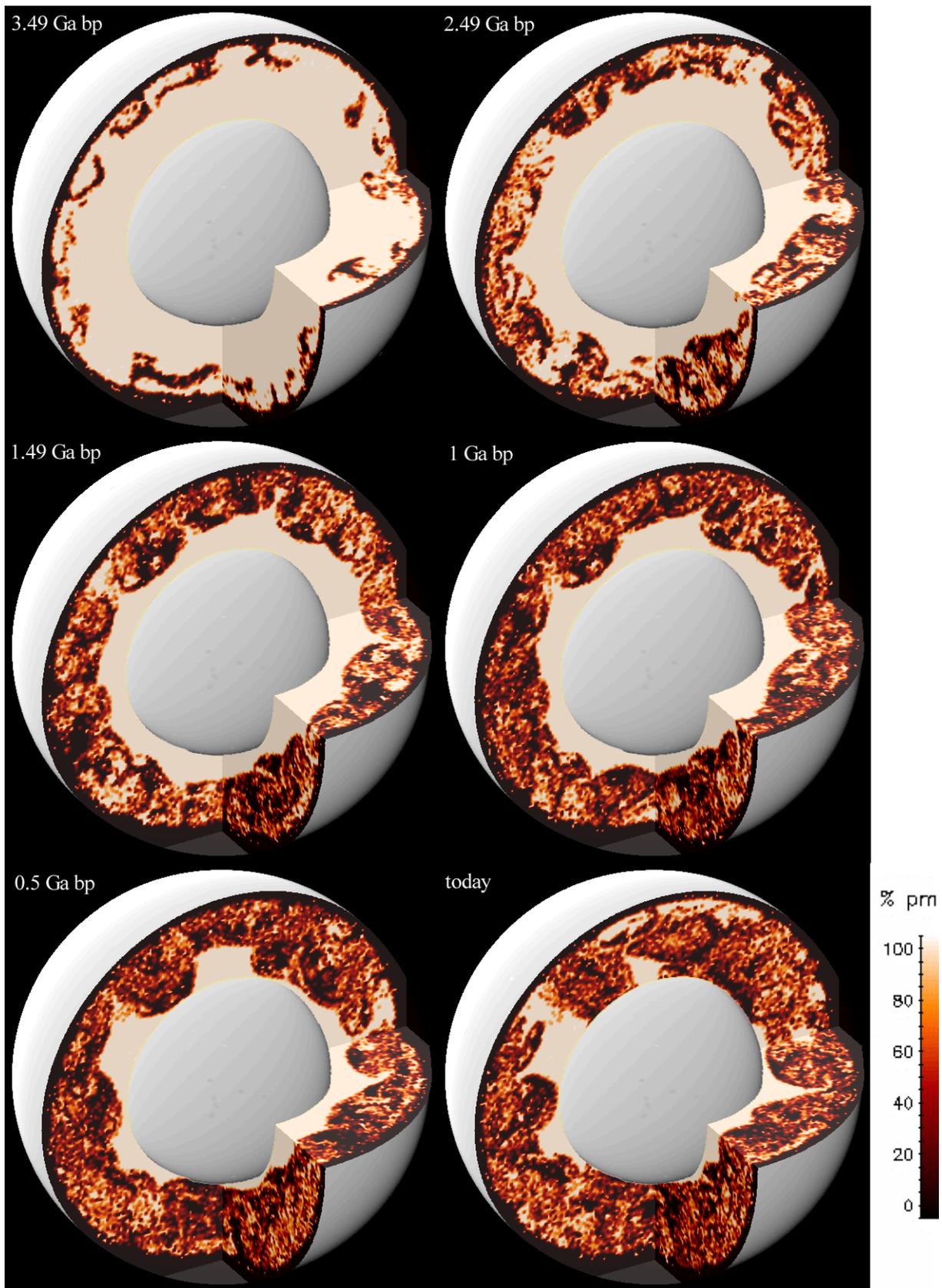


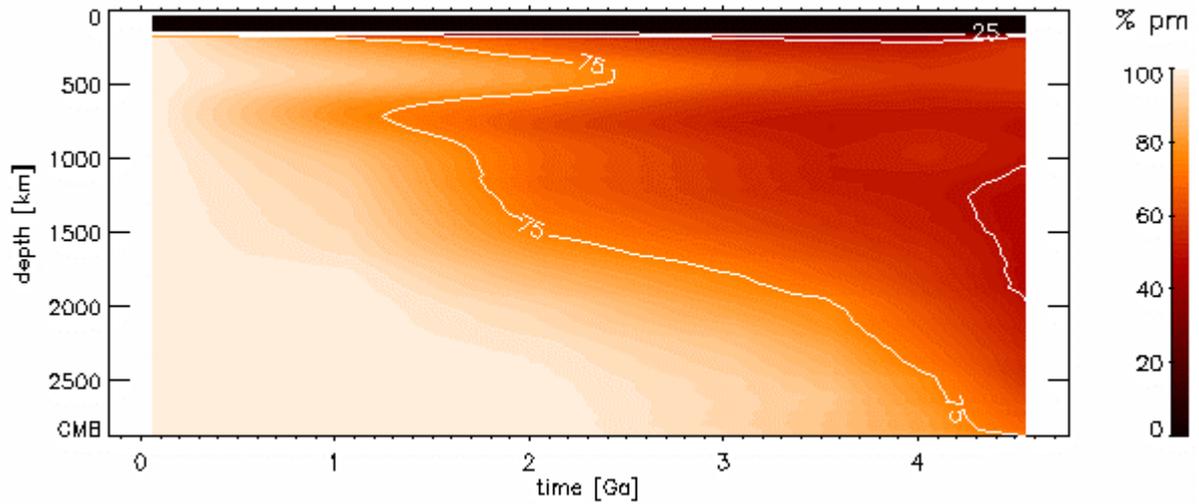
Abb. 5.7-21: Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung des toroidalen Anteils der kinetischen Energie

## 5.7. Modell 642

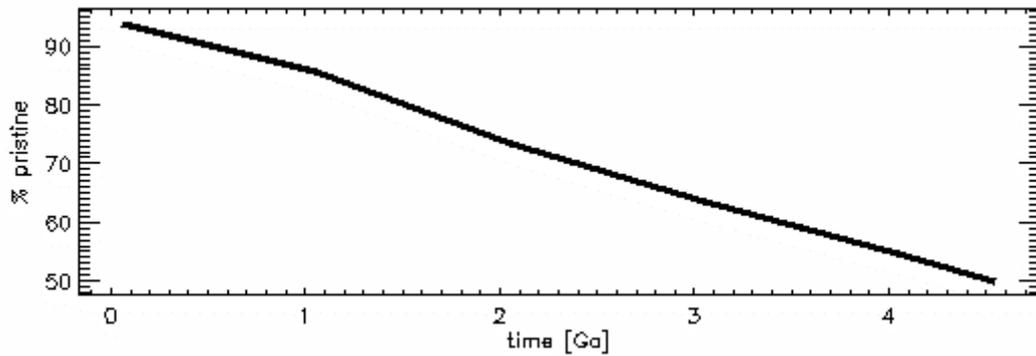


**Abb. 5.7-22:** Verteilung ursprünglichen Materials (pm) zu verschiedenen Zeiten

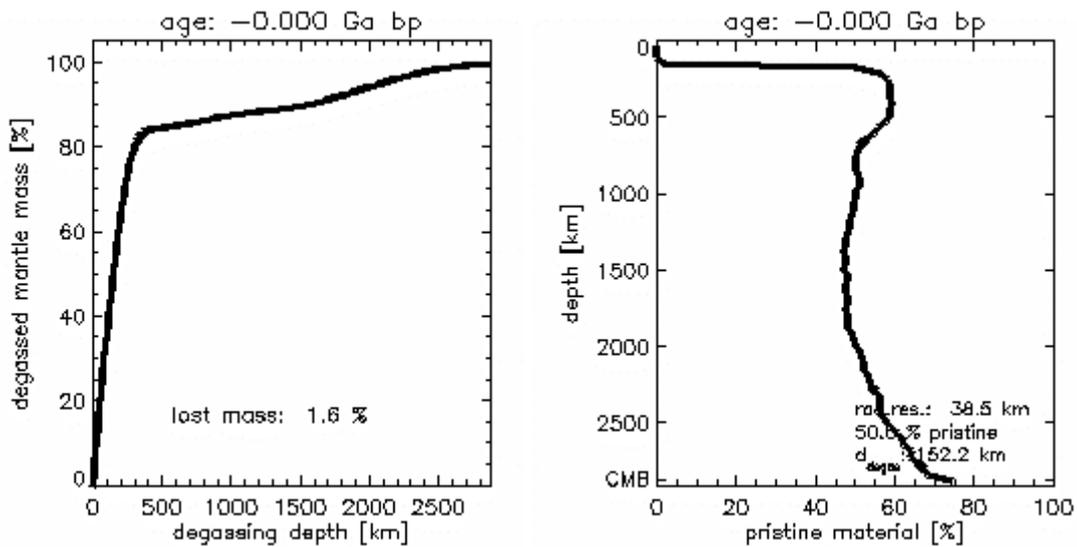
## 5.7. Modell 642



**Abb. 5.7-23:** Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung ursprünglichen Materials



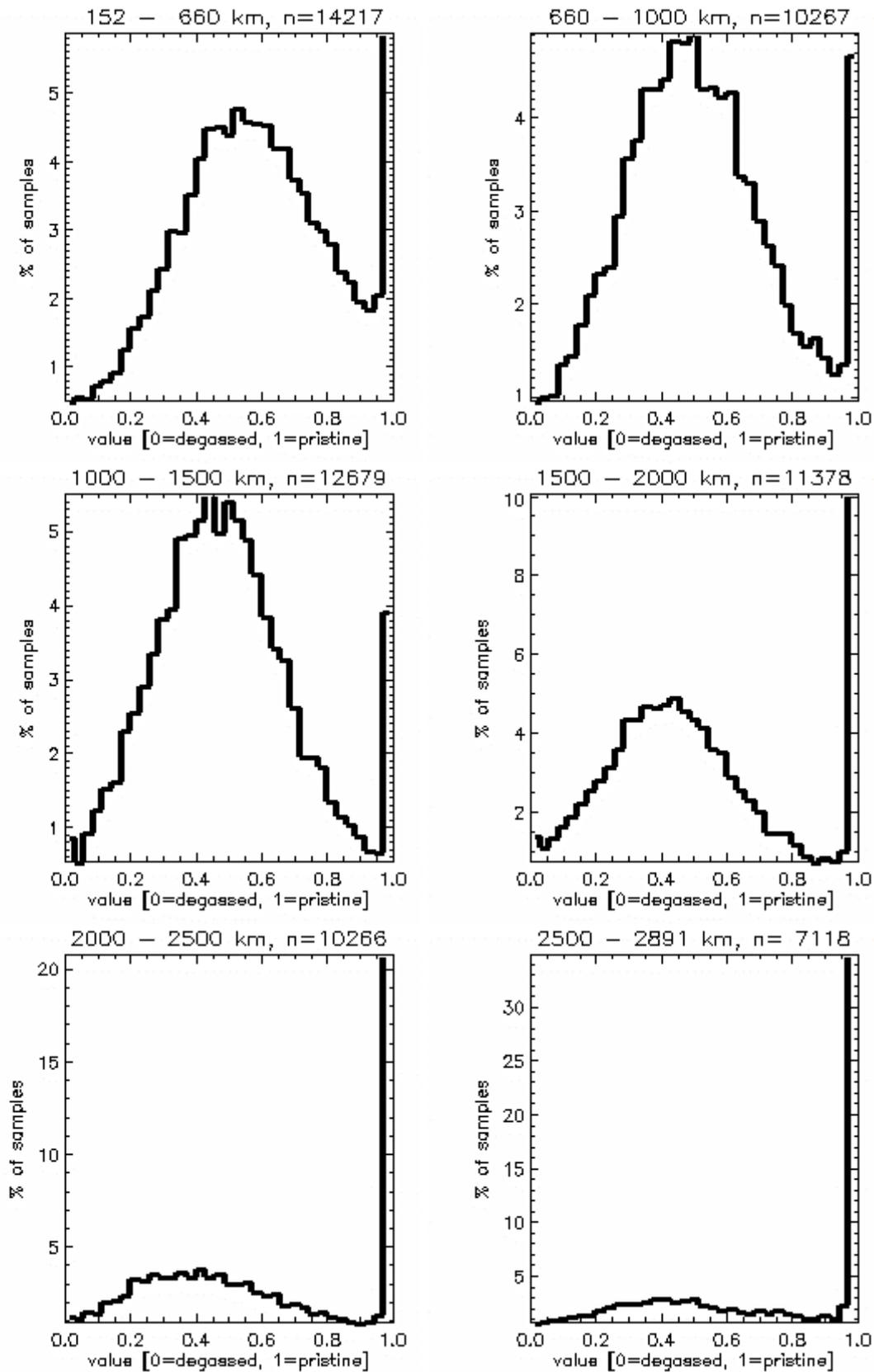
**Abb. 5.7-24:** Abnahme ursprünglichen Materials im Mantel



**Abb. 5.7-25:** Die Entgasungstiefe wird so festgelegt, dass am Ende der Rechnung 50 % des Mantels entgast sind

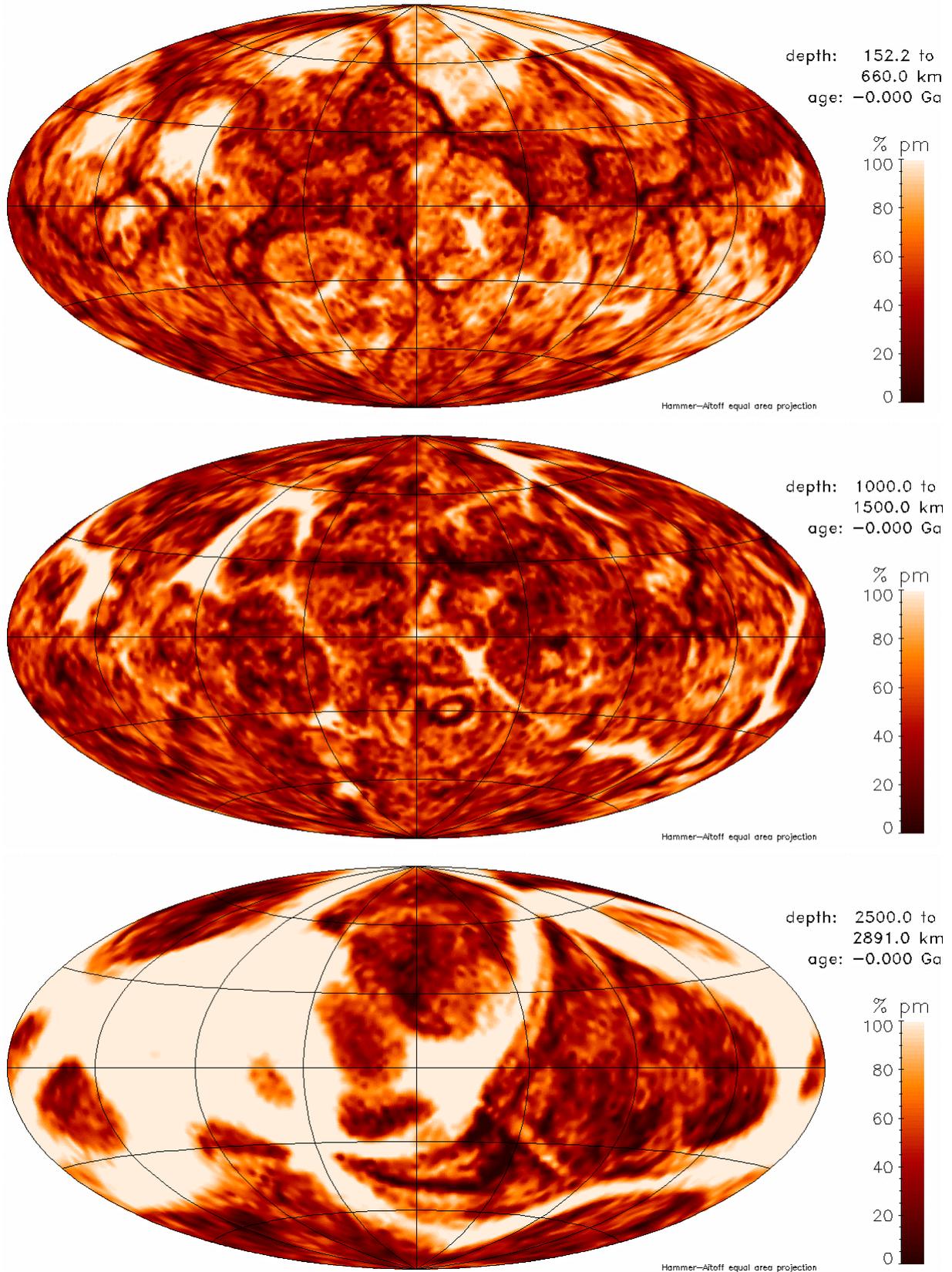
**Abb. 5.7-26:** Tiefenverteilung ursprünglichen Materials im heutigen Mantel

## 5.7. Modell 642



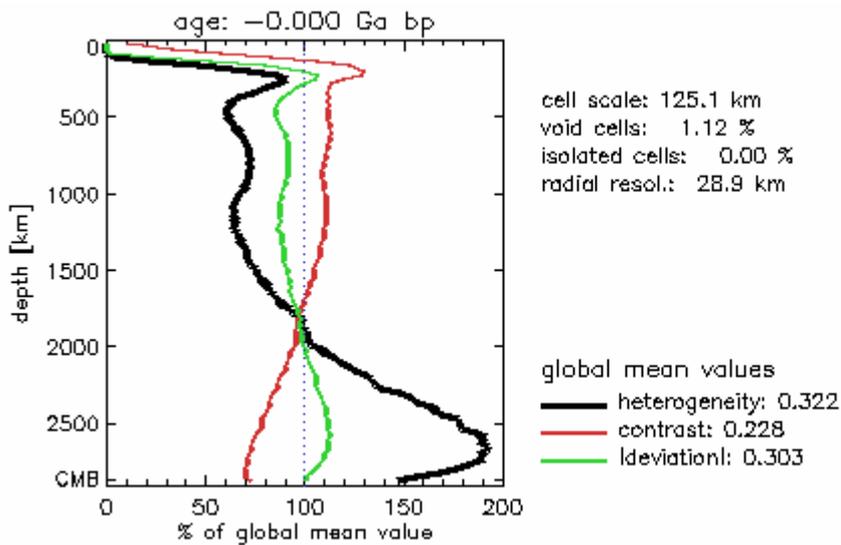
**Abb. 5.7-27:** Histogramme der Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Manteltiefen. Eine Probe repräsentiert den Mittelwert des gesamten radialen Intervalls. n ist die Anzahl der Unterteilungen der Kugelfläche in der jeweiligen Tiefe.

## 5.7. Modell 642

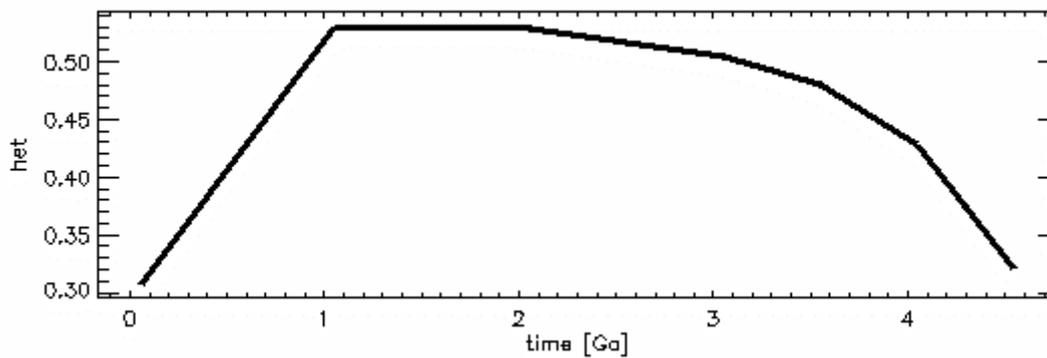


**Abb. 5.7-28:** Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Tiefenintervallen. Die laterale Auflösung entspricht der des jeweils passenden Histogramms in Abb. 5.7-27.

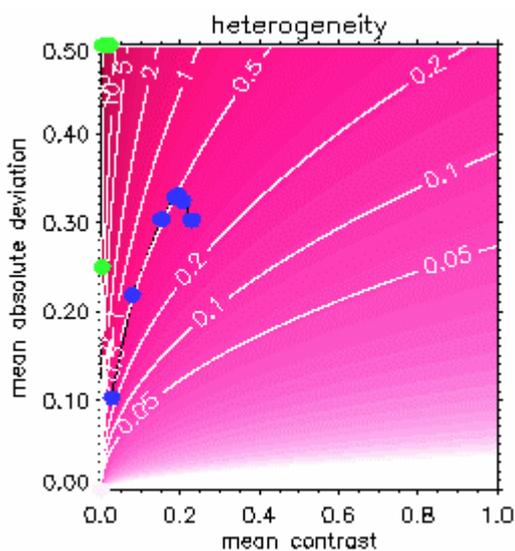
## 5.7. Modell 642



**Abb. 5.7-29:** Heutige Tiefenprofile der lateral gemittelten Werte von Heterogenität, Kontrast und mittlerer Absolutabweichung. Sie werden mit dem Mittelwert in der jeweiligen Kugelschale berechnet. Der globale Wert dient nur Skalierung der Abszisse.



**Abb. 5.7-30:** Zeitliche Entwicklung der Heterogenität

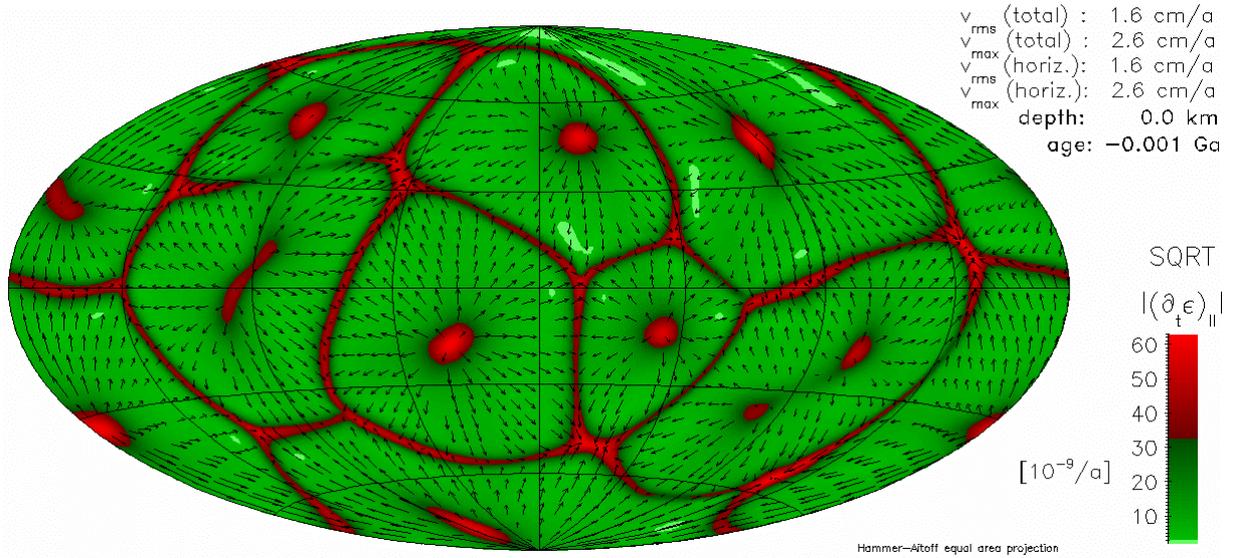


**Abb. 5.7-31:** Entwicklung der globalen Mittelwerte von Heterogenität, mittlerer Absolutabweichung und Kontrast.

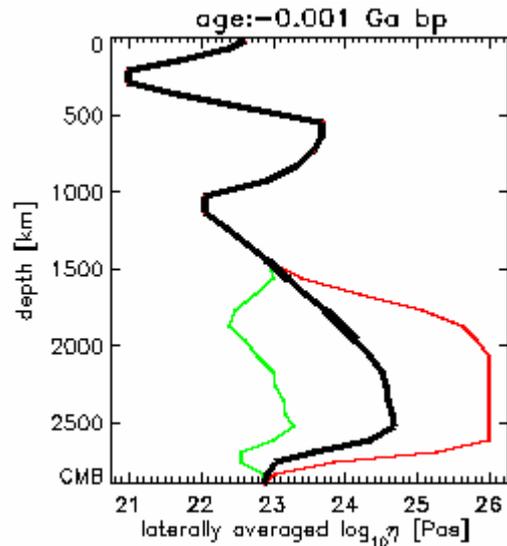
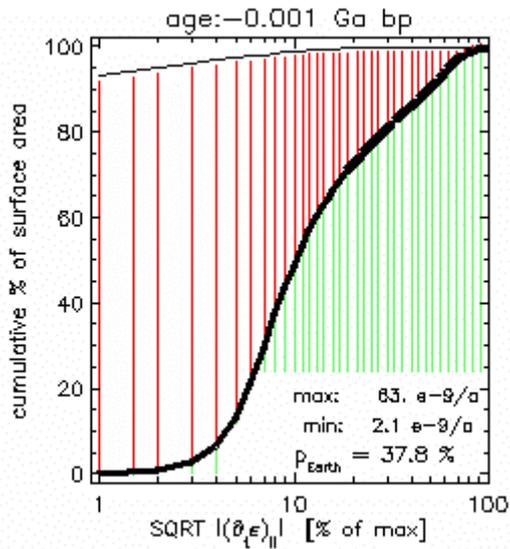
Jeder blaue Punkt entspricht einem ausgewerteten Zeitschritt. Die schwarze Verbindungslinie folgt der zeitlichen Entwicklung. Der älteste Zeitschritt liegt näher am Koordinatenursprung als die jüngeren. Die grünen Punkte markieren die Lage der in Kapitel 4.2.3 vorgestellten Referenzmodelle. Die rötliche Farbkodierung mit Höhenlinien stellt den Wert der Heterogenität dar.

## 5.8. Modell 647

### 5.8. Modell 647

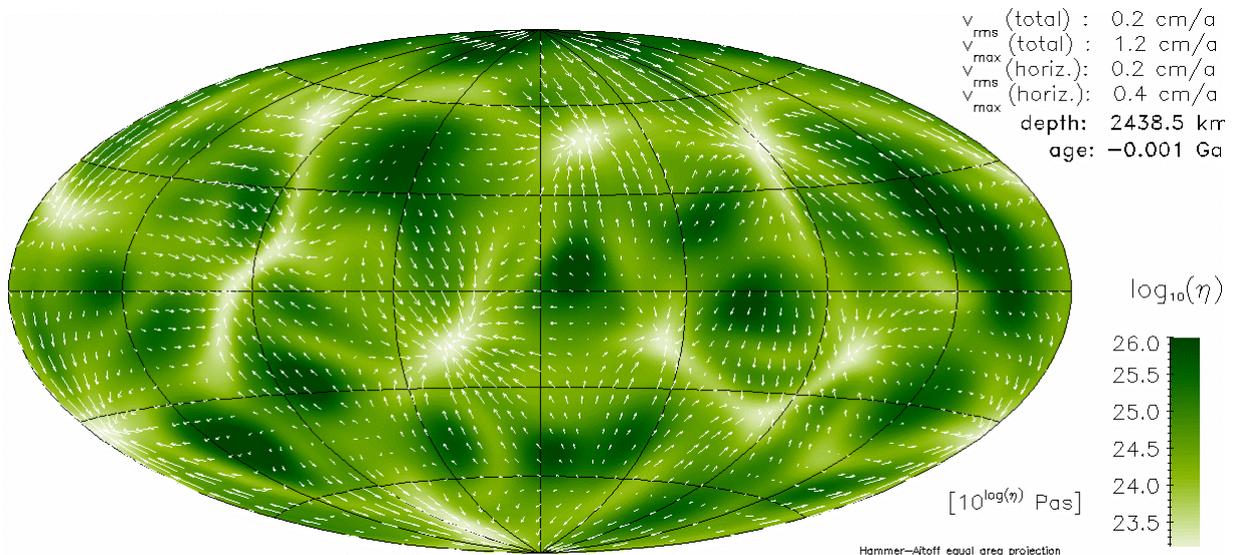


**Abb. 5.8-25:** Wurzel des Betrages der zweiten Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors



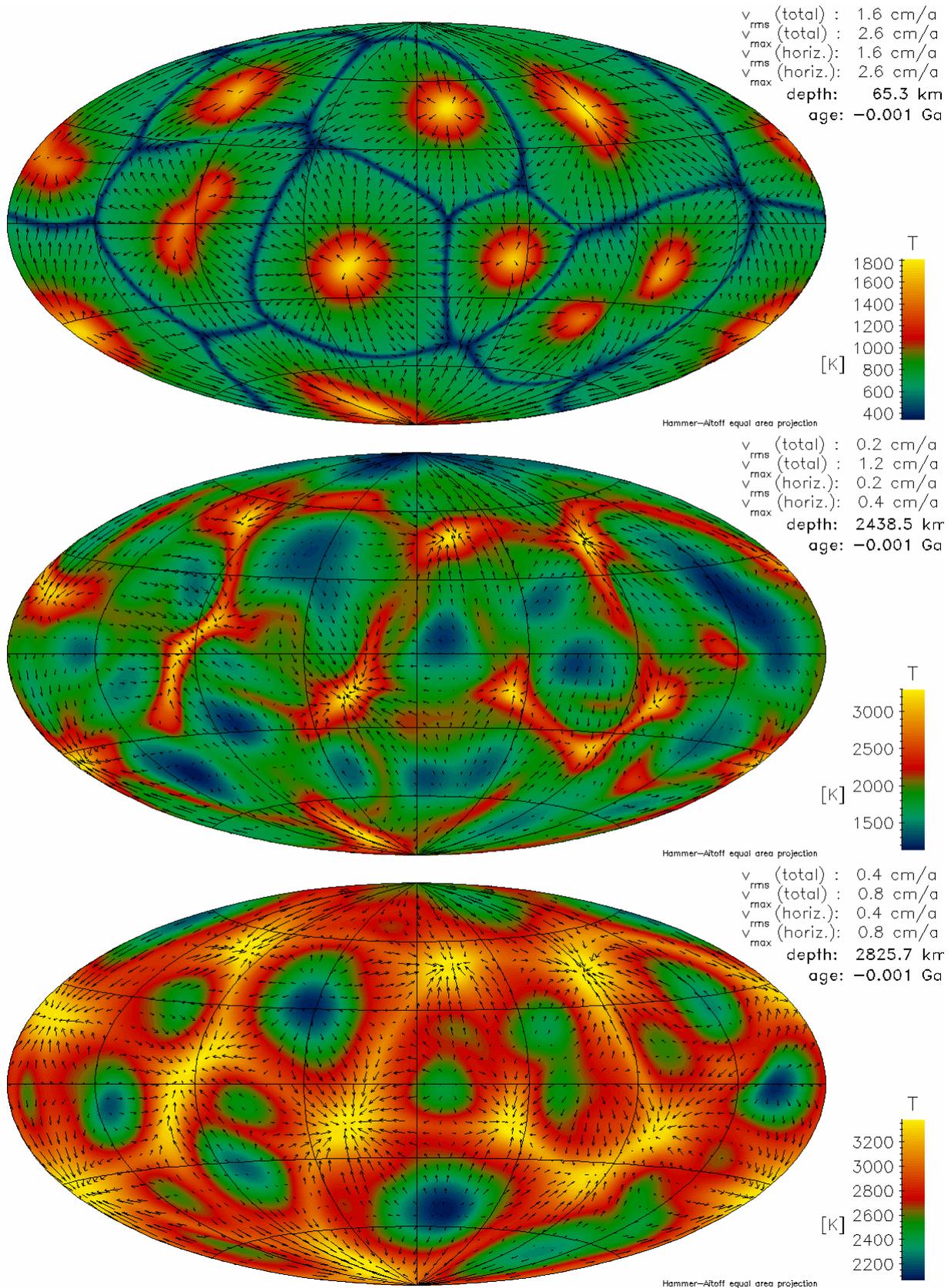
**Abb. 5.8-26:** Plattigkeit an der Oberfläche

**Abb. 5.8-27:** Viskositätsprofil



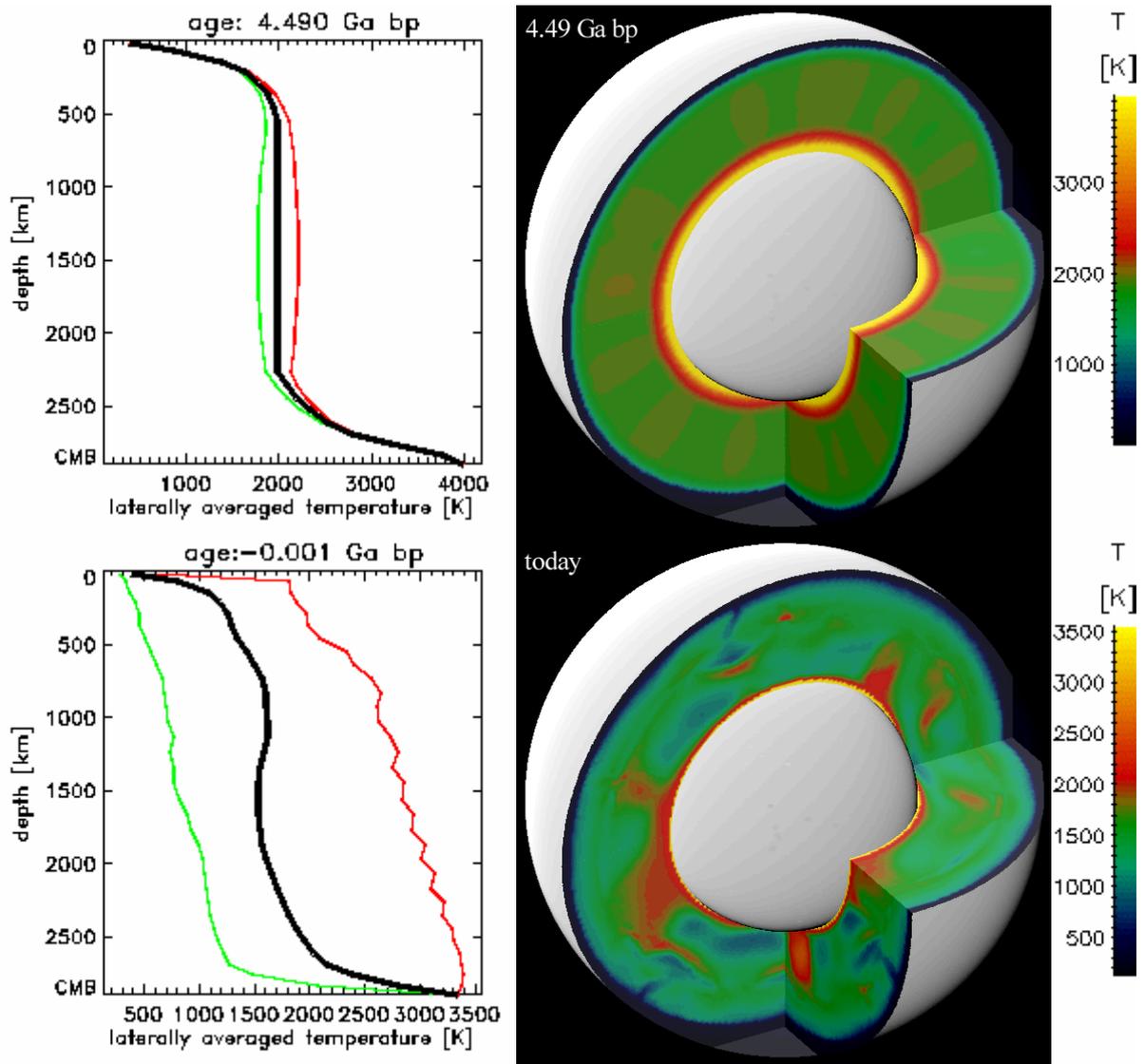
**Abb. 5.8-28:** Viskosität im hochviskosen Teil des unteren Mantels

## 5.8. Modell 647

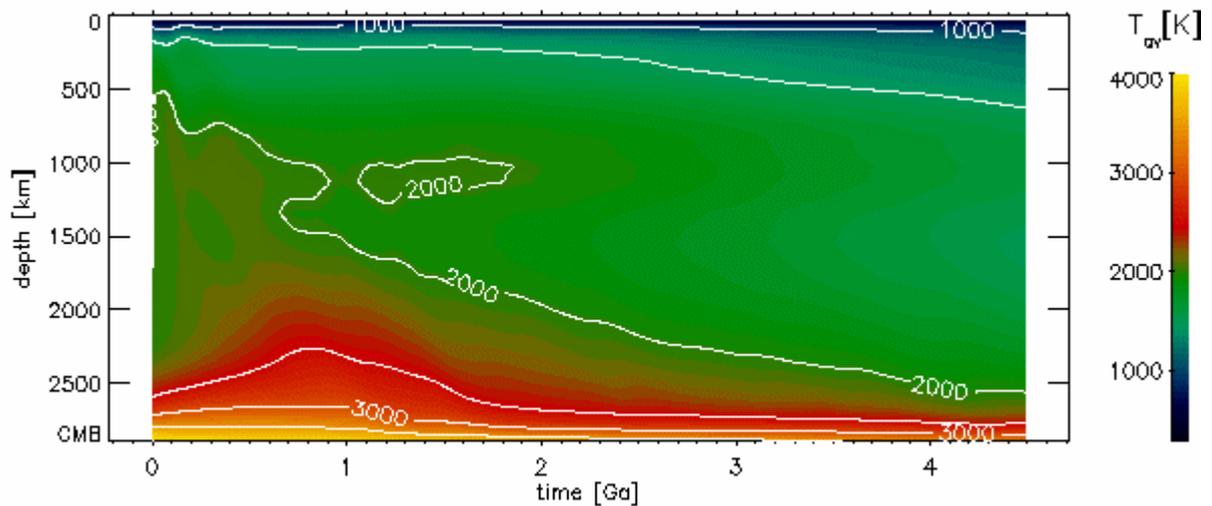


**Abb. 5.8-5:** Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten nahe der Oberfläche, im unteren Mantel und nahe der Kern-Mantel-Grenze

## 5.8. Modell 647

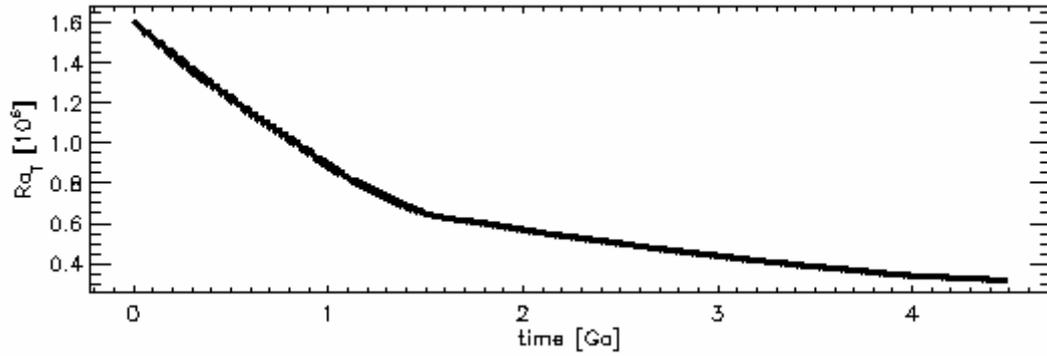


**Abb. 5.8-6:** Temperaturverteilung im Mantel am Anfang der Rechnung und heute

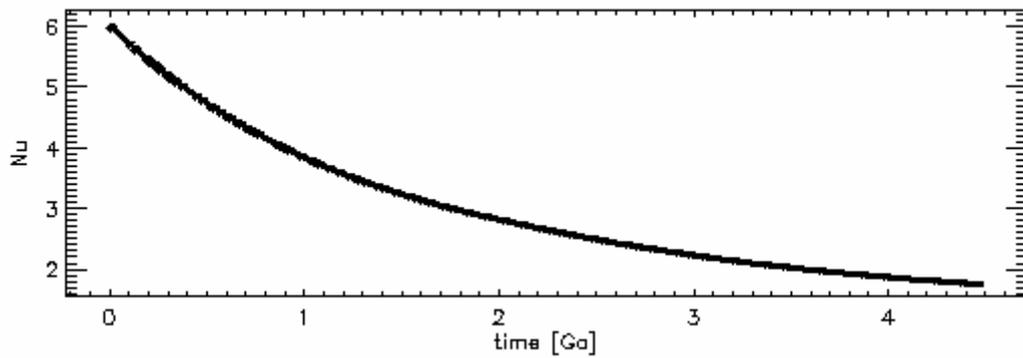


**Abb. 5.8-7:** Zeitliche Entwicklung des Temperaturprofils

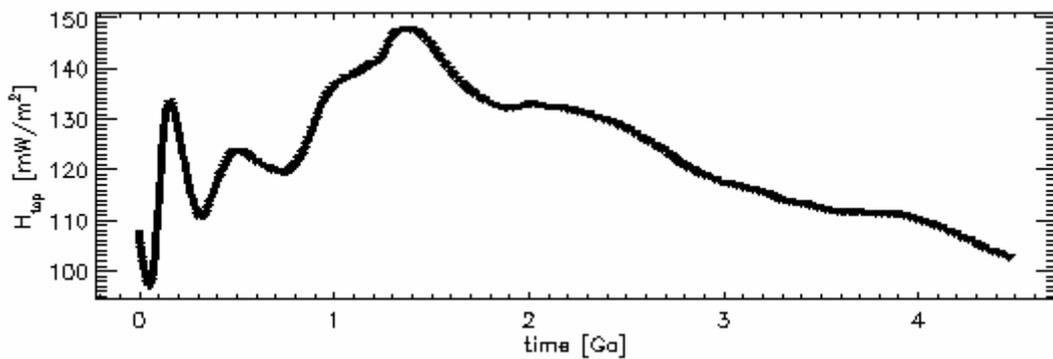
## 5.8. Modell 647



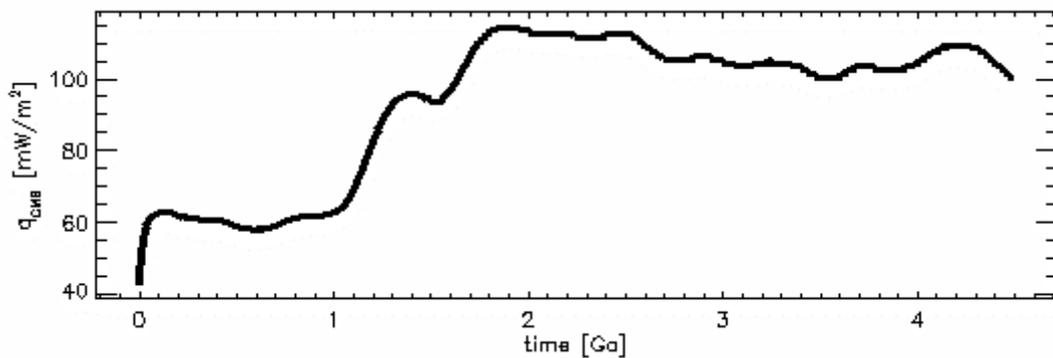
**Abb. 5.8-8:** Zeitliche Entwicklung der Rayleigh-Zahl



**Abb. 5.8-9:** Zeitliche Entwicklung der Nusselt-Zahl

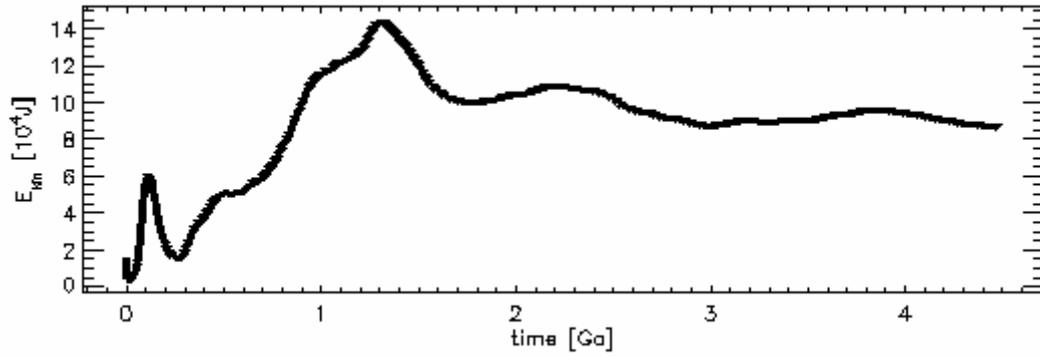


**Abb. 5.8-10:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Oberfläche

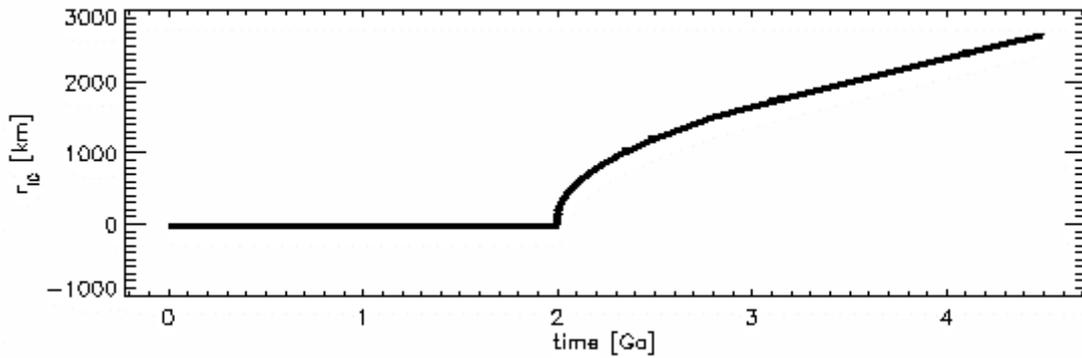


**Abb. 5.8-11:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Kern-Mantel-Grenze

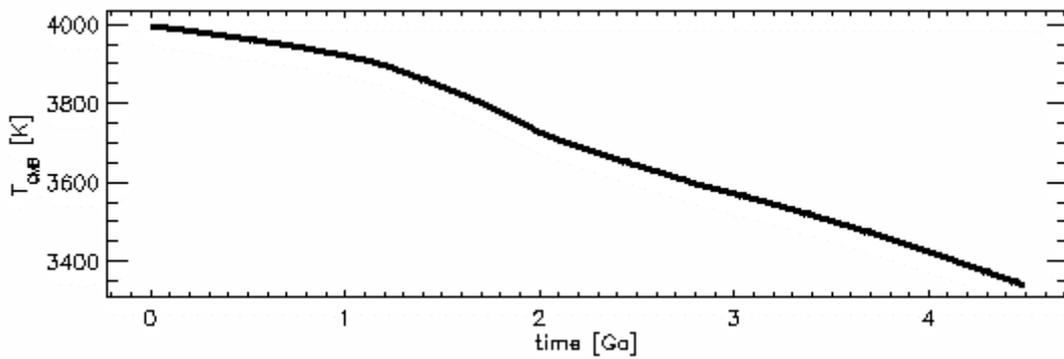
## 5.8. Modell 647



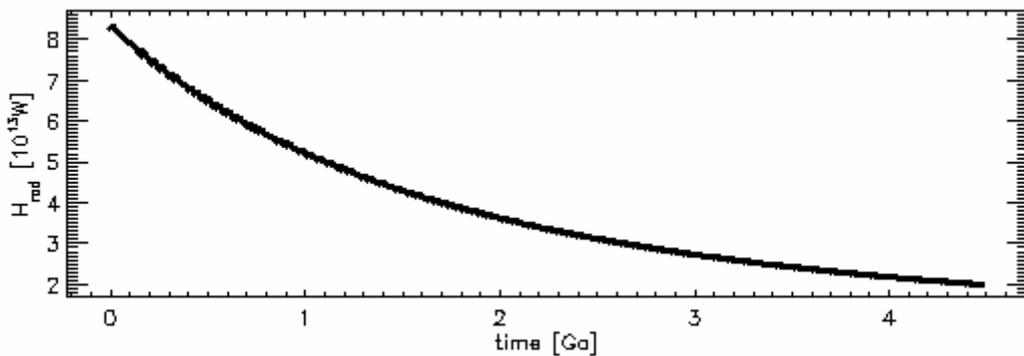
**Abb. 5.8-12:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des gesamten Mantels



**Abb. 5.8-13:** Zeitliche Entwicklung des Innenkernradius

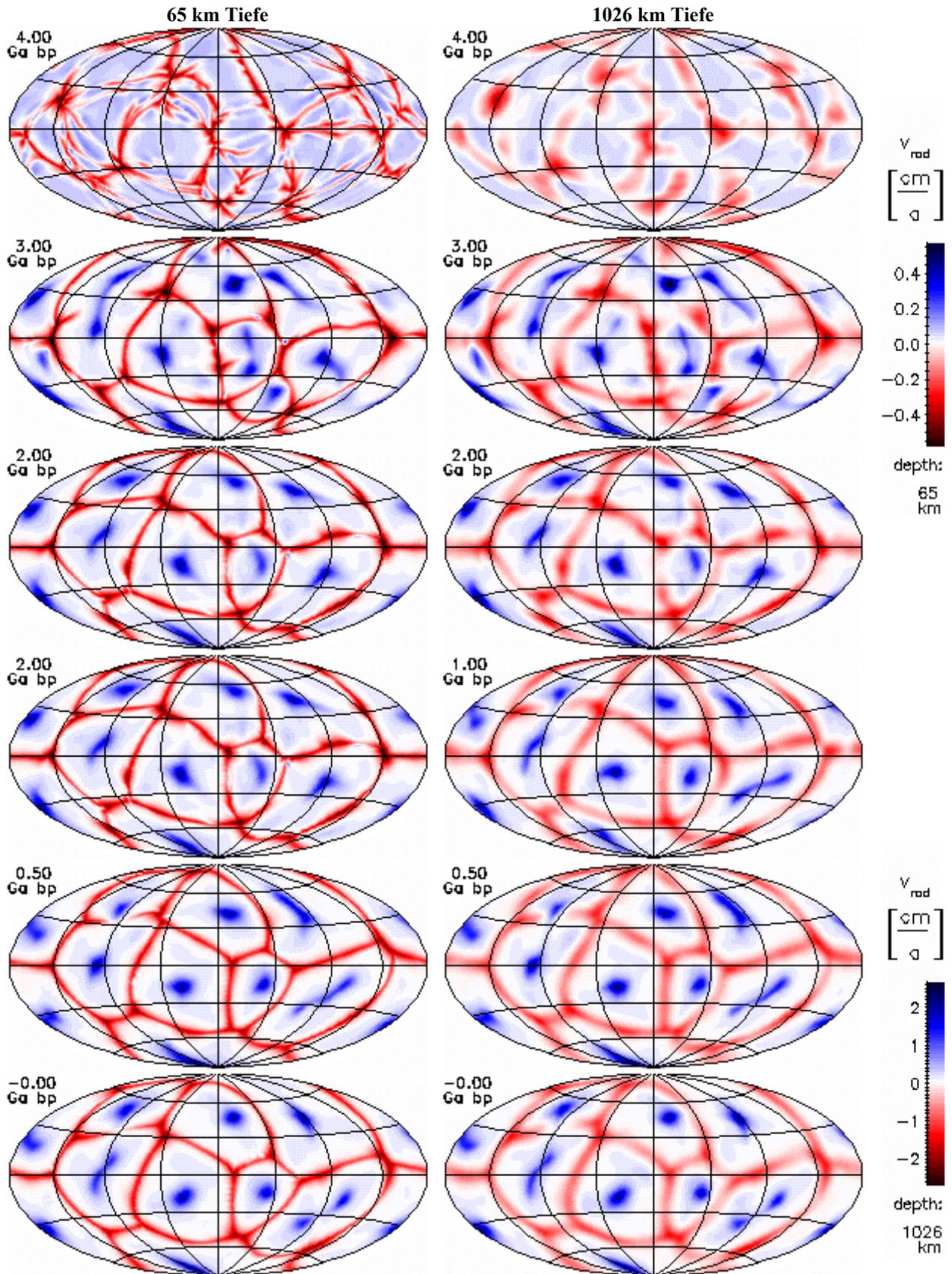


**Abb. 5.8-14:** Zeitliche Entwicklung der Temperatur an der CMB



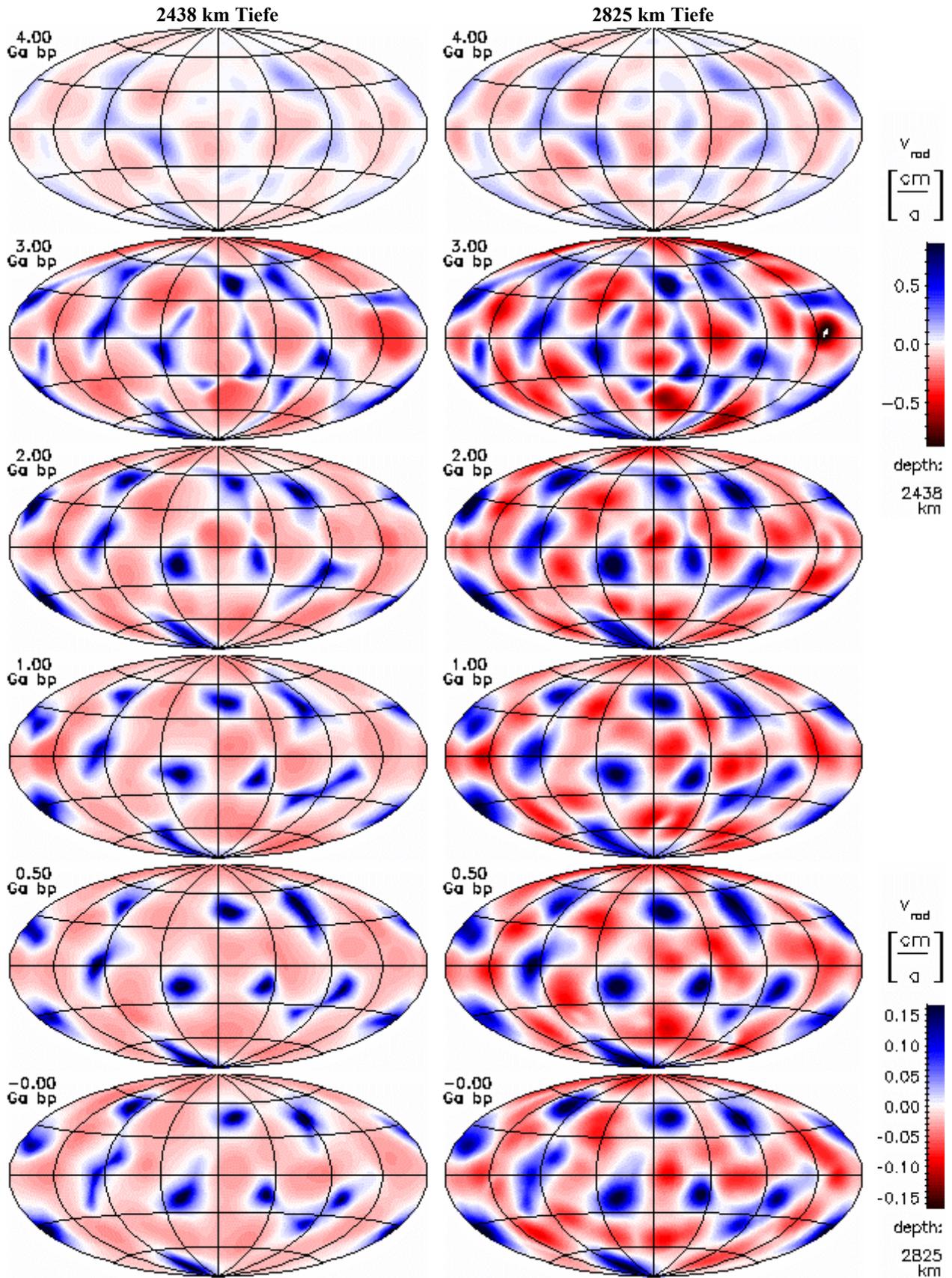
**Abb. 5.8-15:** Zeitliche Entwicklung der Heizleistung durch Zerfall von  $^{40}K$ ,  $^{42}Th$ ,  $^{235}U$  und  $^{238}U$

## 5.8. Modell 647



**Abb. 5.8-16:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente nahe der Oberfläche und im unteren Mantel. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff.

## 5.8. Modell 647



**Abb. 5.8-17:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente im unteren Mantel und nahe der CMB. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff.

## 5.8. Modell 647

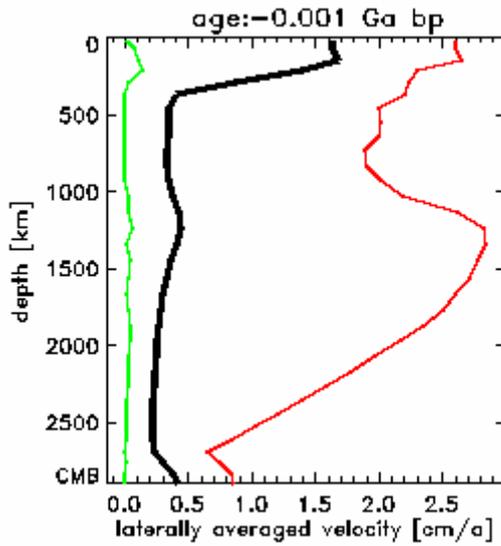


Abb. 5.8-18: Heutiges Geschwindigkeitsprofil

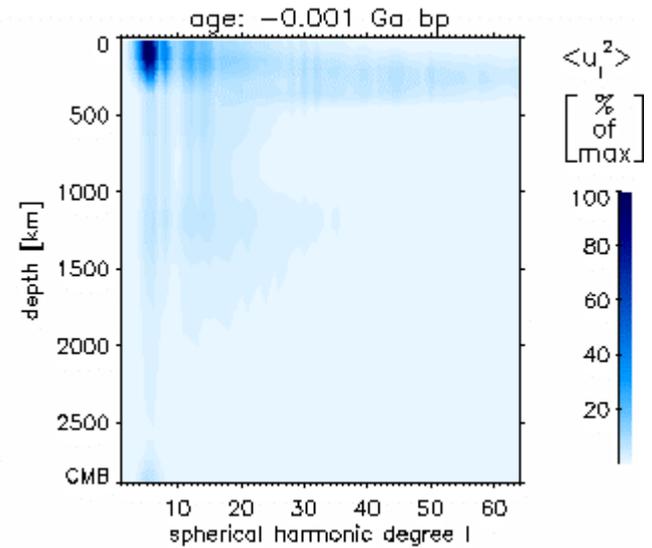


Abb. 5.8-19: Spektrum von toroidaler plus poloidaler kinetischer Energie

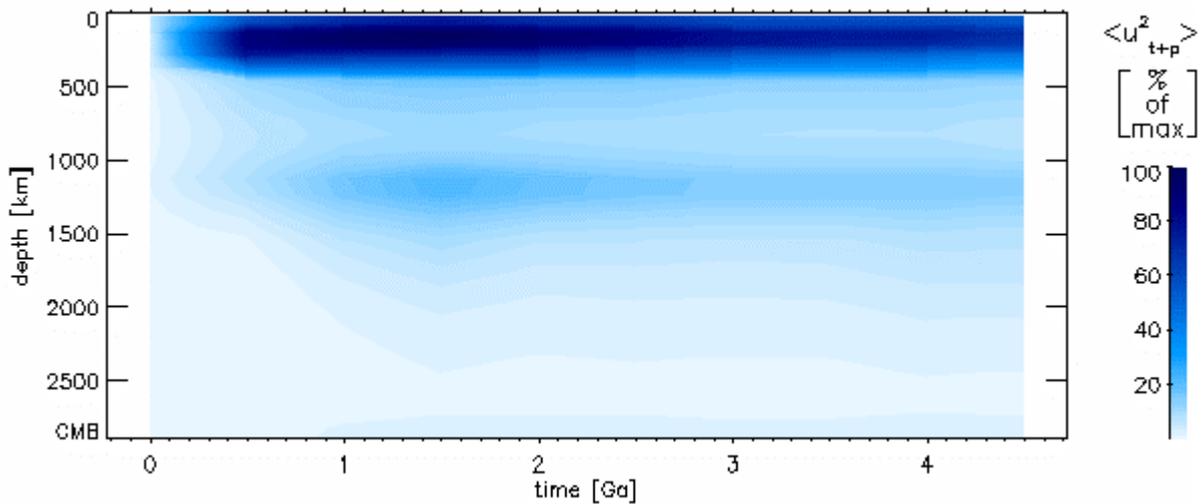


Abb. 5.8-20: Entwicklung der Tiefenverteilung der Summe von poloidaler und toroidaler Energie

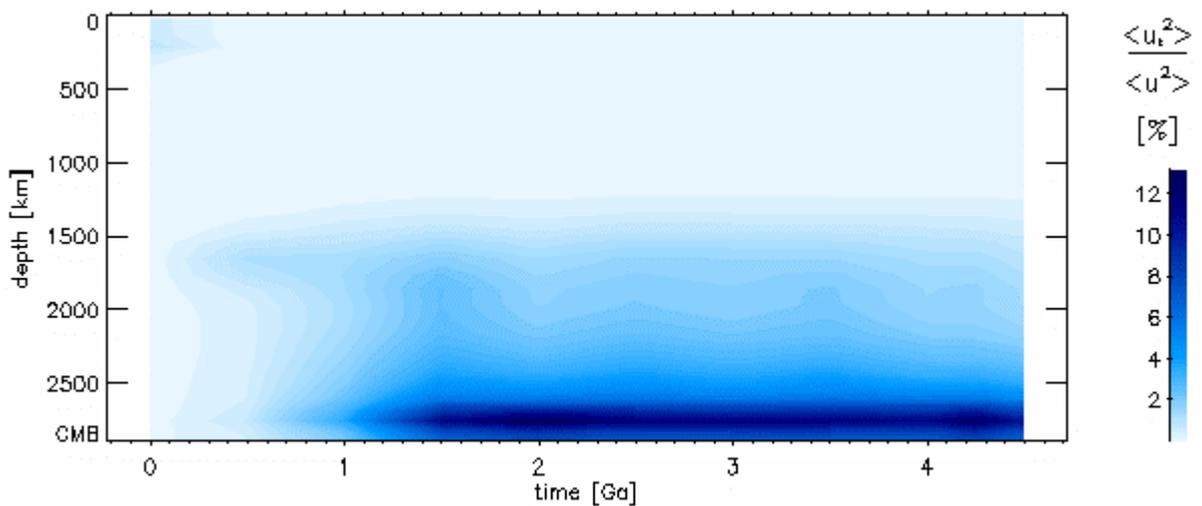
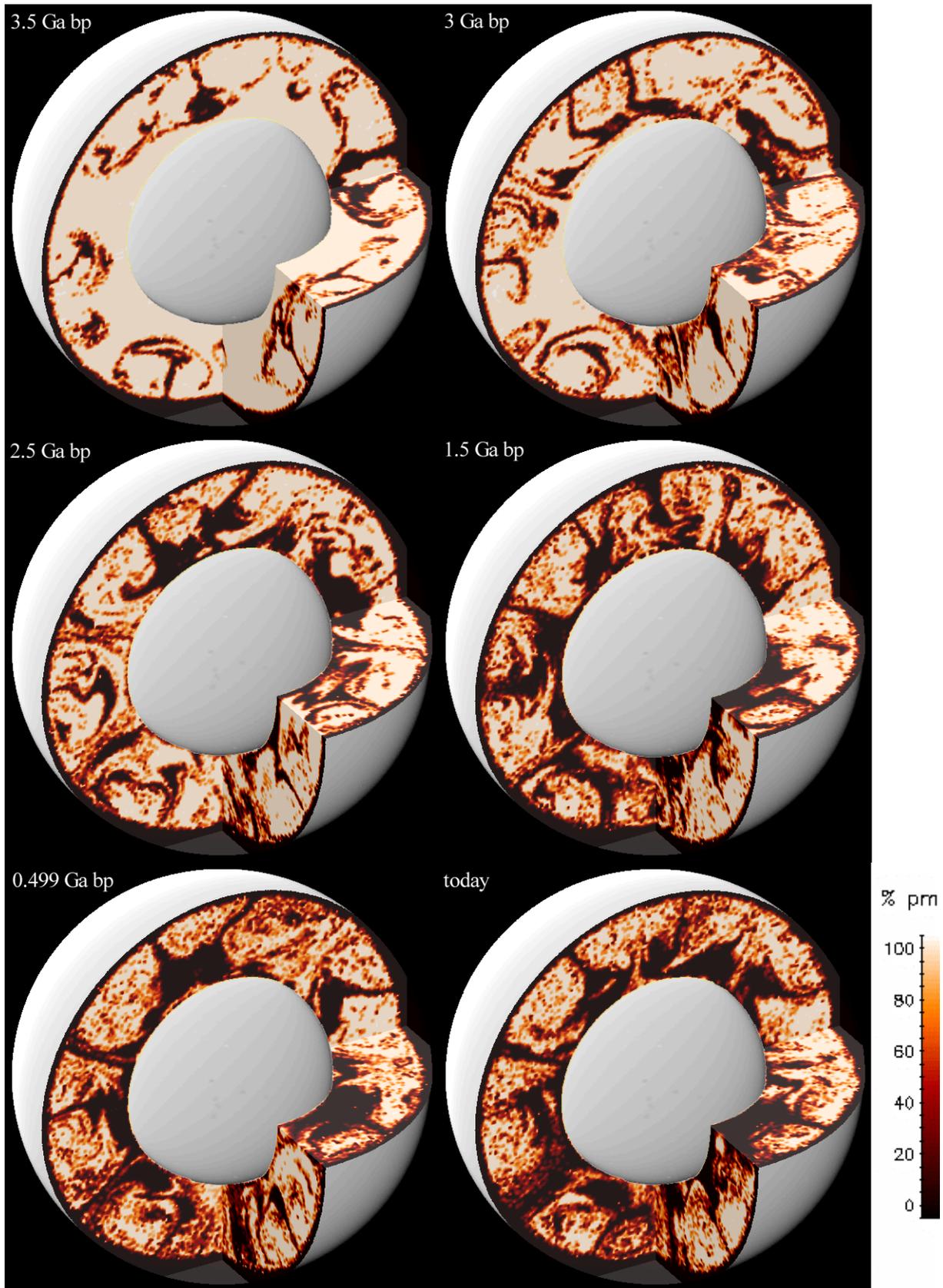


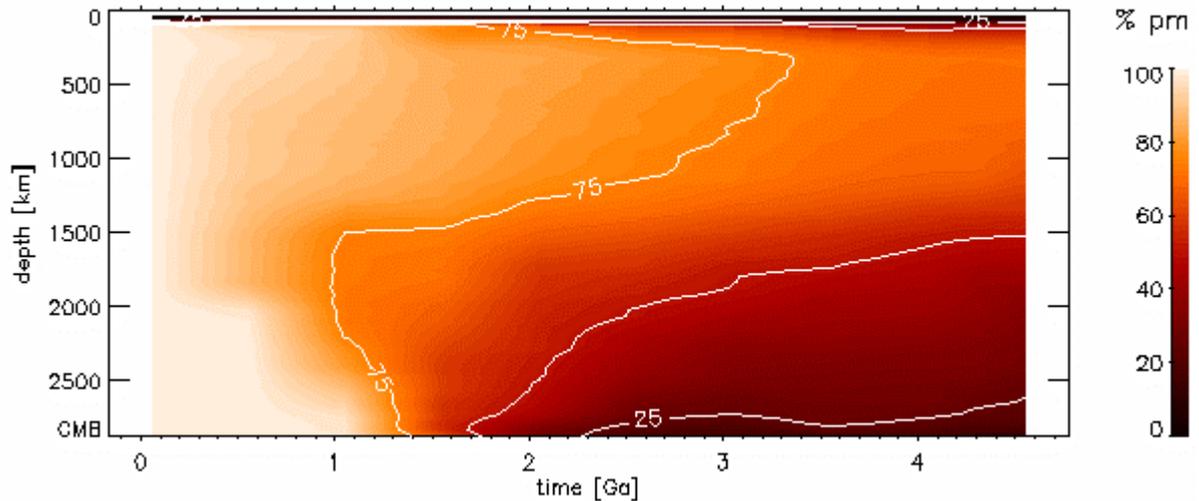
Abb. 5.8-21: Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung des toroidalen Anteils

## 5.8. Modell 647

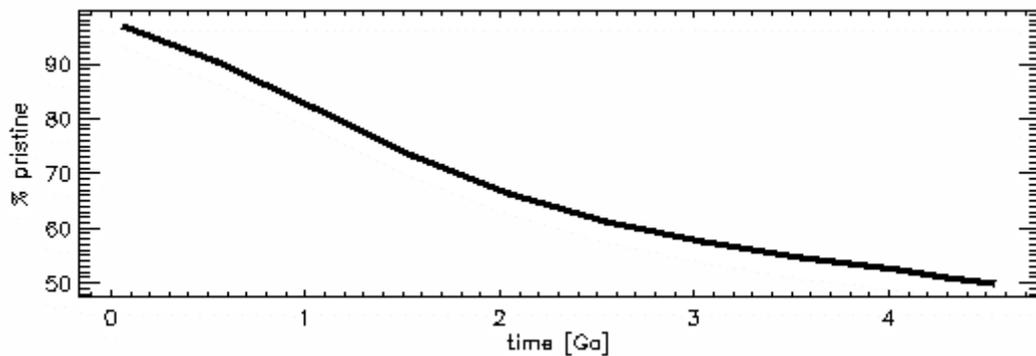


**Abb. 5.8-22:** Verteilung ursprünglichen Materials (pm) zu verschiedenen Zeiten

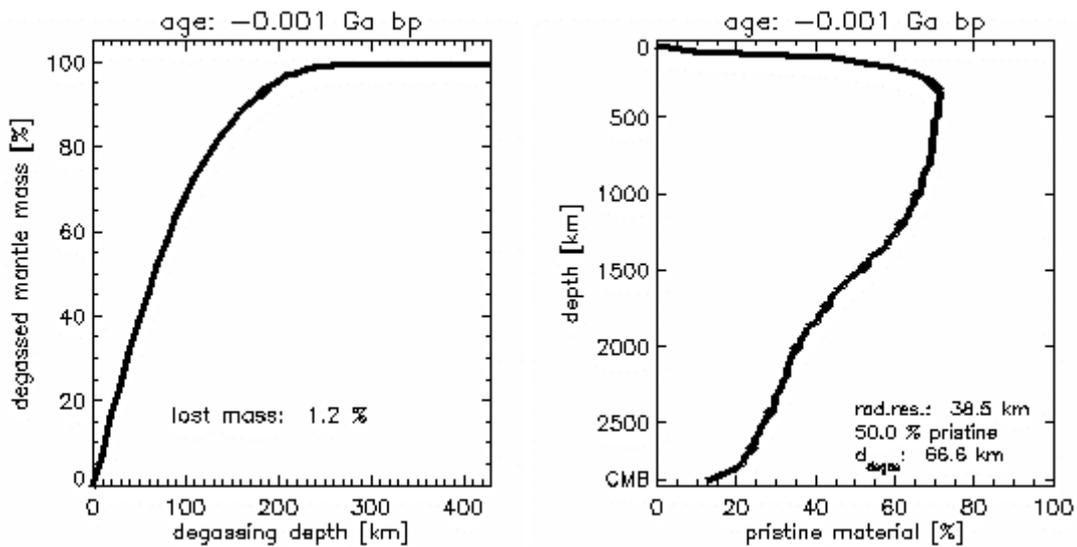
## 5.8. Modell 647



**Abb. 5.8-23:** Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung ursprünglichen Materials



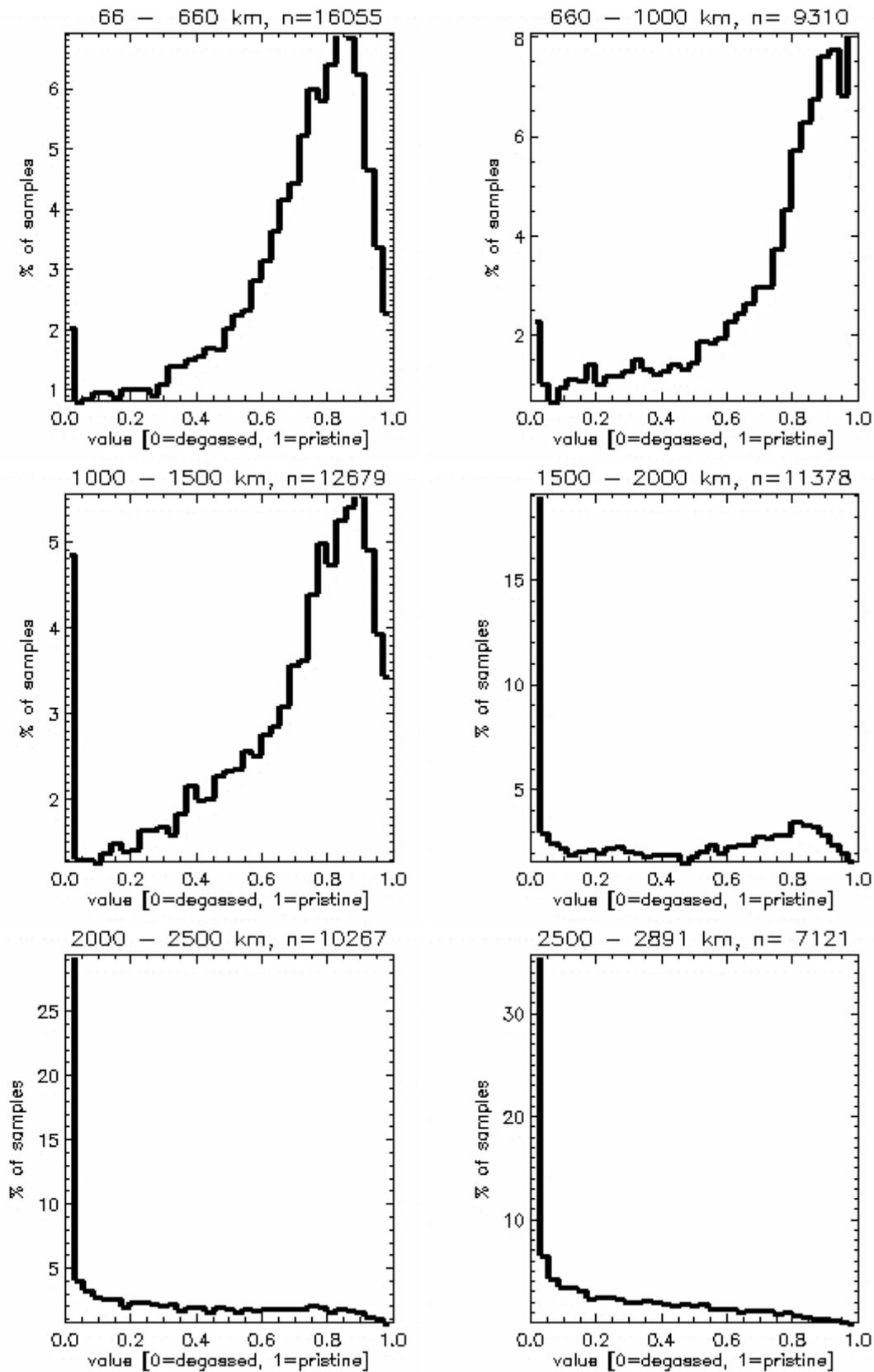
**Abb. 5.8-24:** Abnahme ursprünglichen Materials im Mantel



**Abb. 5.8-25:** Die Entgasungstiefe wird so festgelegt, dass am Ende der Rechnung 50 % des Mantels entgast sind

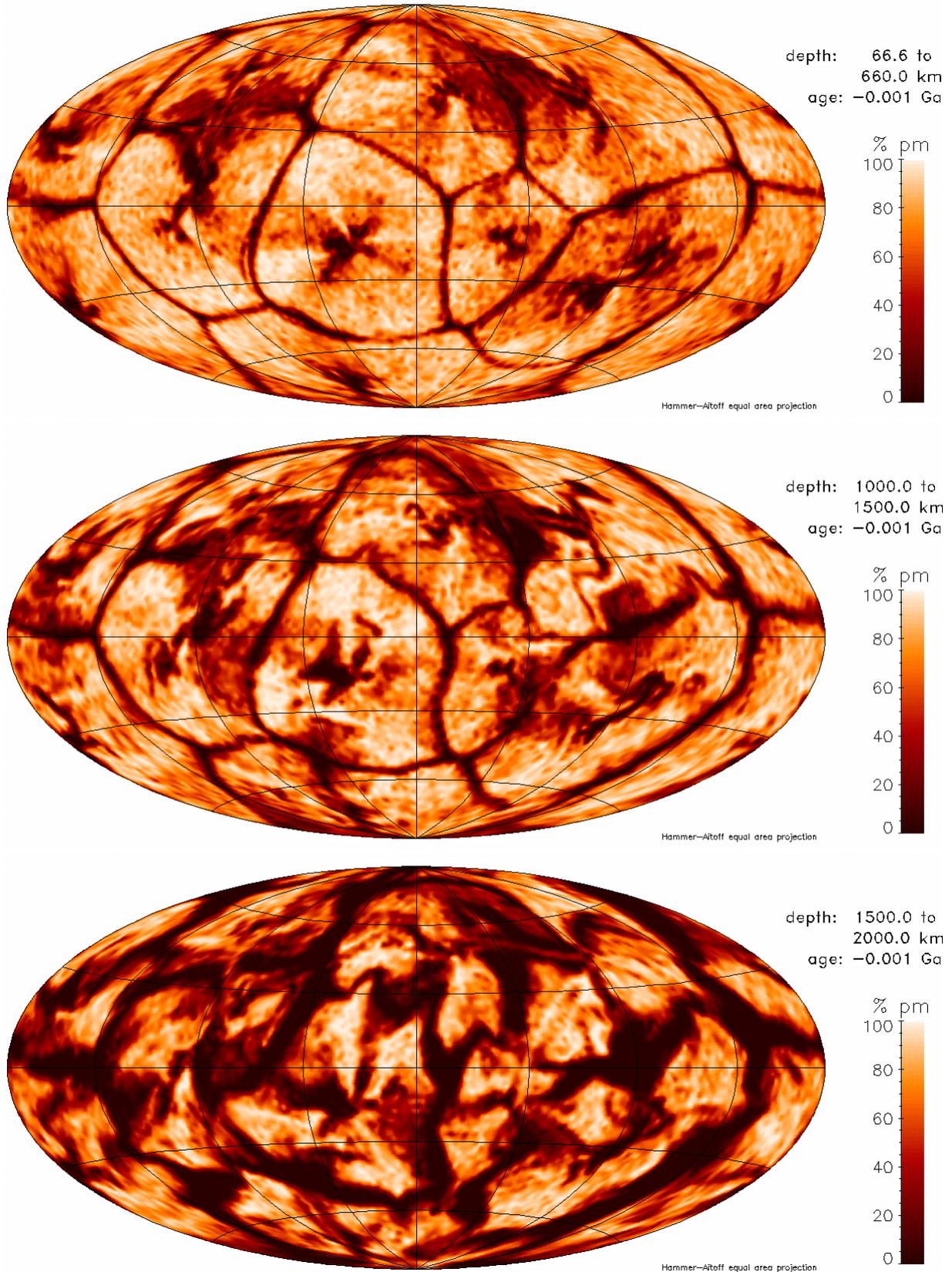
**Abb. 5.8-26:** Tiefenverteilung ursprünglichen Materials im heutigen Mantel

## 5.8. Modell 647



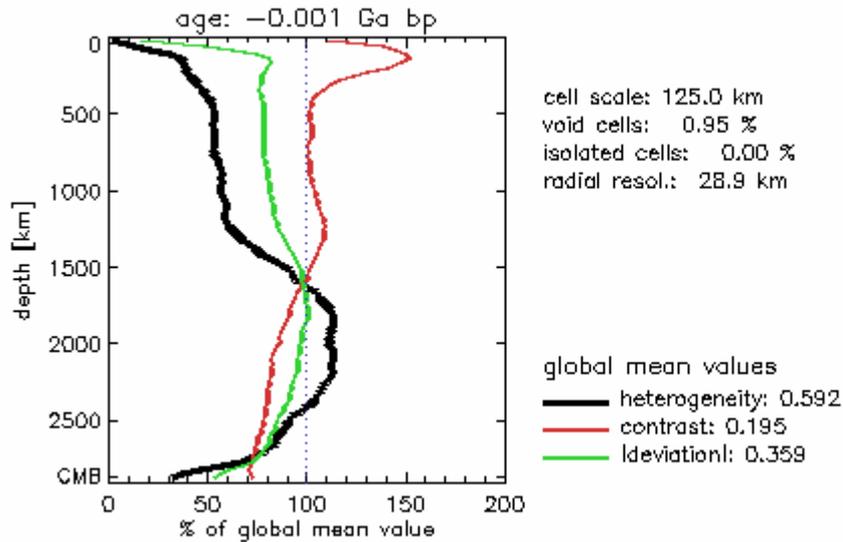
**Abb. 5.8-27:** Histogramme der Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Manteltiefen. Eine Probe repräsentiert den Mittelwert des gesamten radialen Intervalls. n ist die Anzahl der Unterteilungen der Kugelfläche in der jeweiligen Tiefe.

## 5.8. Modell 647

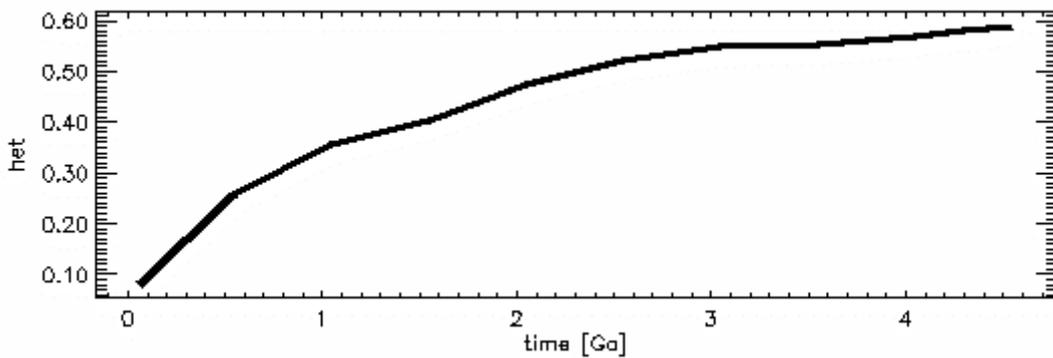


**Abb. 5.8-28:** Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Tiefenintervallen. Die laterale Auflösung entspricht der des jeweils passenden Histogramms in Abb. 5.8-27.

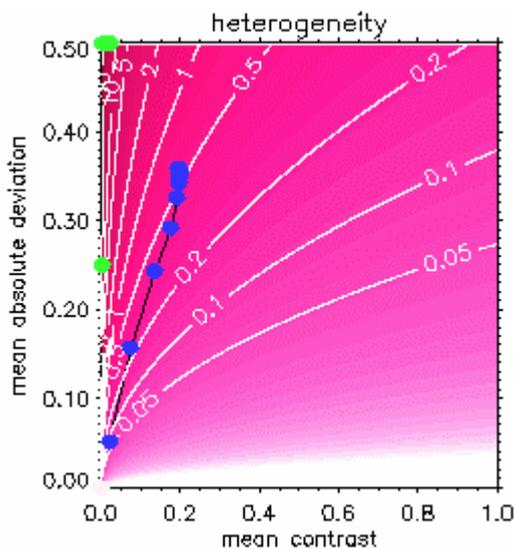
## 5.8. Modell 647



**Abb. 5.8-29:** Heutige Tiefenprofile der lateral gemittelten Werte von Heterogenität, Kontrast und mittlerer Absolutabweichung. Sie werden mit dem Mittelwert in der jeweiligen Kugelschale berechnet. Der globale Wert dient nur Skalierung der Abszisse.



**Abb. 5.8-30:** Zeitliche Entwicklung der Heterogenität



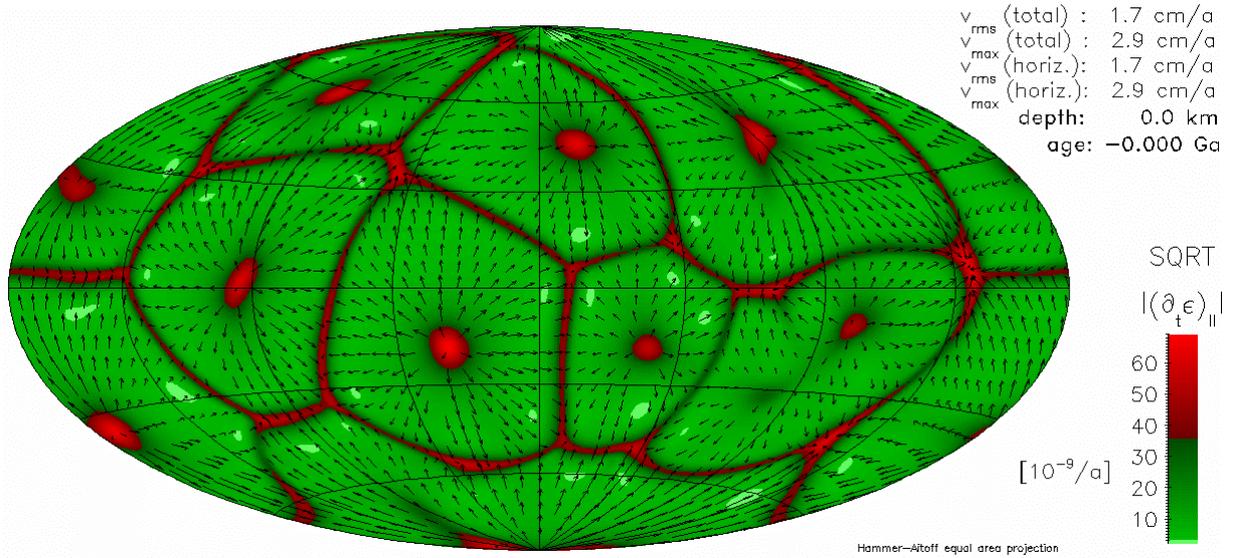
**Abb. 5.8-31:** Entwicklung der globalen Mittelwerte von Heterogenität, mittlerer Absolutabweichung und Kontrast.

Jeder blaue Punkt entspricht einem ausgewerteten Zeitschritt. Die schwarze Verbindungslinie folgt der zeitlichen Entwicklung. Der älteste Zeitschritt liegt näher am Koordinatenursprung als die jüngeren. Die grünen Punkte markieren die Lage der in Kapitel 4.2.3 vorgestellten Referenzmodelle.

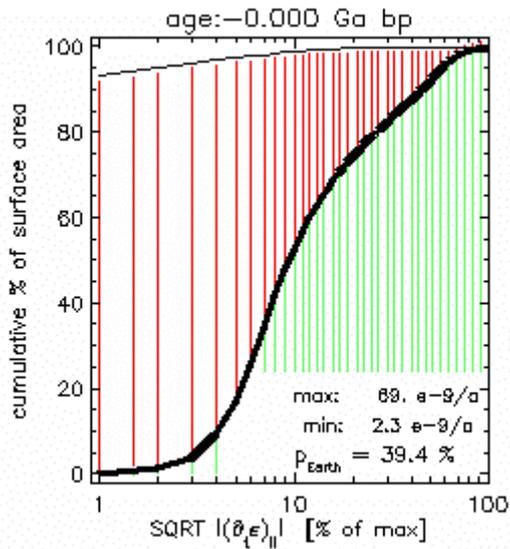
Die rötliche Farbkodierung mit Höhenlinien stellt den Wert der Heterogenität dar.

## 5.9. Modell 648

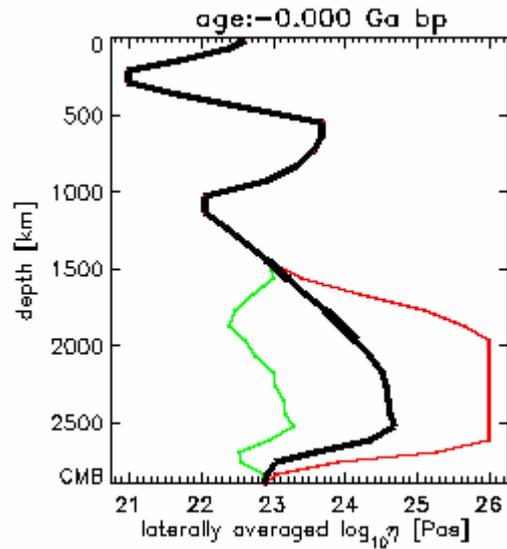
### 5.9. Modell 648



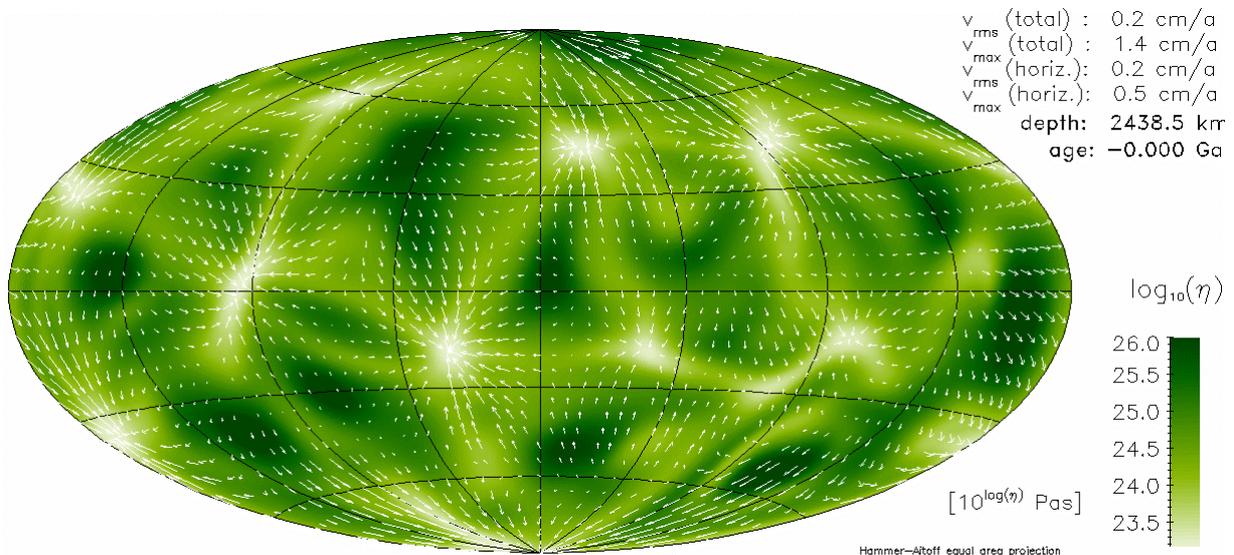
**Abb. 5.9-29:** Wurzel des Betrages der zweiten Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors



**Abb. 5.9-30:** Plattigkeit an der Oberfläche

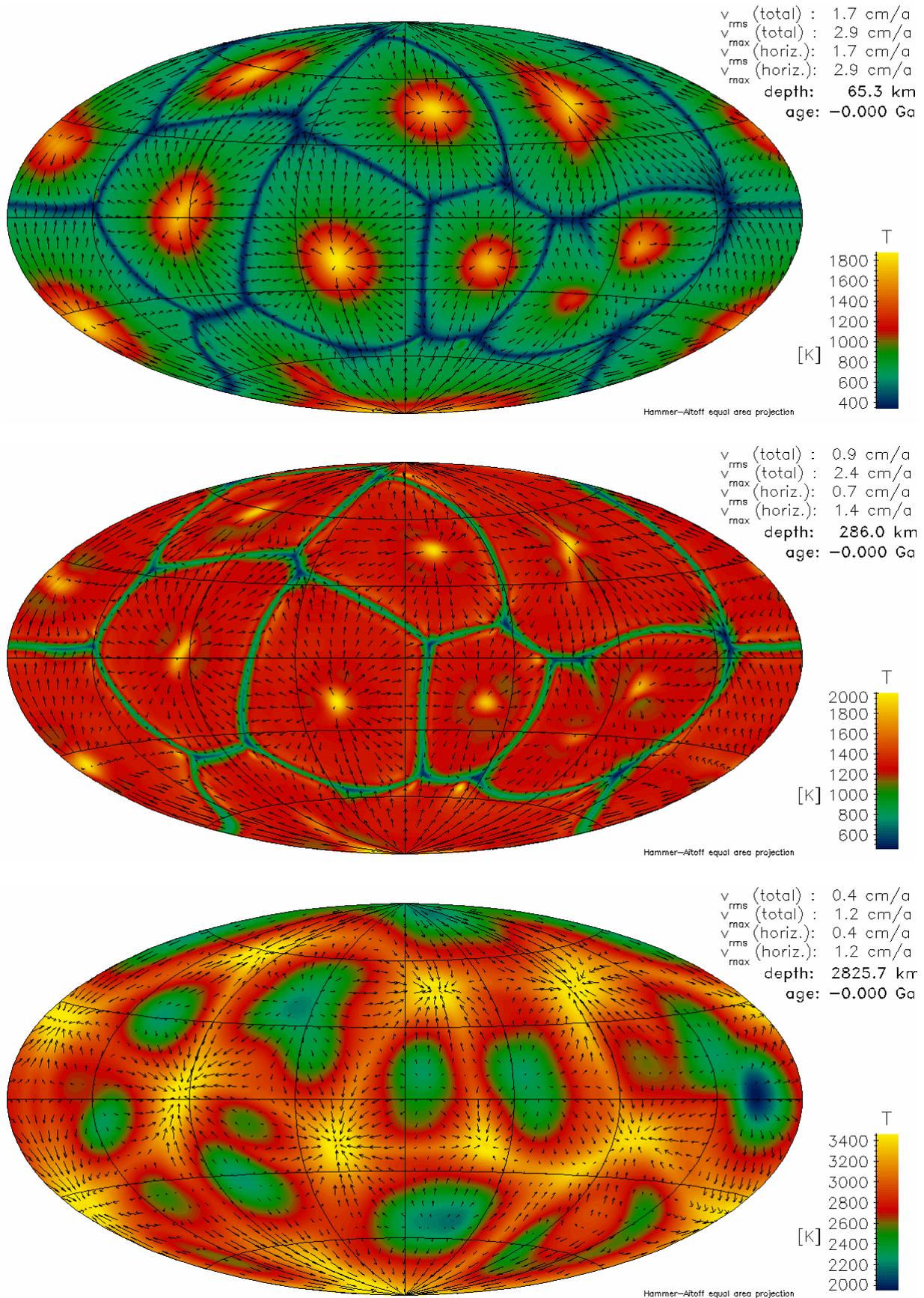


**Abb. 5.9-31:** Viskositätsprofil



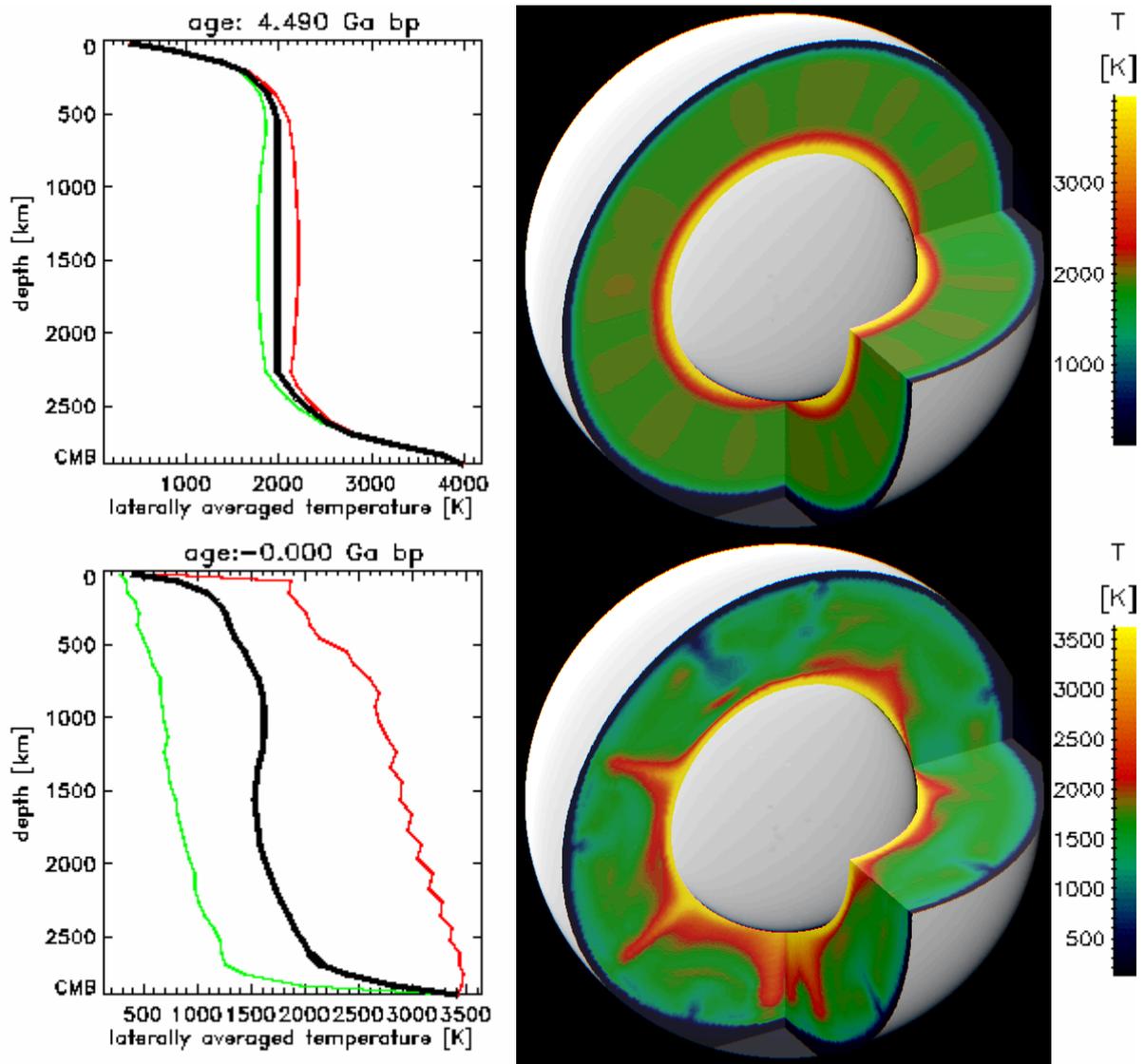
**Abb. 5.9-32:** Viskosität in der Tiefe mit den größten lateralen Viskositätsunterschieden

## 5.9. Modell 648

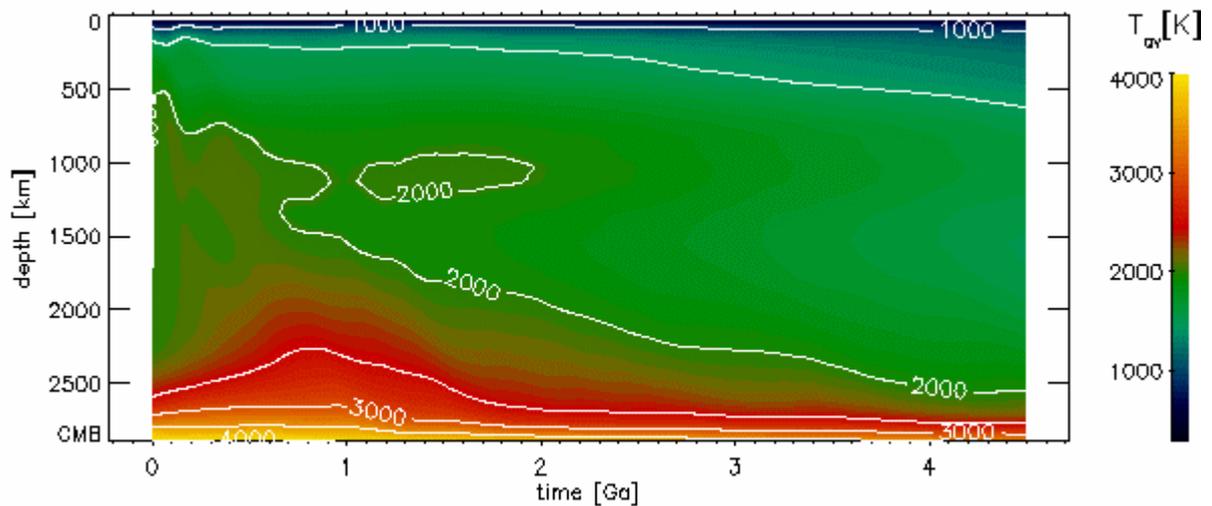


**Abb. 5.9-5:** Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten nahe der Oberfläche, im oberen Mantel und nahe der Kern-Mantel-Grenze

## 5.9. Modell 648

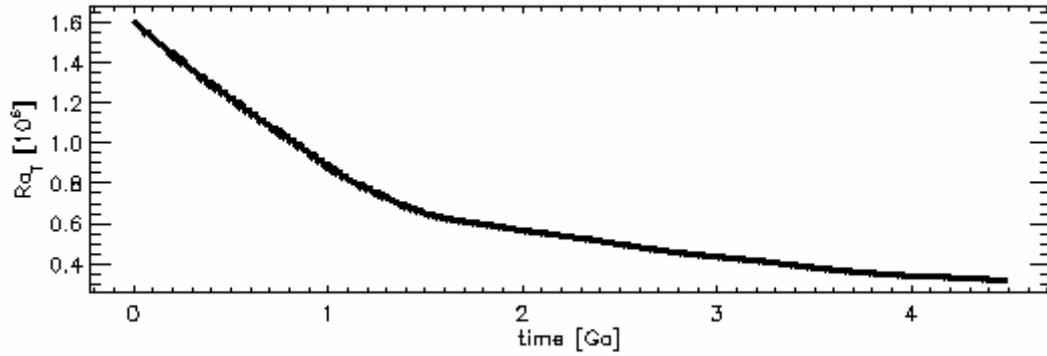


**Abb. 5.9-6:** Temperaturverteilung im Mantel am Anfang der Rechnung und heute

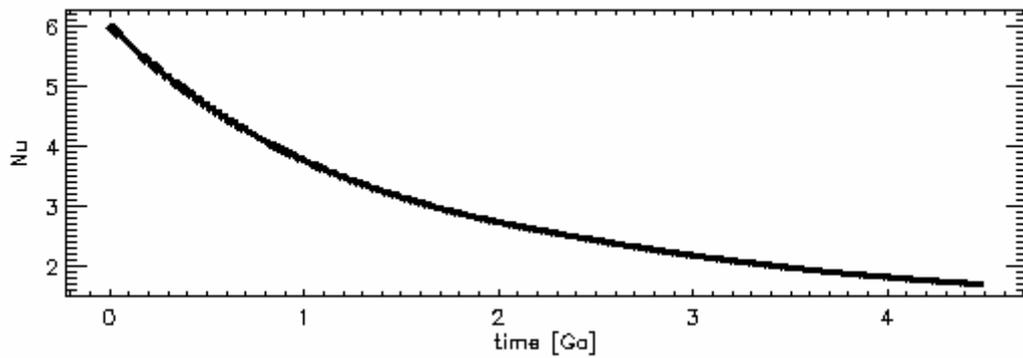


**Abb. 5.9-7:** Zeitliche Entwicklung des Temperaturprofils

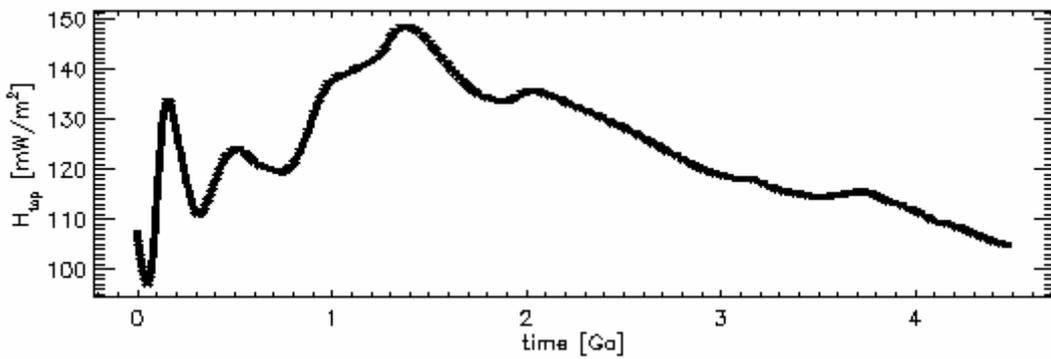
## 5.9. Modell 648



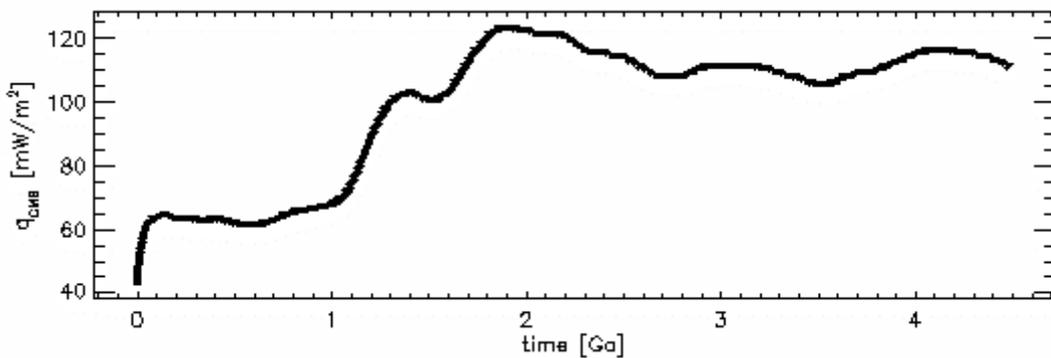
**Abb. 5.9-8:** Zeitliche Entwicklung der Rayleigh-Zahl



**Abb. 5.9-9:** Zeitliche Entwicklung der Nusselt-Zahl

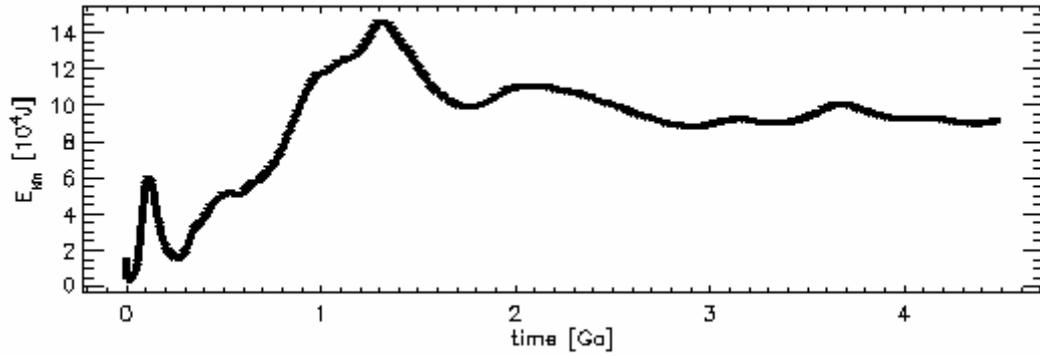


**Abb. 5.9-10:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Oberfläche

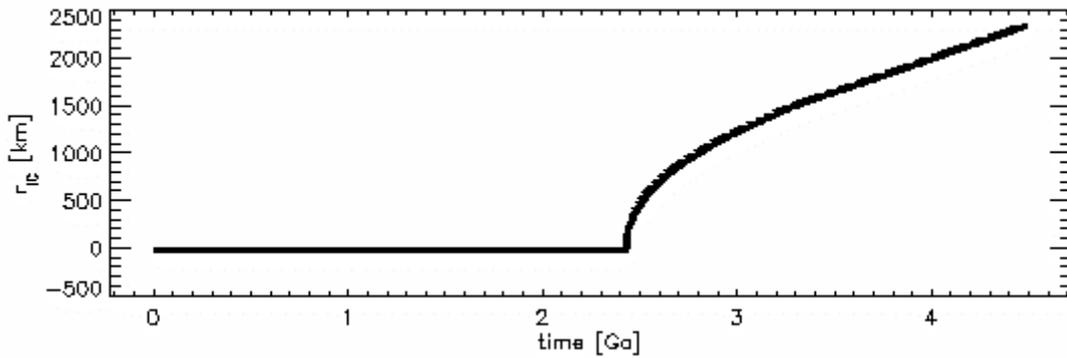


**Abb. 5.9-11:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Kern-Mantel-Grenze

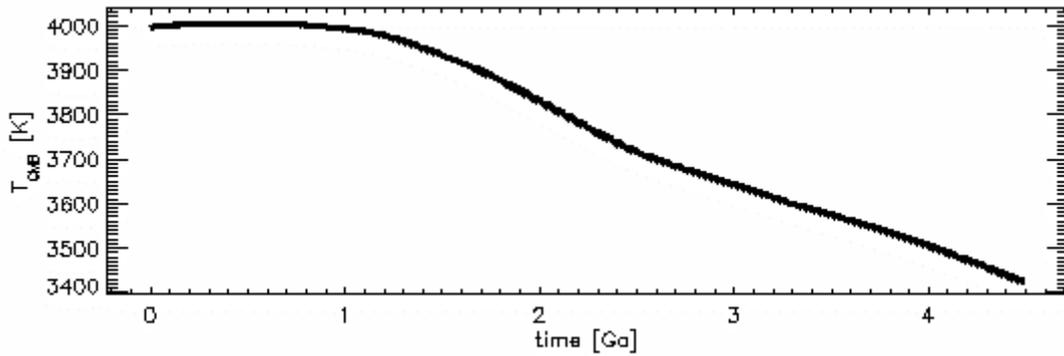
## 5.9. Modell 648



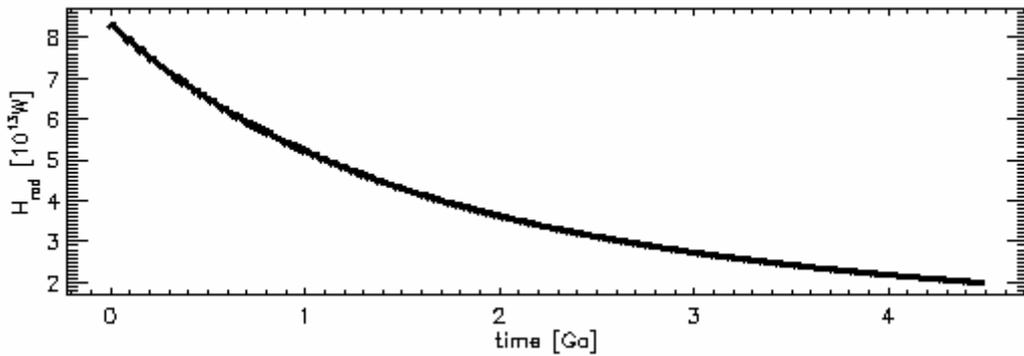
**Abb. 5.9-12:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des gesamten Mantels



**Abb. 5.9-13:** Zeitliche Entwicklung des Innenkernradius

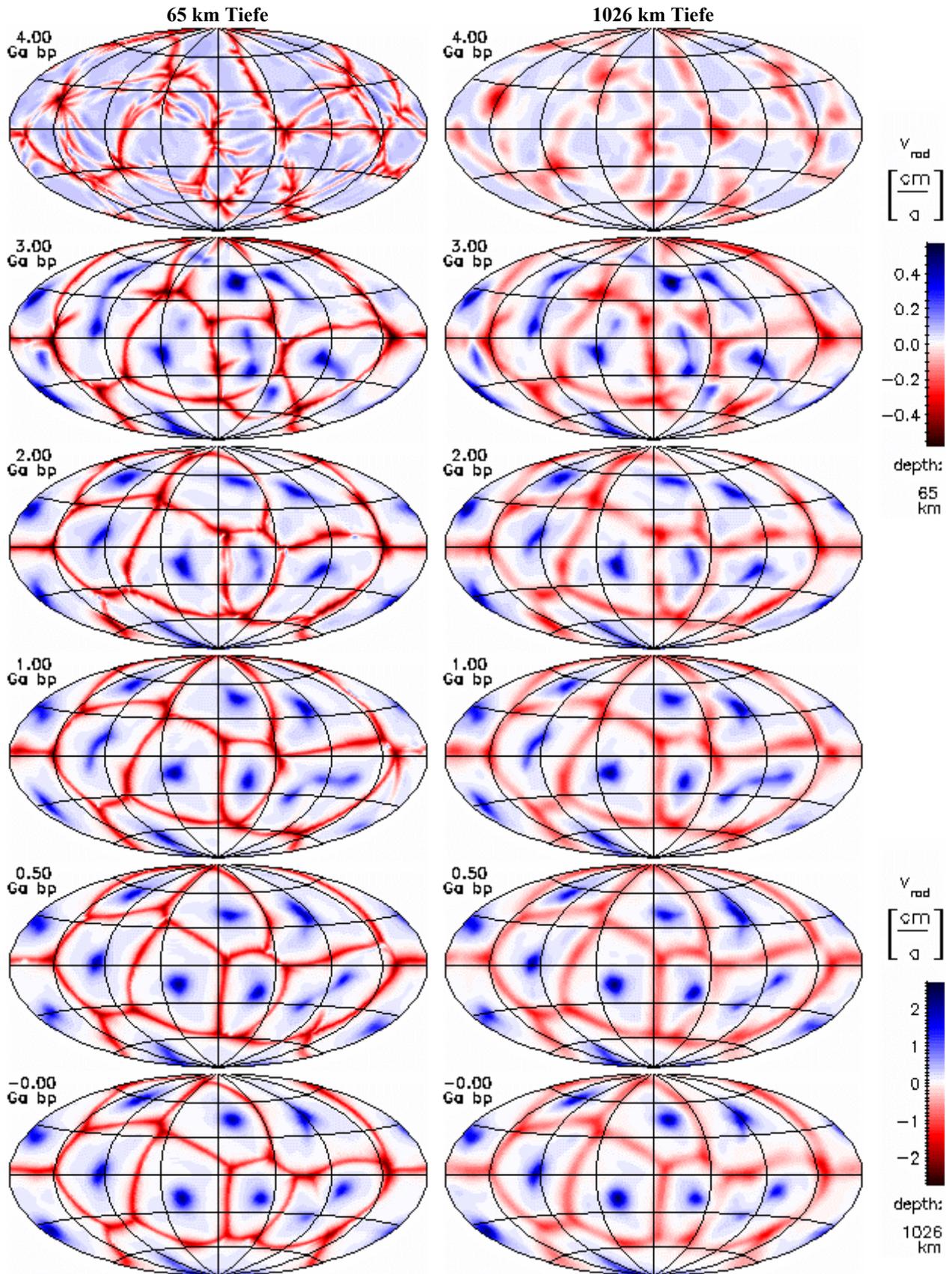


**Abb. 5.9-14:** Zeitliche Entwicklung der Temperatur an der CMB



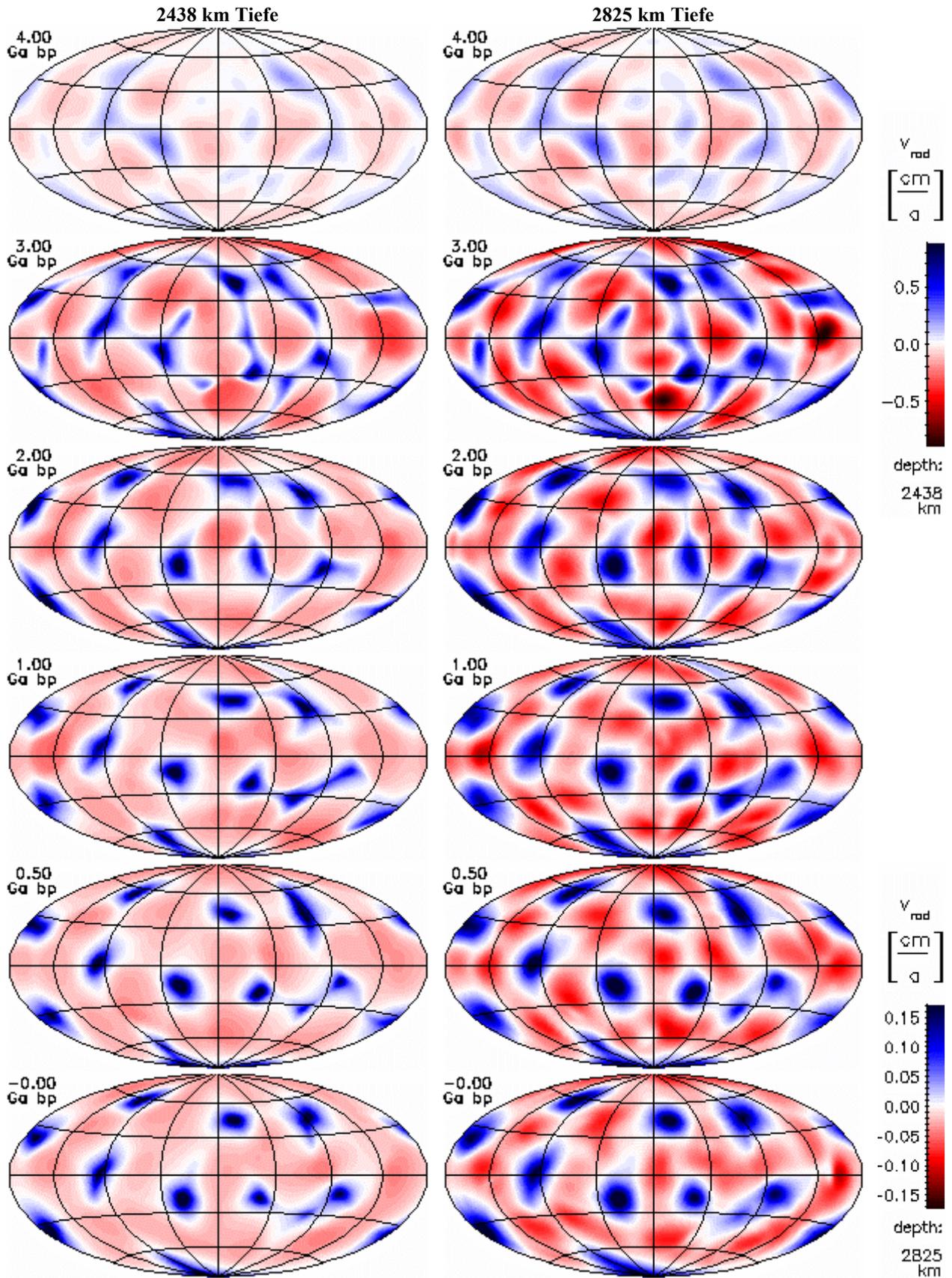
**Abb. 5.9-15:** Zeitliche Entwicklung der Heizleistung durch Zerfall von  $^{40}K$ ,  $^{42}Th$ ,  $^{235}U$  und  $^{238}U$

## 5.9. Modell 648



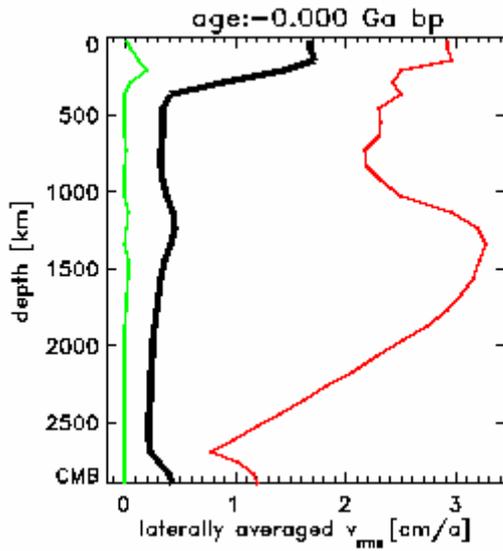
**Abb. 5.9-16:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente nahe der Oberfläche und im unteren Mantel. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind eventuell abgeschnitten.

## 5.9. Modell 648

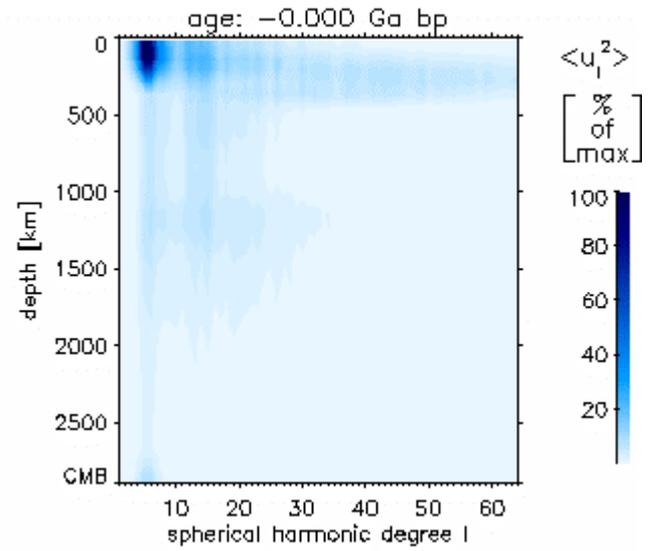


**Abb. 5.9-17:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente im hochviskosen Teil des unteren Mantels und nahe der CMB. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind evtl. abgeschnitten.

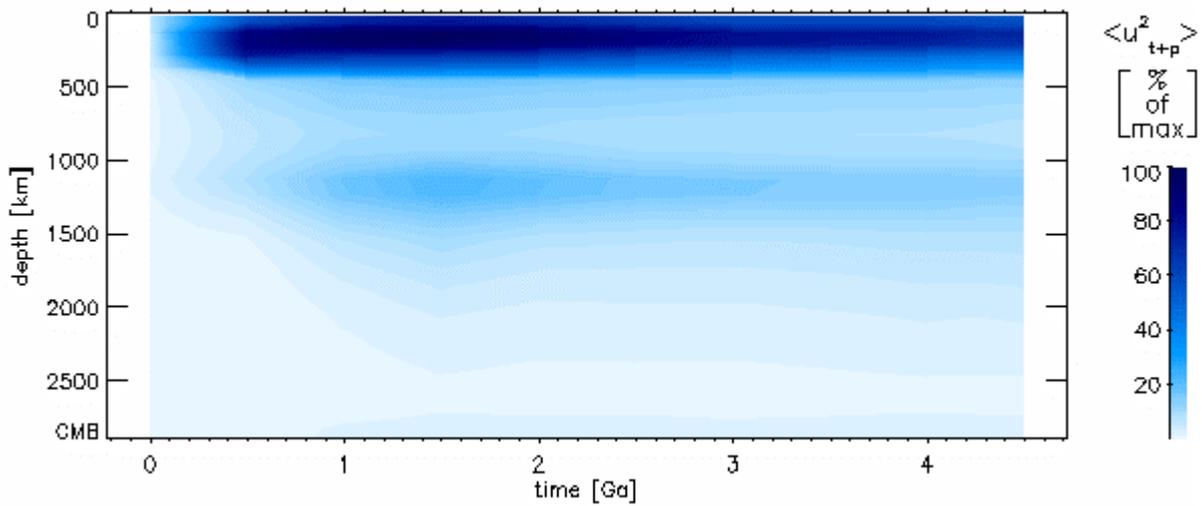
## 5.9. Modell 648



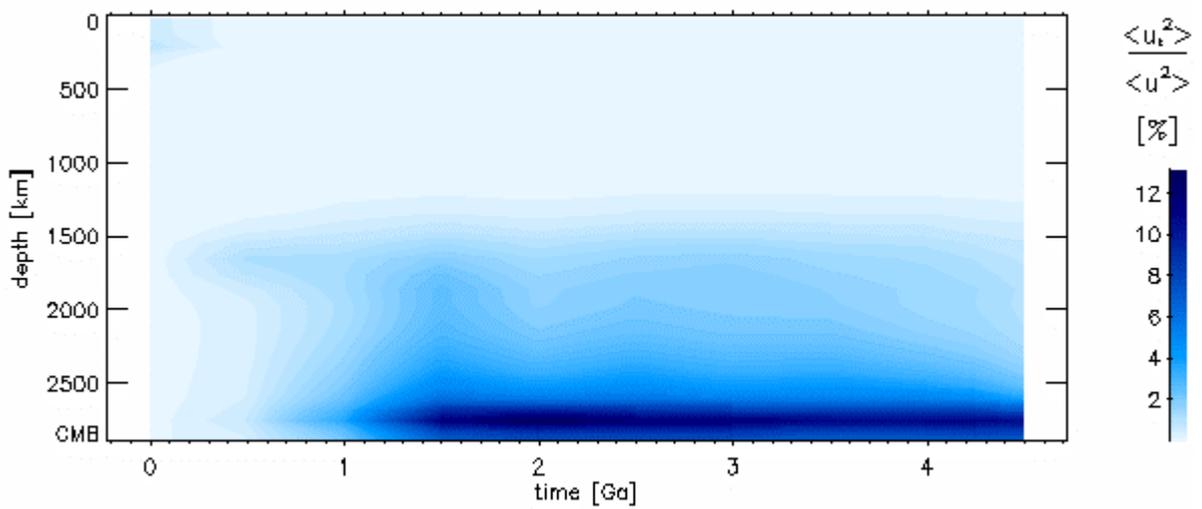
**Abb. 5.9-18:** Heutiges Geschwindigkeitsprofil



**Abb. 5.9-19:** Spektrum von toroidaler plus poloidaler kinetischer Energie

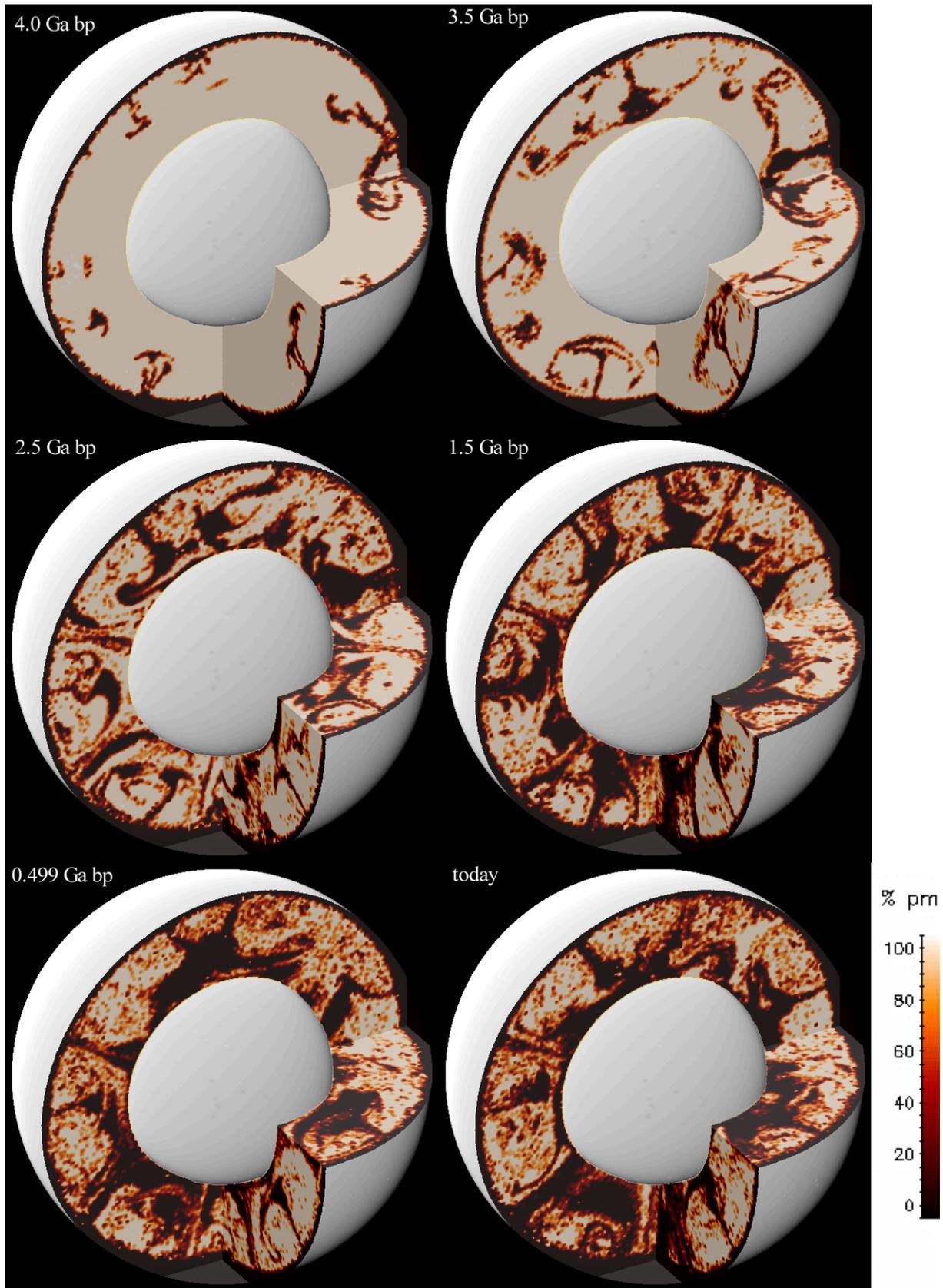


**Abb. 5.9-20:** Entwicklung der Tiefenverteilung der Summe von poloidaler und toroidaler Energie



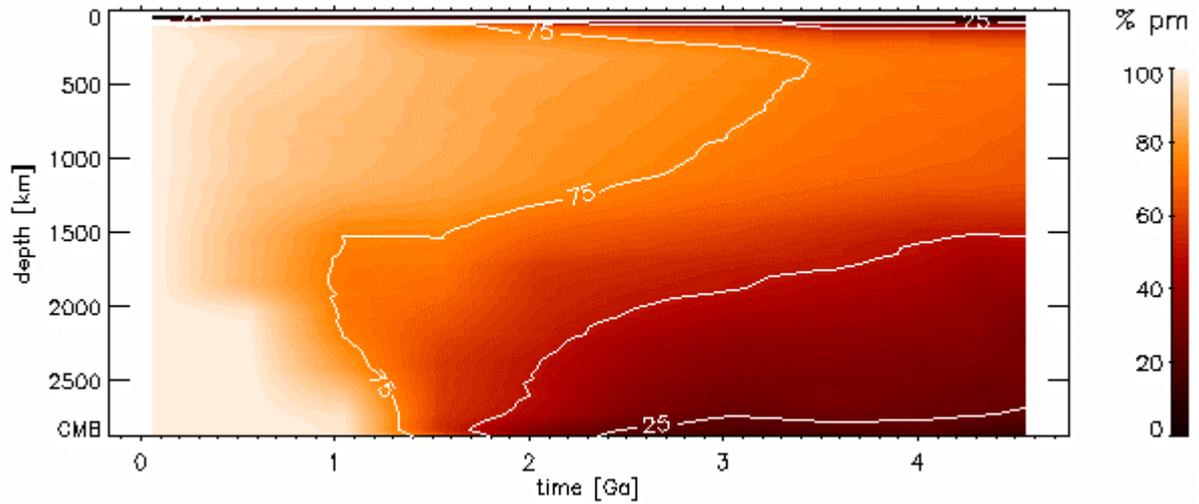
**Abb. 5.9-21:** Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung des toroidalen Anteils

## 5.9. Modell 648

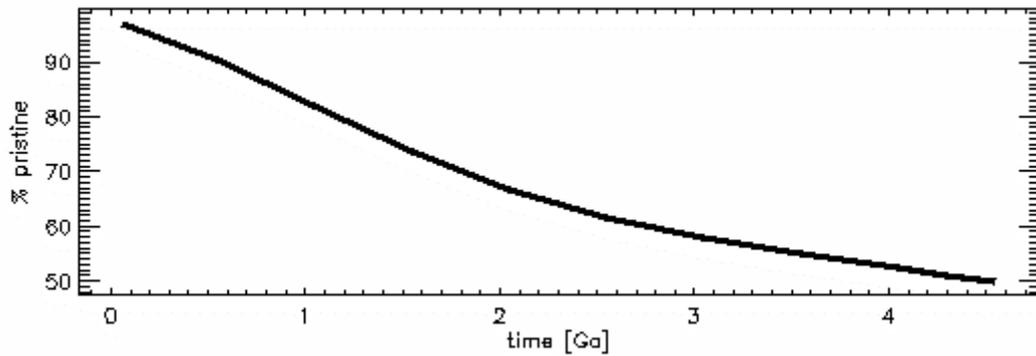


**Abb. 5.9-22:** Verteilung ursprünglichen Materials (pm) zu verschiedenen Zeiten

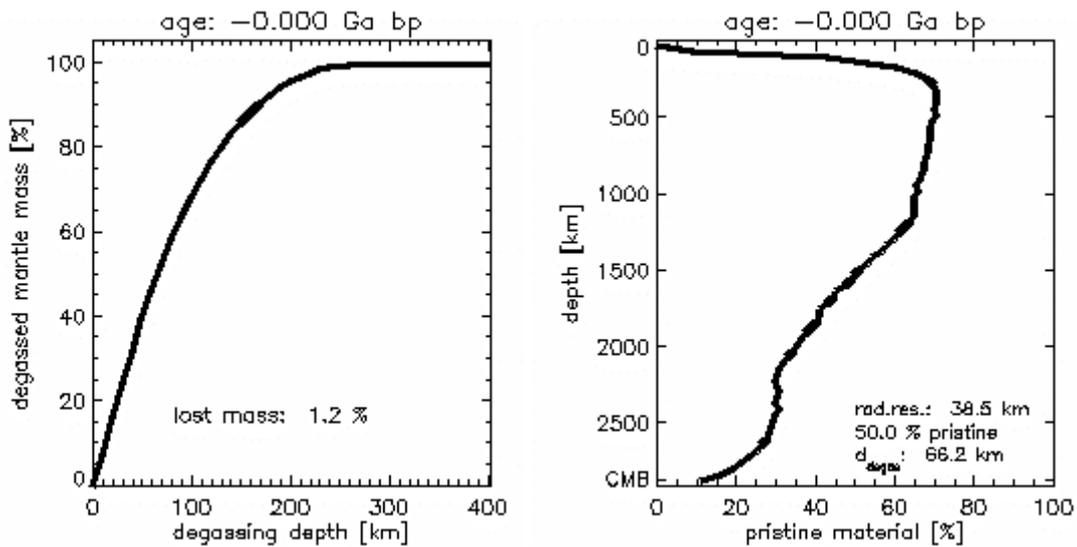
## 5.9. Modell 648



**Abb. 5.9-23:** Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung ursprünglichen Materials



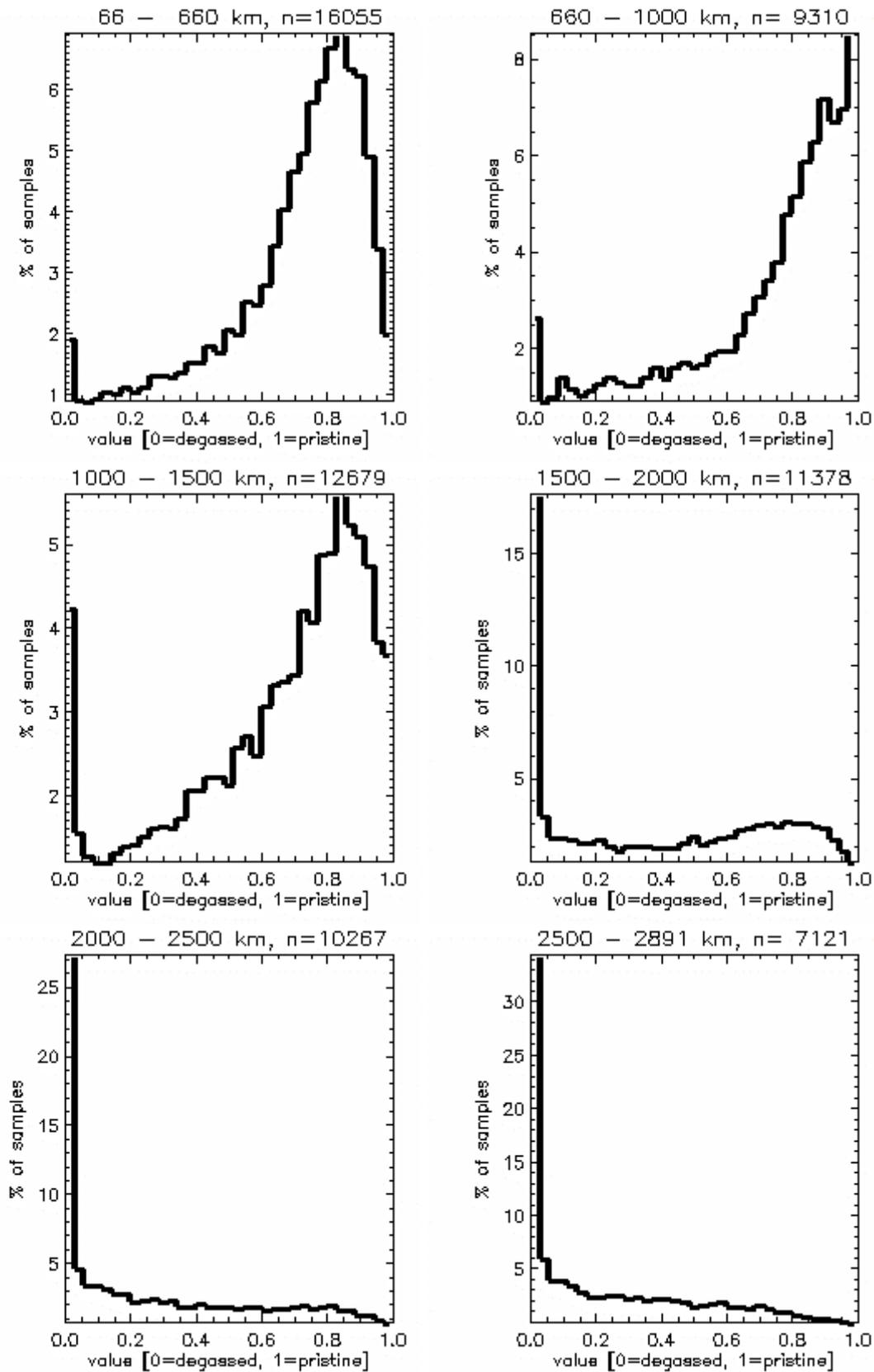
**Abb. 5.9-24:** Abnahme ursprünglichen Materials im Mantel



**Abb. 5.9-25:** Die Entgastungstiefe wird so festgelegt, dass am Ende der Rechnung 50 % des Mantels entgast sind

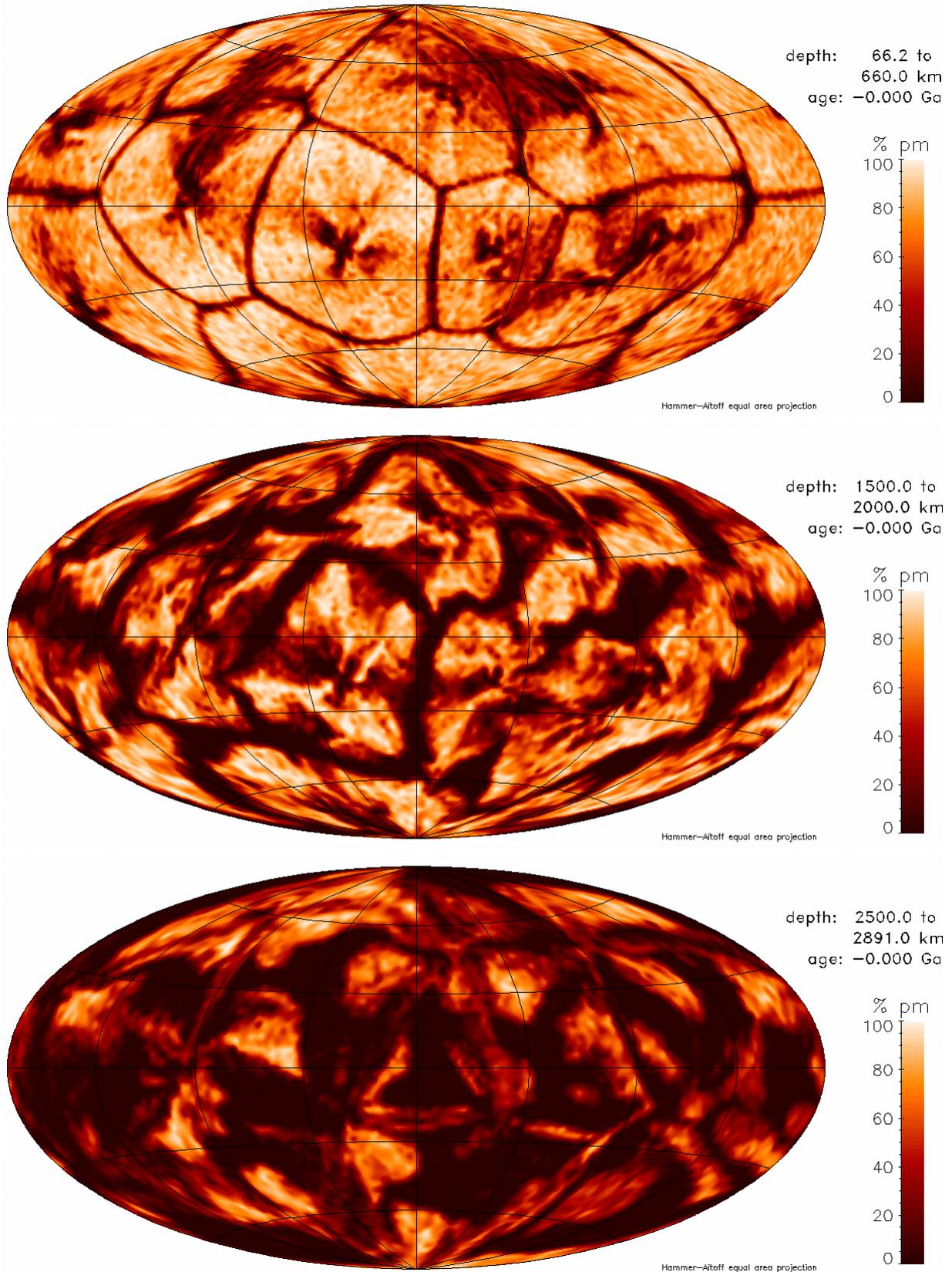
**Abb. 5.9-26:** Tiefenverteilung ursprünglichen Materials im heutigen Mantel

## 5.9. Modell 648



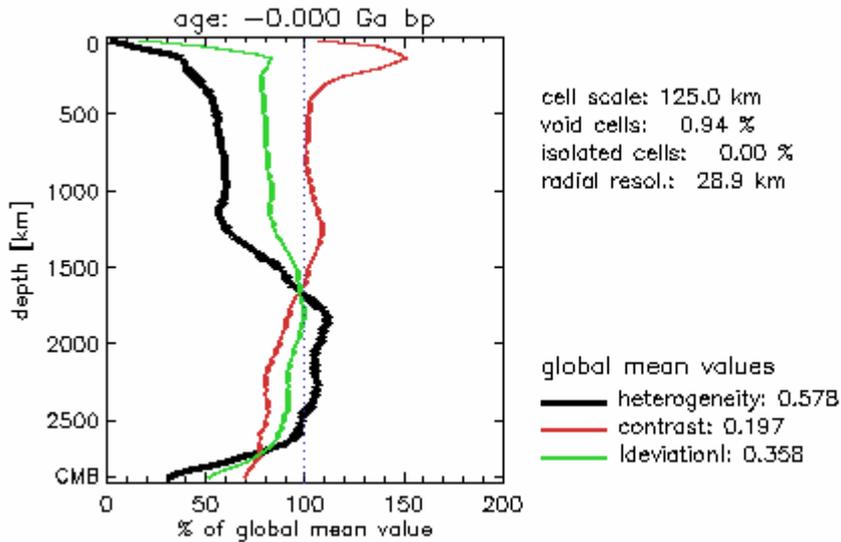
**Abb. 5.9-27:** Histogramme der Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Manteltiefen. Eine Probe repräsentiert den Mittelwert des gesamten radialen Intervalls. n ist die Anzahl der Unterteilungen der Kugelfläche in der jeweiligen Tiefe.

## 5.9. Modell 648

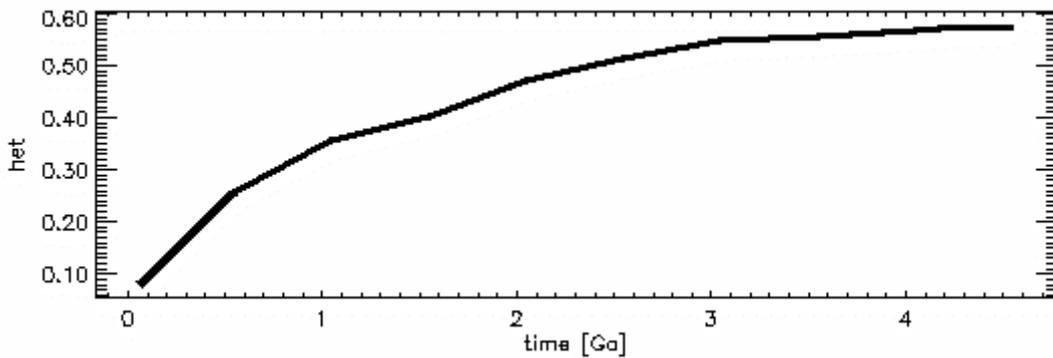


**Abb. 5.9-28:** Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Tiefenintervallen. Die laterale Auflösung entspricht der des jeweils passenden Histogramms in Abb. 5.9-27.

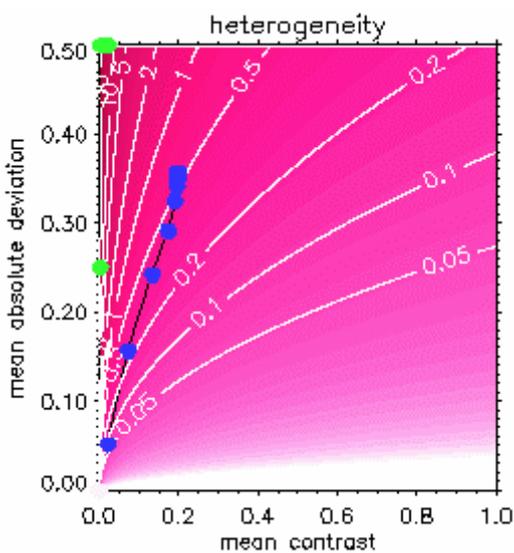
## 5.9. Modell 648



**Abb. 5.9-29:** Heutige Tiefenprofile der lateral gemittelten Werte von Heterogenität, Kontrast und mittlerer Absolutabweichung. Sie werden mit dem Mittelwert in der jeweiligen Kugelschale berechnet. Der globale Wert dient nur Skalierung der Abszisse.



**Abb. 5.9-30:** Zeitliche Entwicklung der Heterogenität



**Abb. 5.9-31:** Entwicklung der globalen Mittelwerte von Heterogenität, mittlerer Absolutabweichung und Kontrast. Jeder blaue Punkt entspricht einem ausgewerteten Zeitschritt. Die schwarze Verbindungslinie folgt der zeitlichen Entwicklung. Der älteste Zeitschritt liegt näher am Koordinatenursprung als die jüngeren. Die grünen Punkte markieren die Lage der in Kapitel 4.2.3 vorgestellten Referenzmodelle. Die rötliche Farbkodierung mit Höhenlinien stellt den Wert der Heterogenität dar.

5.10. Modell 649

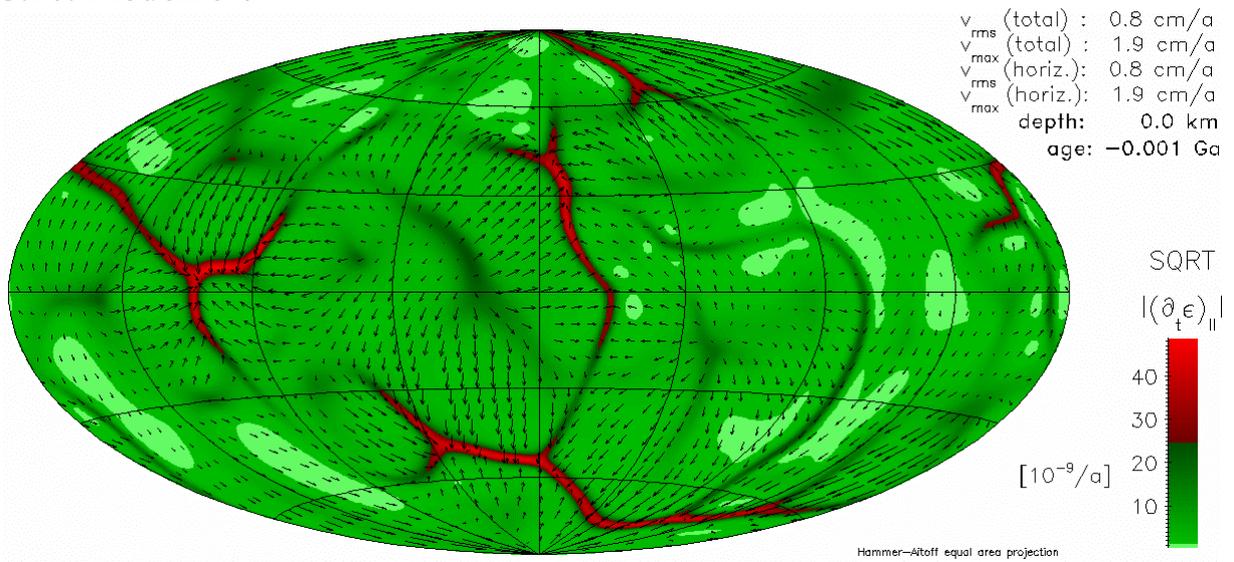


Abb. 5.10-33: Wurzel des Betrages der zweiten Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors

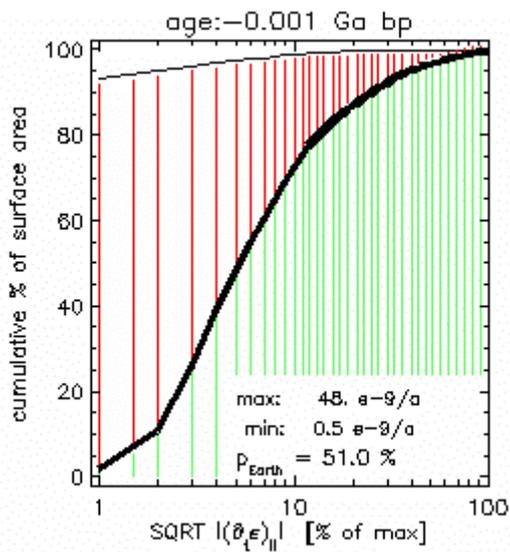


Abb. 5.10-34: Plattigkeit an der Oberfläche

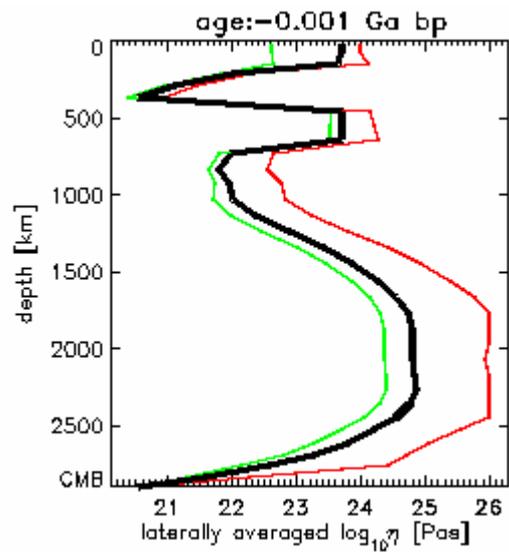


Abb. 5.10-35: Viskositätsprofil

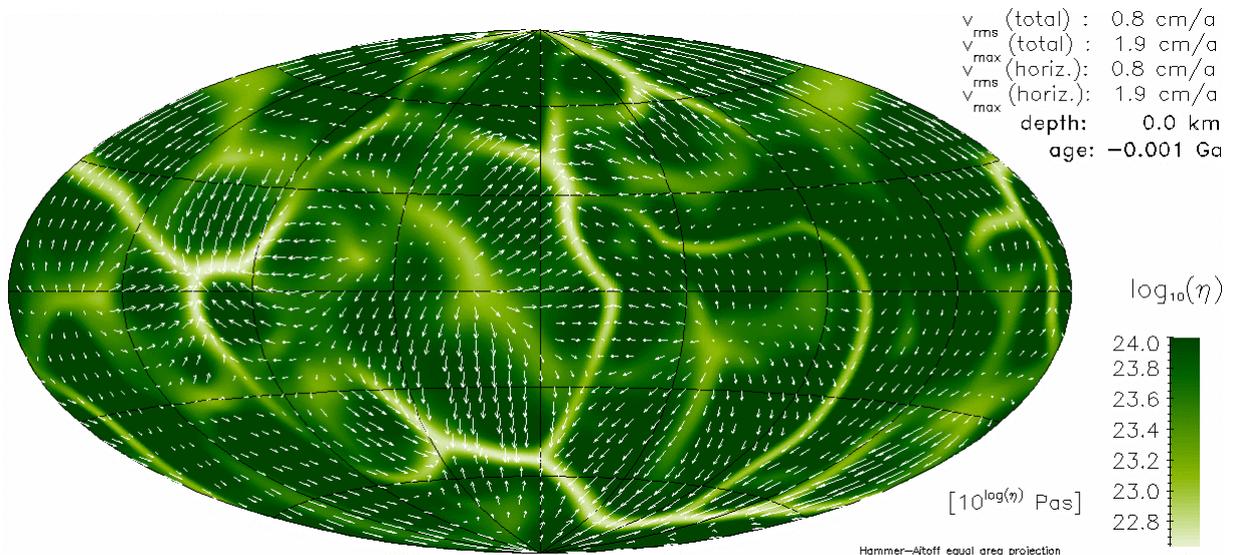
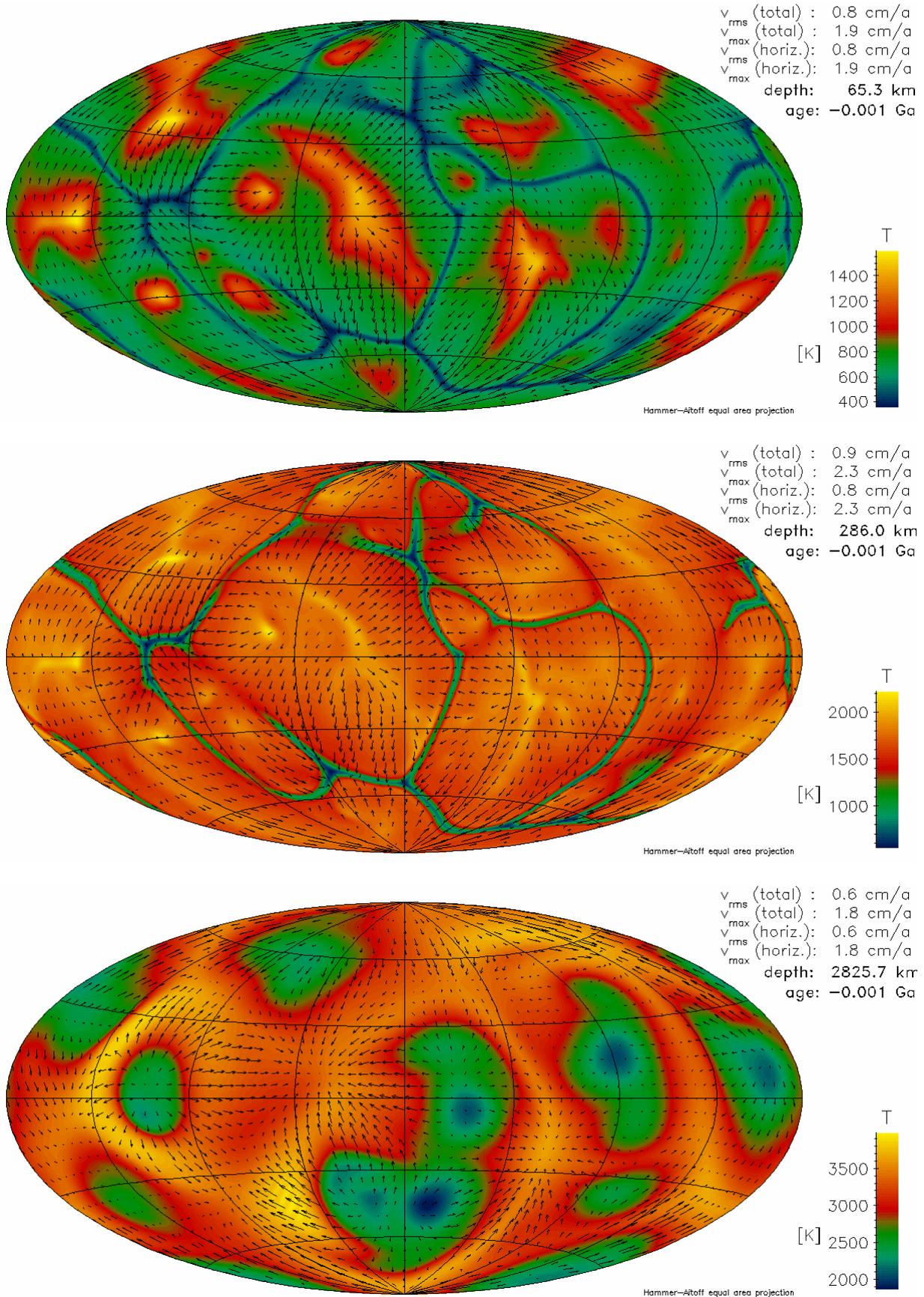


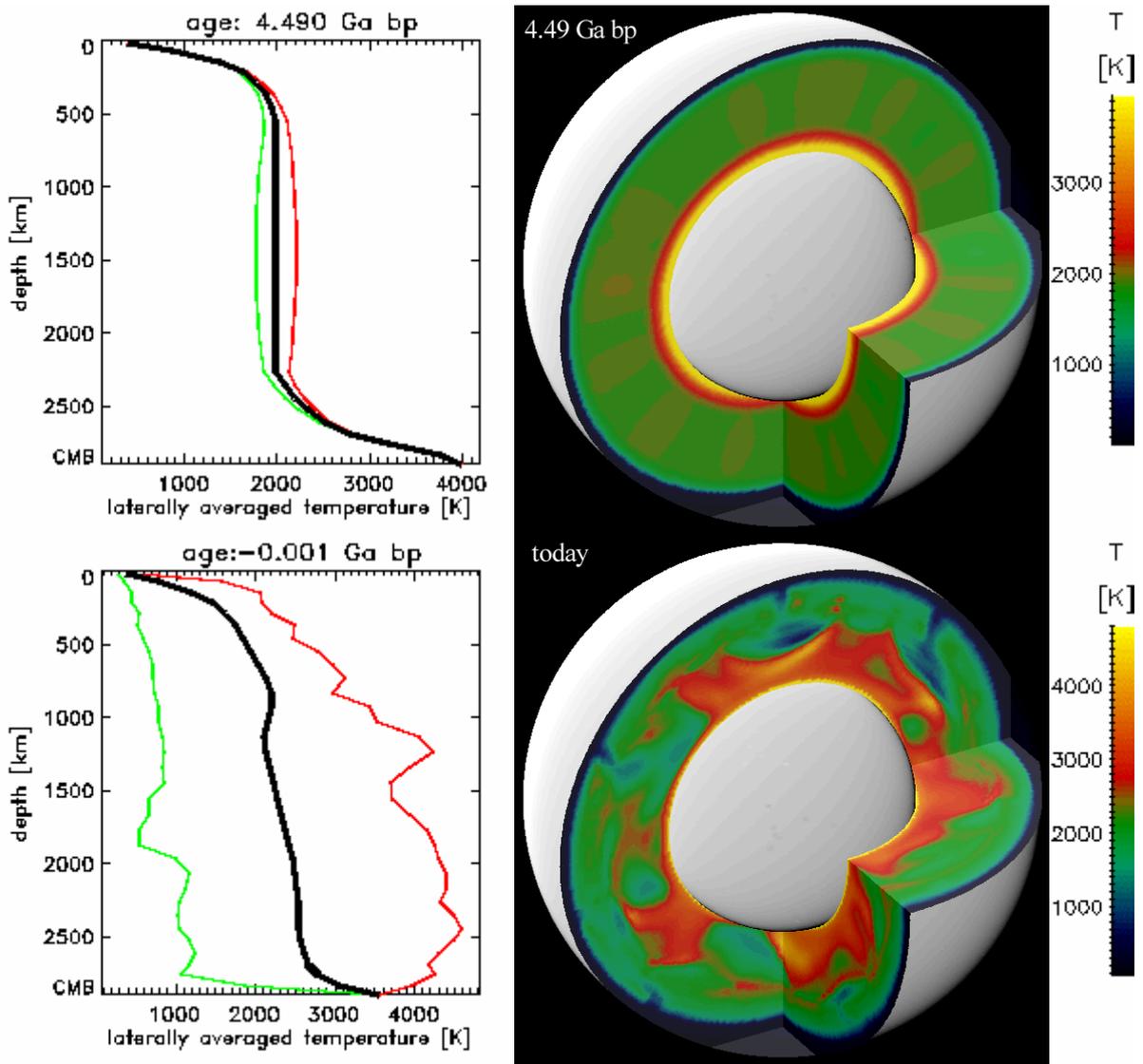
Abb. 5.10-36: Viskosität in der Tiefe mit den größten lateralen Viskositätsunterschieden

## 5.10. Modell 649

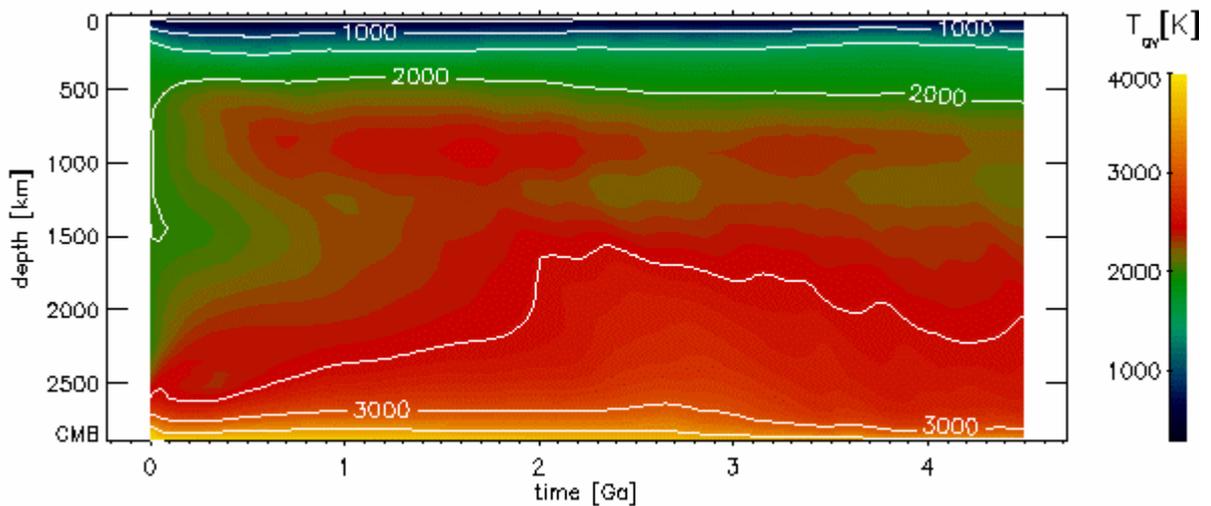


**Abb. 5.10-5:** Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten nahe der Oberfläche, im oberen Mantel und nahe der Kern-Mantel-Grenze

## 5.10. Modell 649

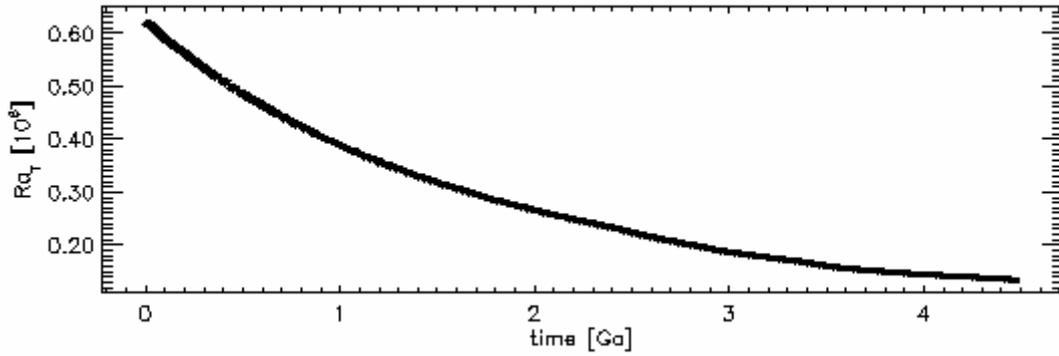


**Abb. 5.10-6:** Temperaturverteilung im Mantel am Anfang der Rechnung und heute

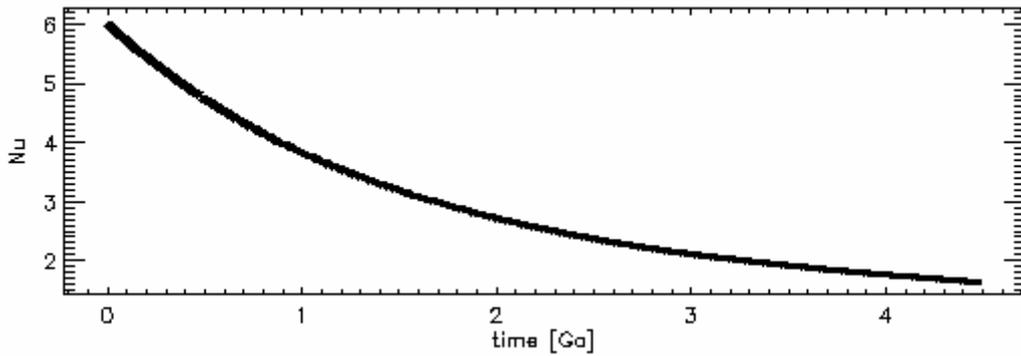


**Abb. 5.10-7:** Zeitliche Entwicklung des Temperaturprofils

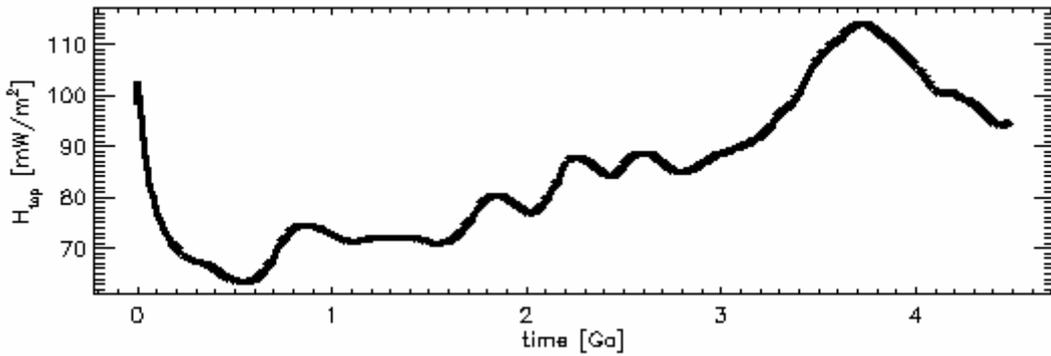
## 5.10. Modell 649



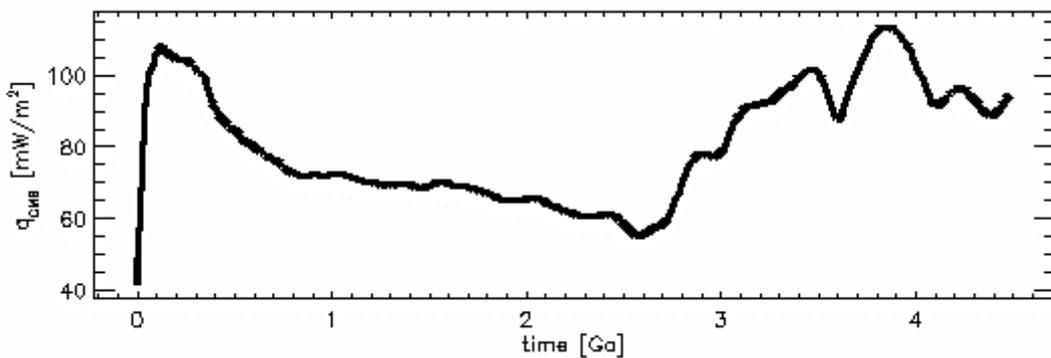
**Abb. 5.10-8:** Zeitliche Entwicklung der Rayleigh-Zahl



**Abb. 5.10-9:** Zeitliche Entwicklung der Nusselt-Zahl

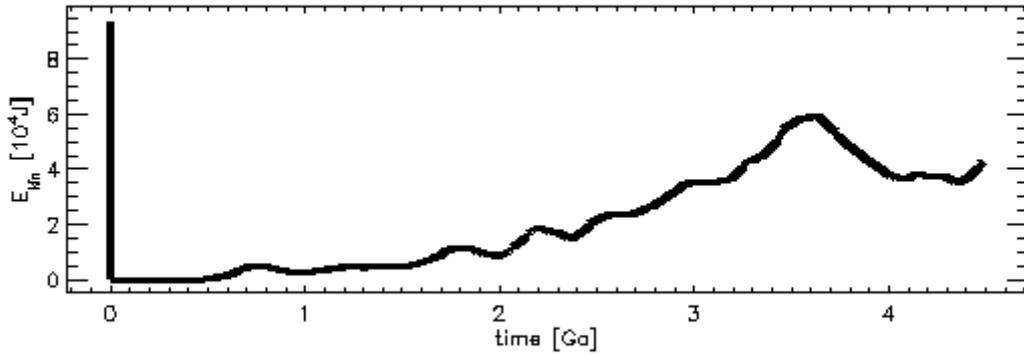


**Abb. 5.10-10:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Oberfläche

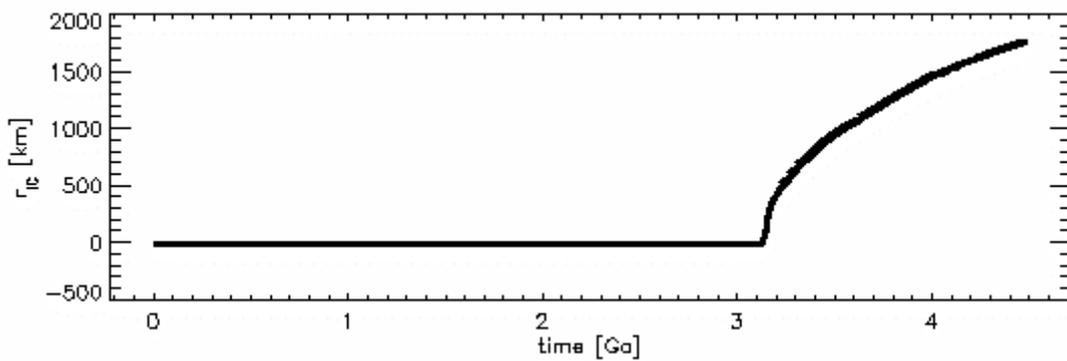


**Abb. 5.10-11:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Kern-Mantel-Grenze

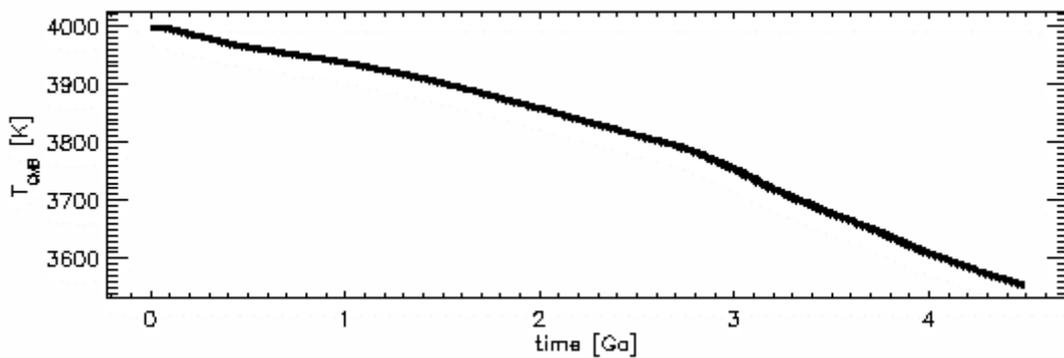
## 5.10. Modell 649



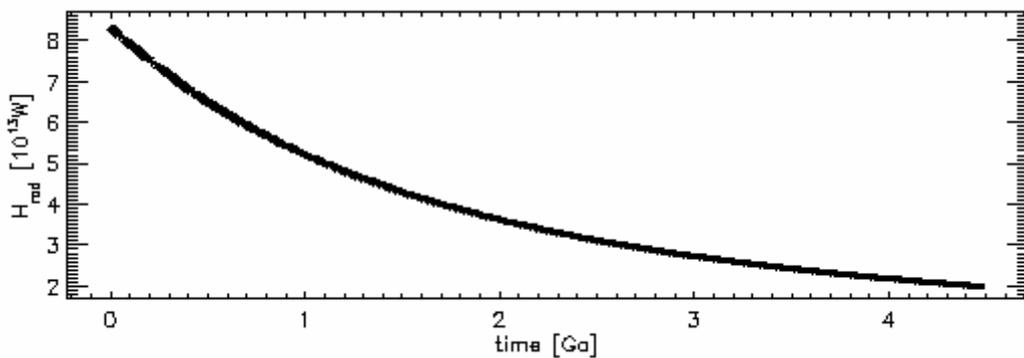
**Abb. 5.10-12:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des gesamten Mantels. Der hohe Wert am Anfang ist ein Artefakt.



**Abb. 5.10-13:** Zeitliche Entwicklung des Innenkernradius

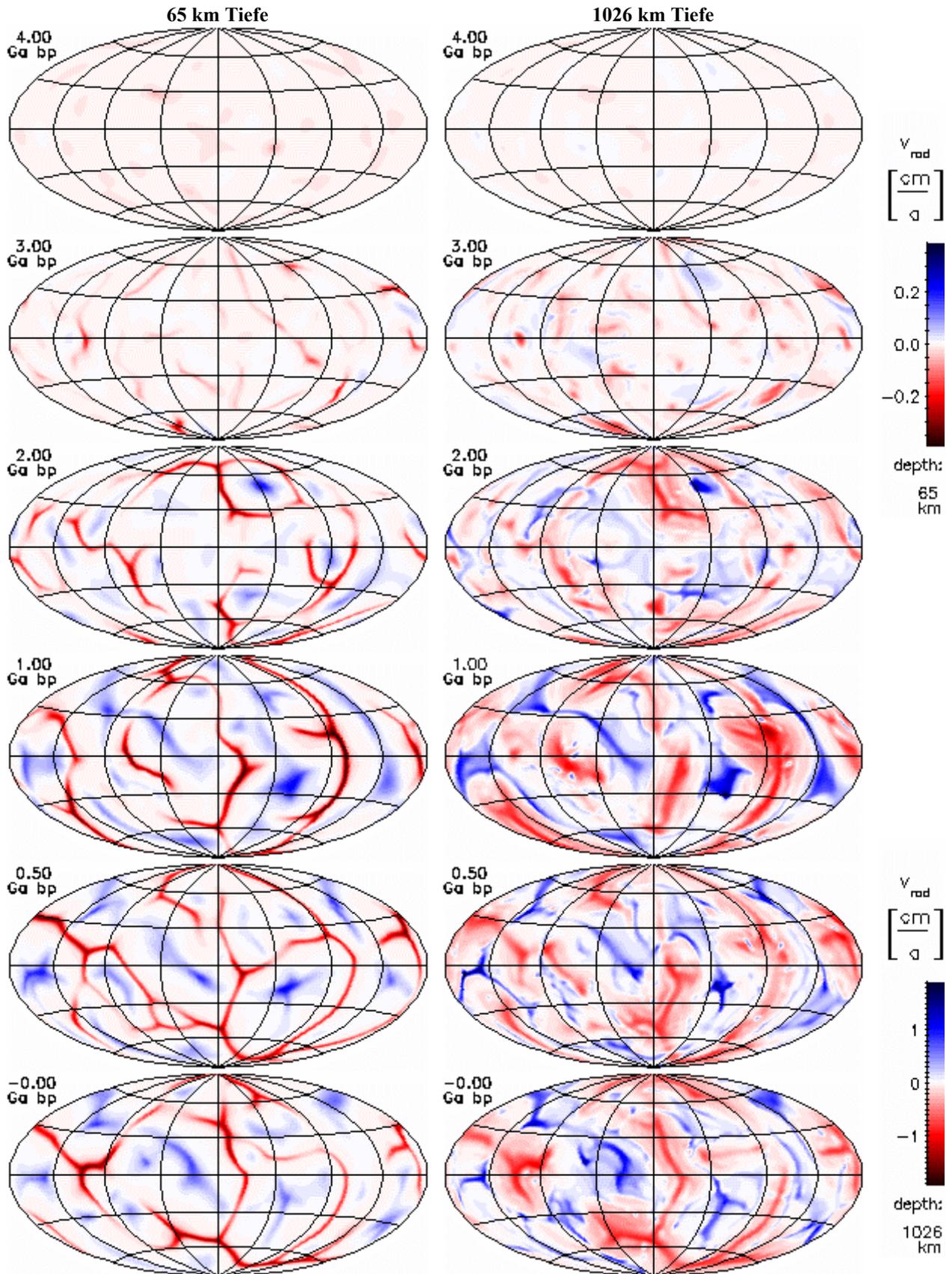


**Abb. 5.10-14:** Zeitliche Entwicklung der Temperatur an der CMB



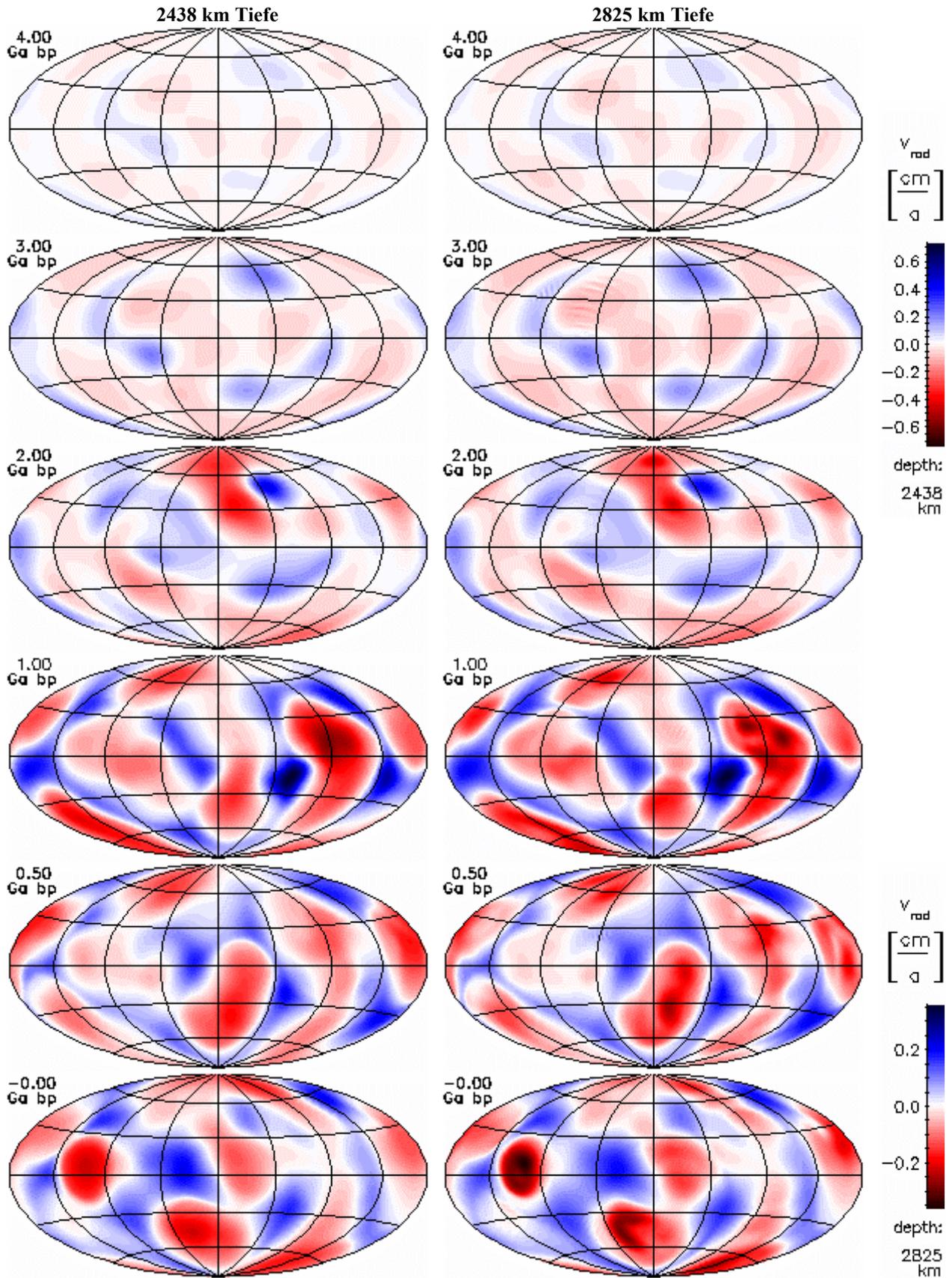
**Abb. 5.10-15:** Zeitliche Entwicklung der Heizleistung durch Zerfall von  $^{40}\text{K}$ ,  $^{42}\text{Th}$ ,  $^{235}\text{U}$  und  $^{238}\text{U}$

## 5.10. Modell 649



**Abb. 5.10-16:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente nahe der Oberfläche und im unteren Mantel. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind eventuell abgeschnitten.

## 5.10. Modell 649



**Abb. 5.10-17:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente im hochviskosen Teil des unteren Mantels und nahe der CMB. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind evtl. abgeschnitten.

## 5.10. Modell 649

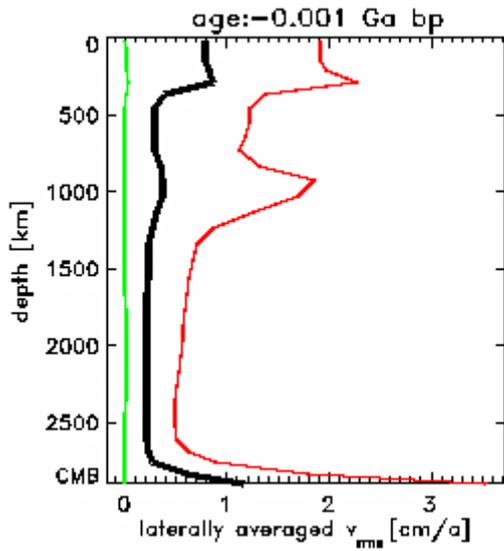


Abb. 5.10-18: Heutiges Geschwindigkeitsprofil

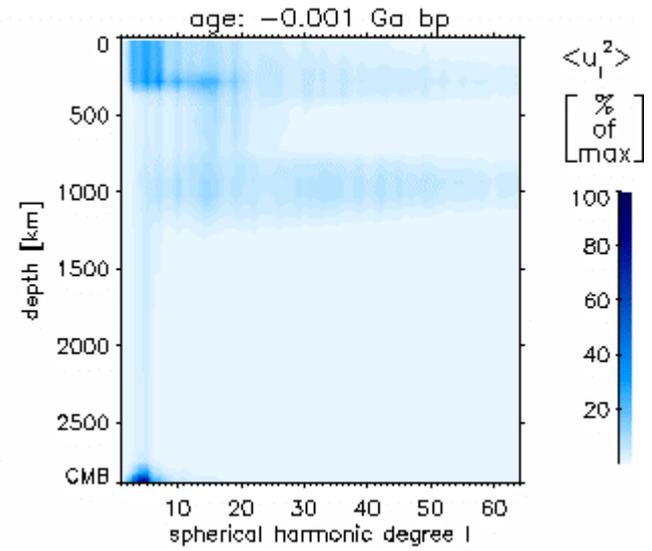


Abb. 5.10-19: Spektrum von toroidaler plus poloidaler kinetischer Energie

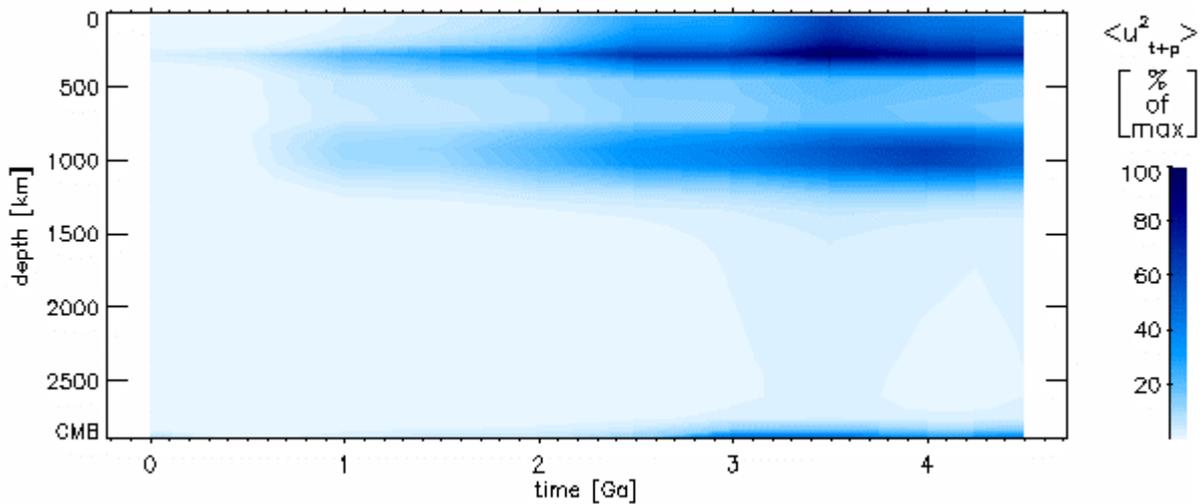


Abb. 5.10-20: Entwicklung der Tiefenverteilung der Summe von poloidaler und toroidaler Energie

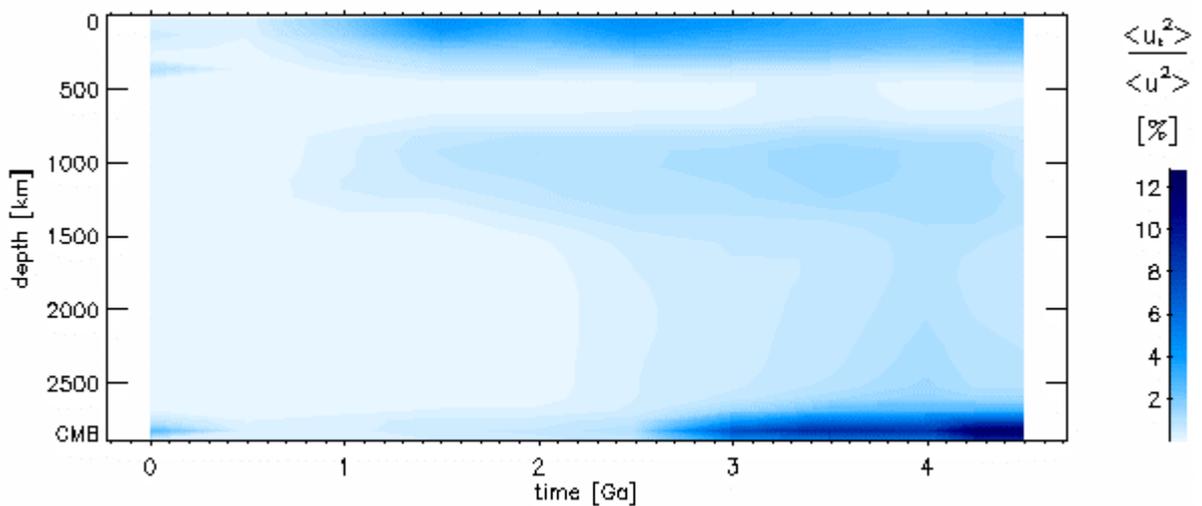
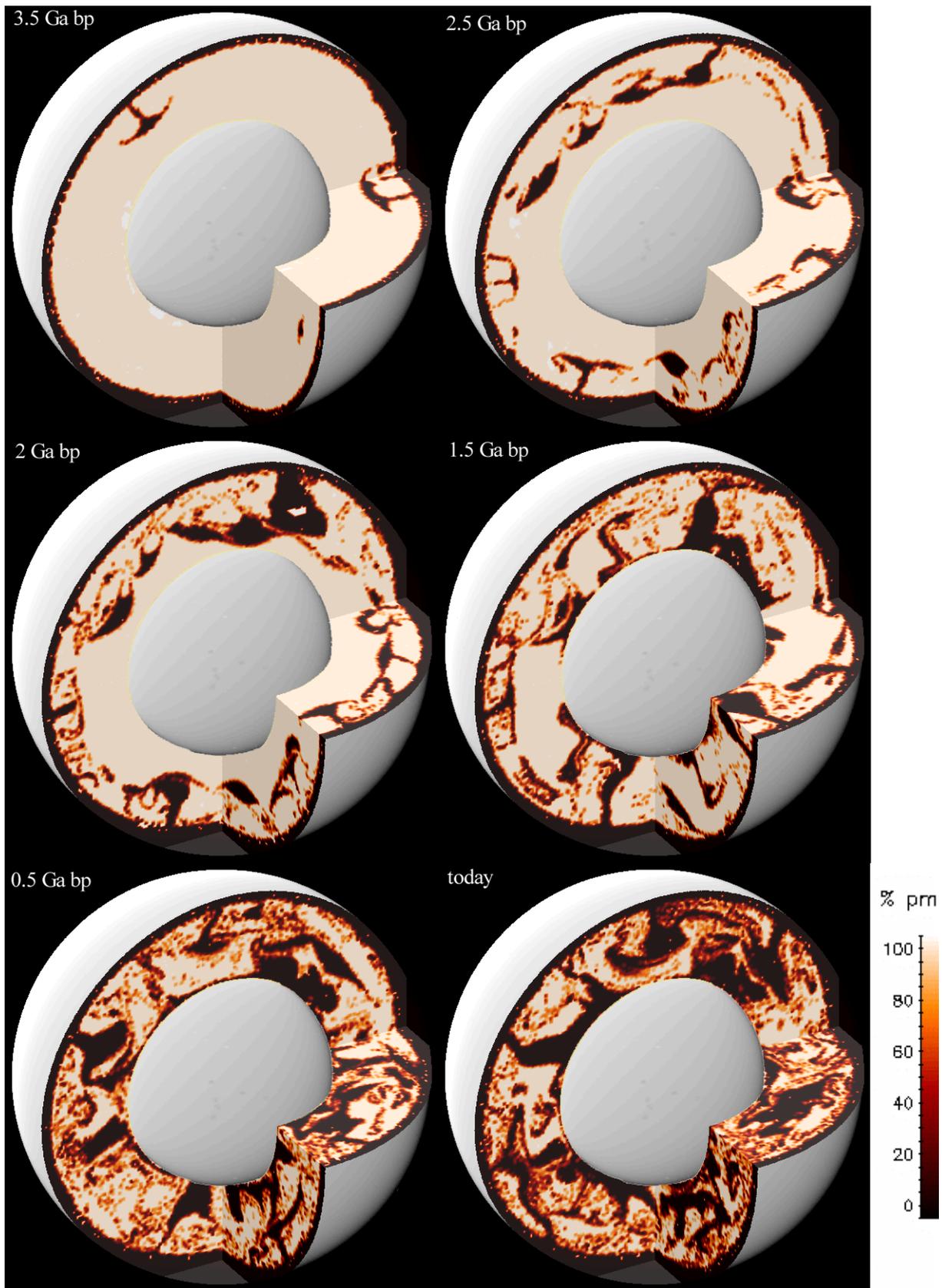


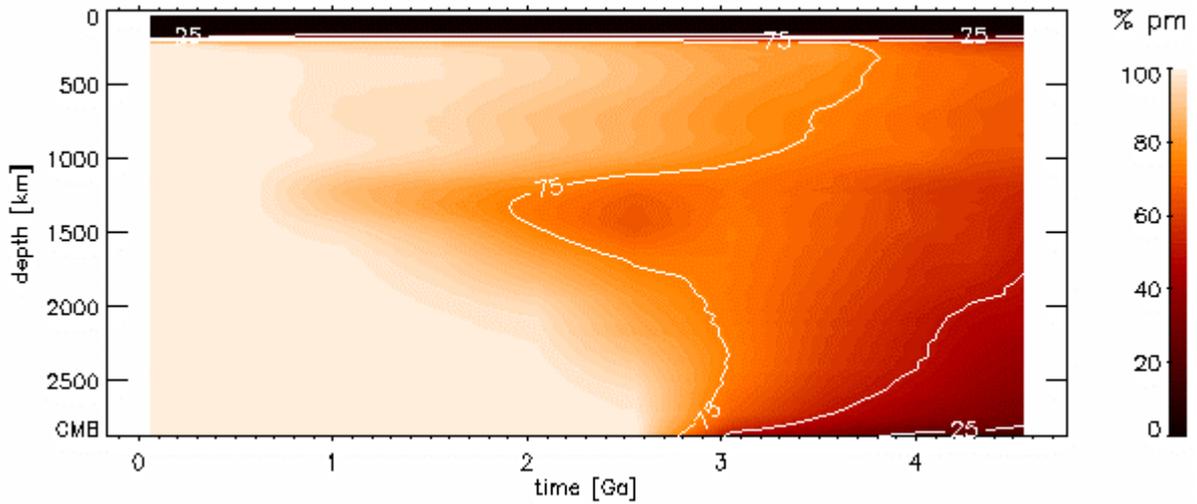
Abb. 5.10-21: Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung des toroidalen Anteils

### 5.10. Modell 649

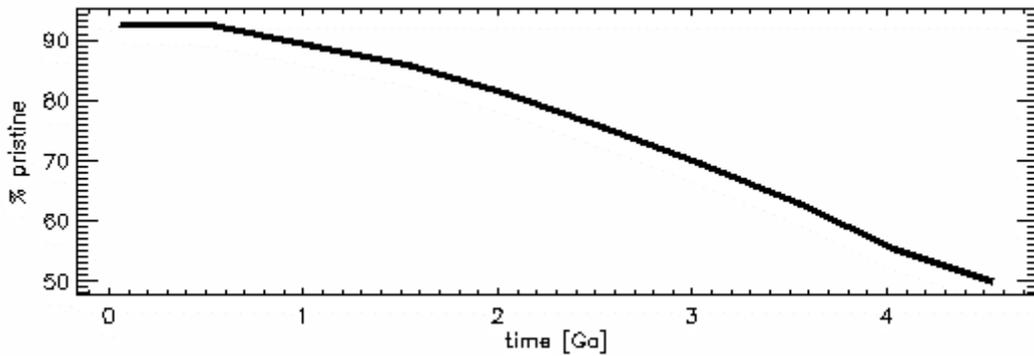


**Abb. 5.10-22:** Verteilung ursprünglichen Materials (pm) zu verschiedenen Zeiten

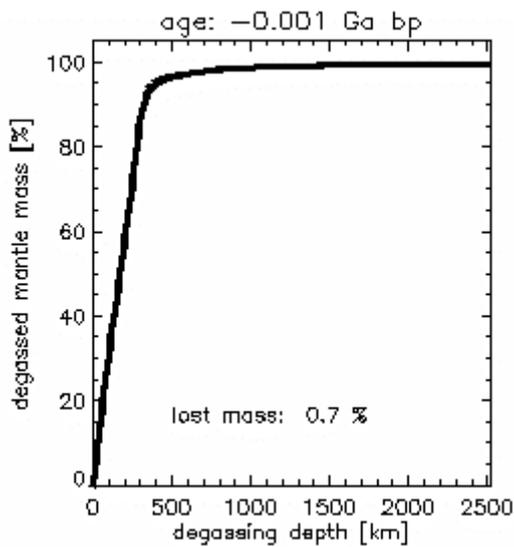
## 5.10. Modell 649



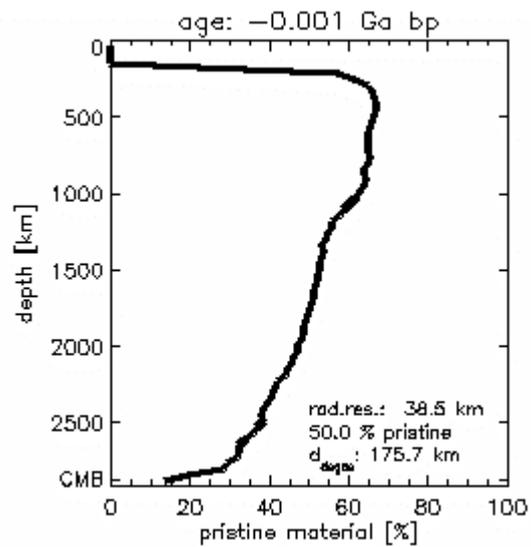
**Abb. 5.10-23:** Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung ursprünglichen Materials



**Abb. 5.10-24:** Abnahme ursprünglichen Materials im Mantel

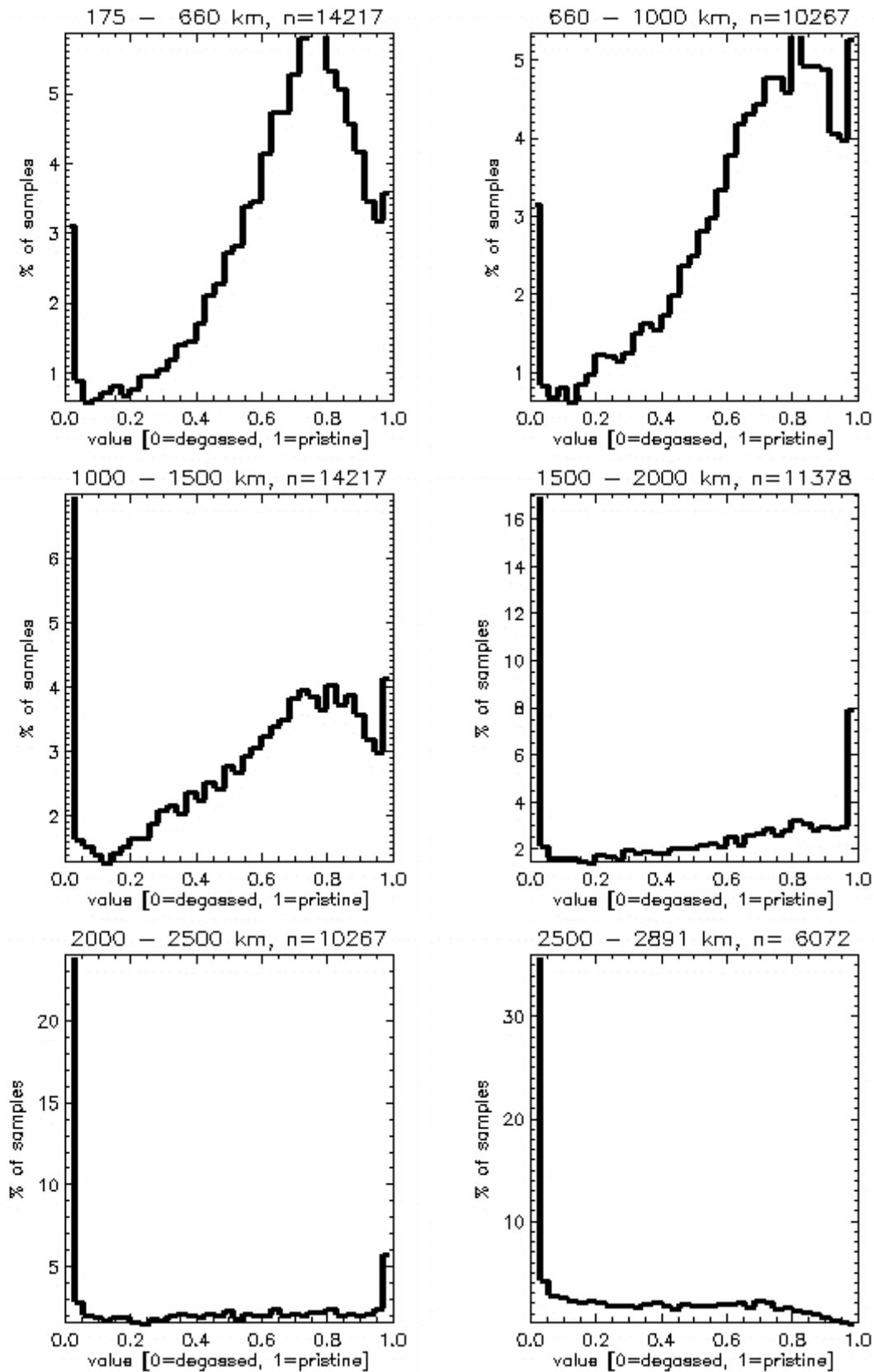


**Abb. 5.10-25:** Die Entgasungstiefe wird so festgelegt, dass am Ende der Rechnung 50 % des Mantels entgast sind



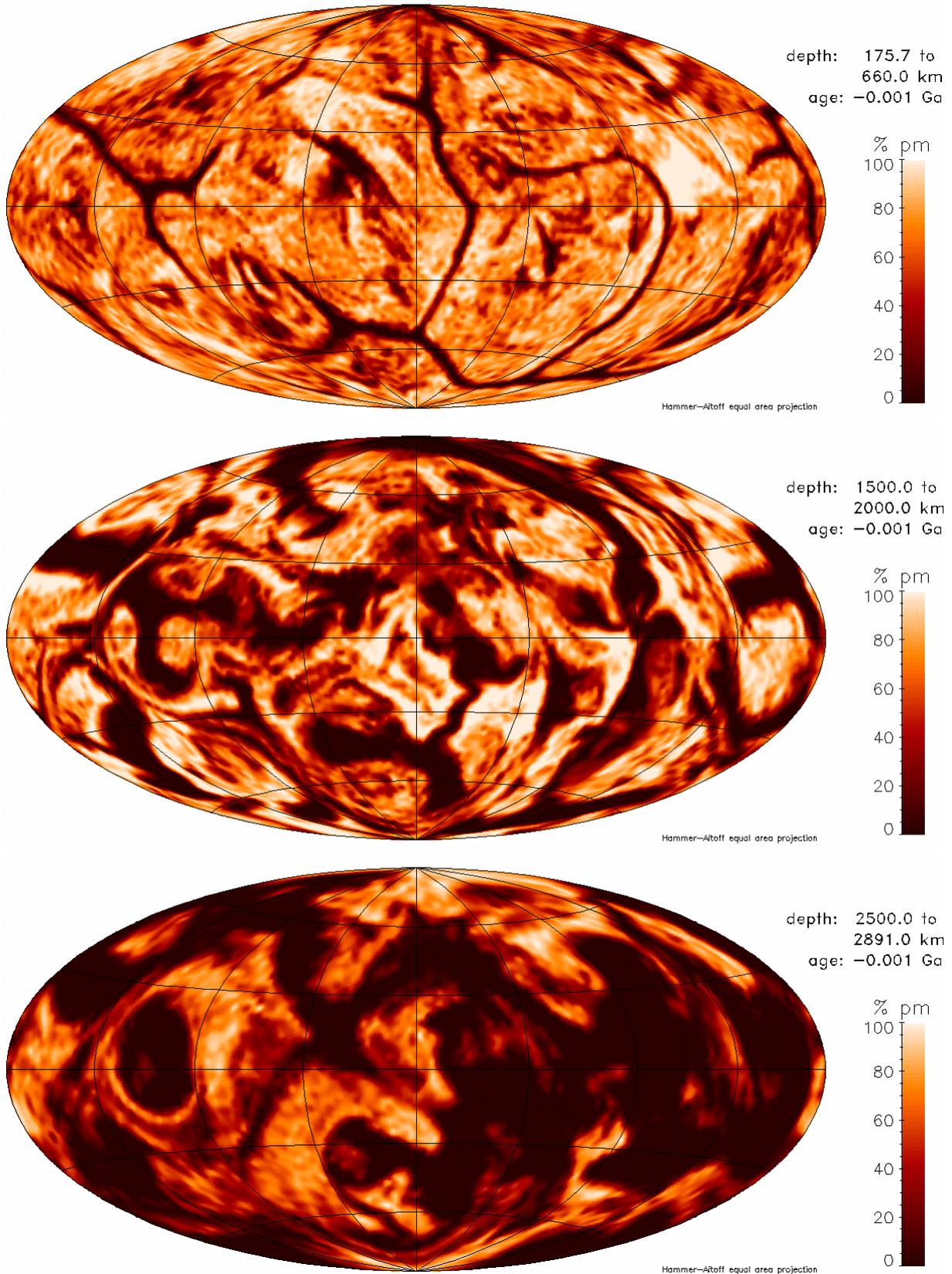
**Abb. 5.10-26:** Tiefenverteilung ursprünglichen Materials im heutigen Mantel

## 5.10. Modell 649



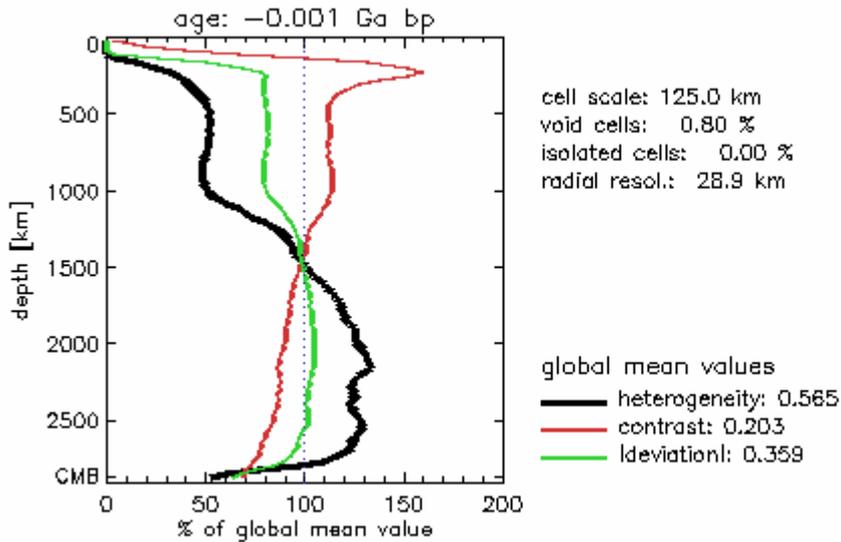
**Abb. 5.10-27:** Histogramme der Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Manteltiefen. Eine Probe repräsentiert den Mittelwert des gesamten radialen Intervalls. n ist die Anzahl der Unterteilungen der Kugelfläche in der jeweiligen Tiefe.

## 5.10. Modell 649

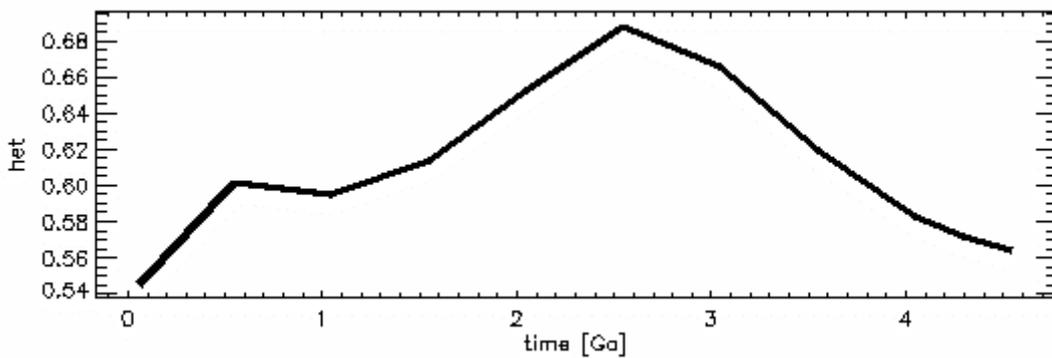


**Abb. 5.10-28:** Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Tiefenintervallen. Die laterale Auflösung entspricht der des jeweils passenden Histogramms in Abb. 5.10-27.

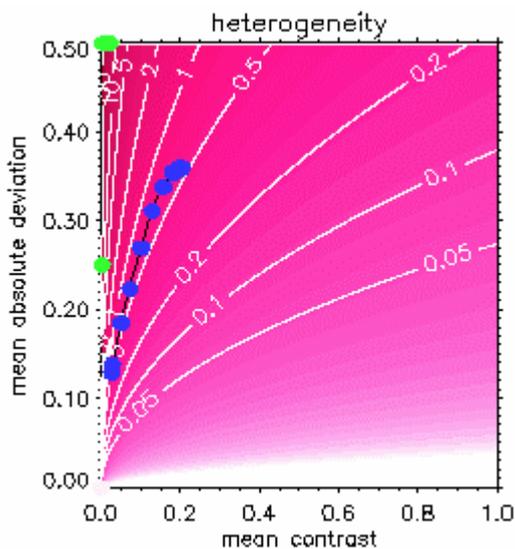
## 5.10. Modell 649



**Abb. 5.10-29:** Heutige Tiefenprofile der lateral gemittelten Werte von Heterogenität, Kontrast und mittlerer Absolutabweichung. Sie werden mit dem Mittelwert in der jeweiligen Kugelschale berechnet. Der globale Wert dient nur Skalierung der Abszisse.



**Abb. 5.10-30:** Zeitliche Entwicklung der Heterogenität



**Abb. 5.10-31:** Entwicklung der globalen Mittelwerte von Heterogenität, mittlerer Absolutabweichung und Kontrast.

Jeder blaue Punkt entspricht einem ausgewerteten Zeitschritt. Die schwarze Verbindungslinie folgt der zeitlichen Entwicklung. Der älteste Zeitschritt liegt näher am Koordinatenursprung als die jüngeren. Die grünen Punkte markieren die Lage der in Kapitel 4.2.3 vorgestellten Referenzmodelle.

Die rötliche Farbkodierung mit Höhenlinien stellt den Wert der Heterogenität dar.

5.11. Modell 651

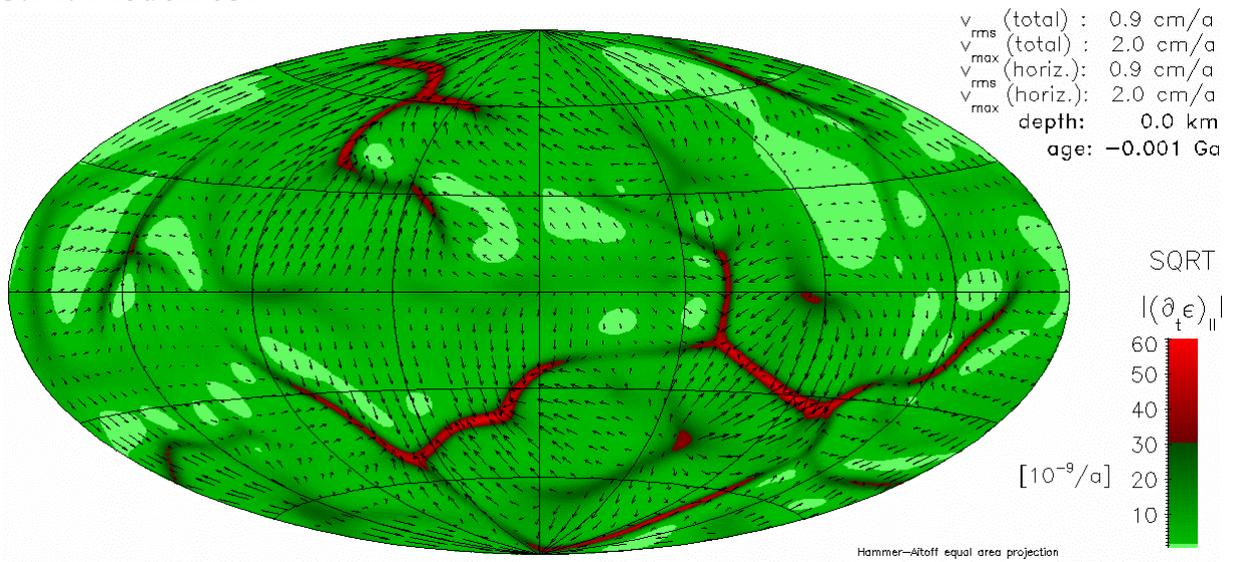


Abb. 5.11-37: Wurzel des Betrages der zweiten Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors

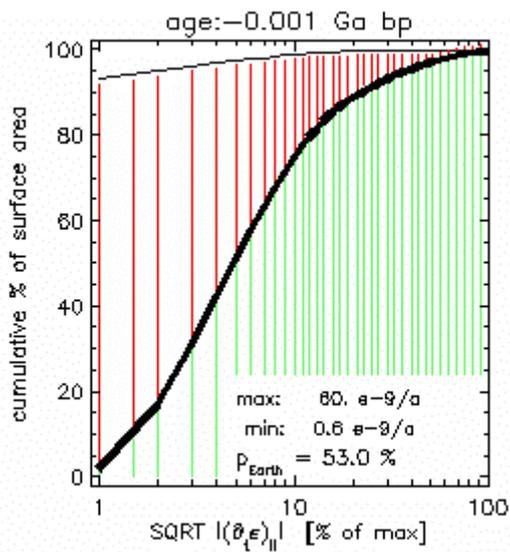


Abb. 5.11-38: Plattigkeit an der Oberfläche

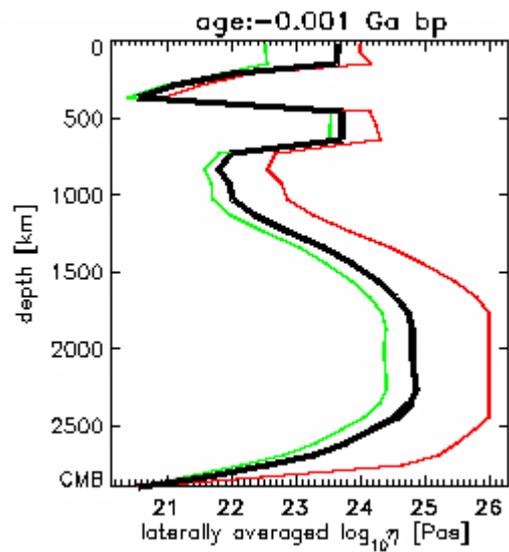


Abb. 5.11-39: Viskositätsprofil

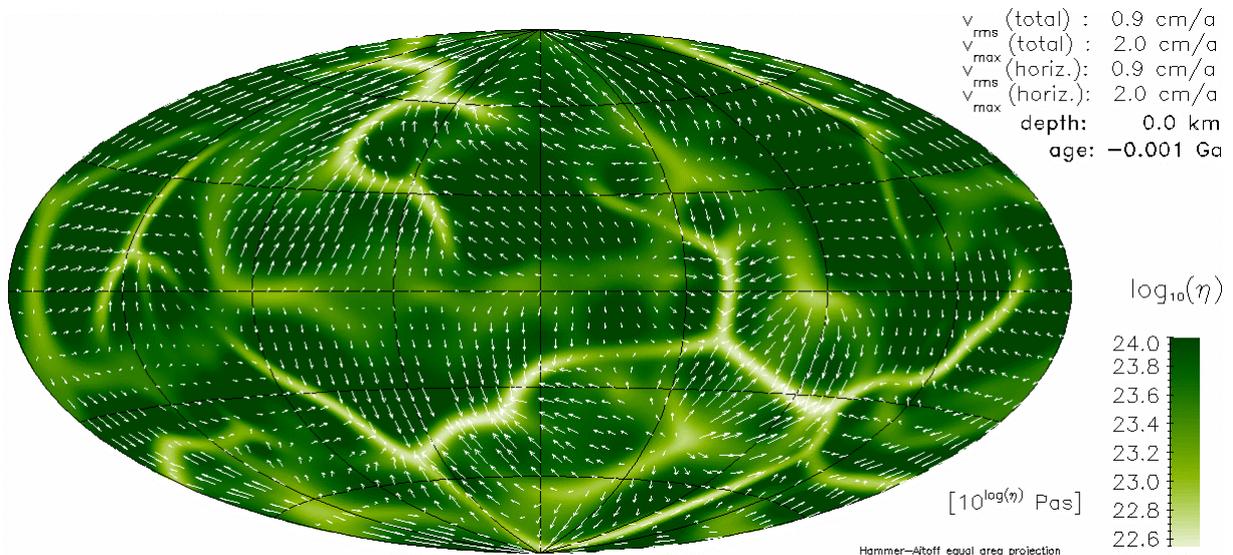
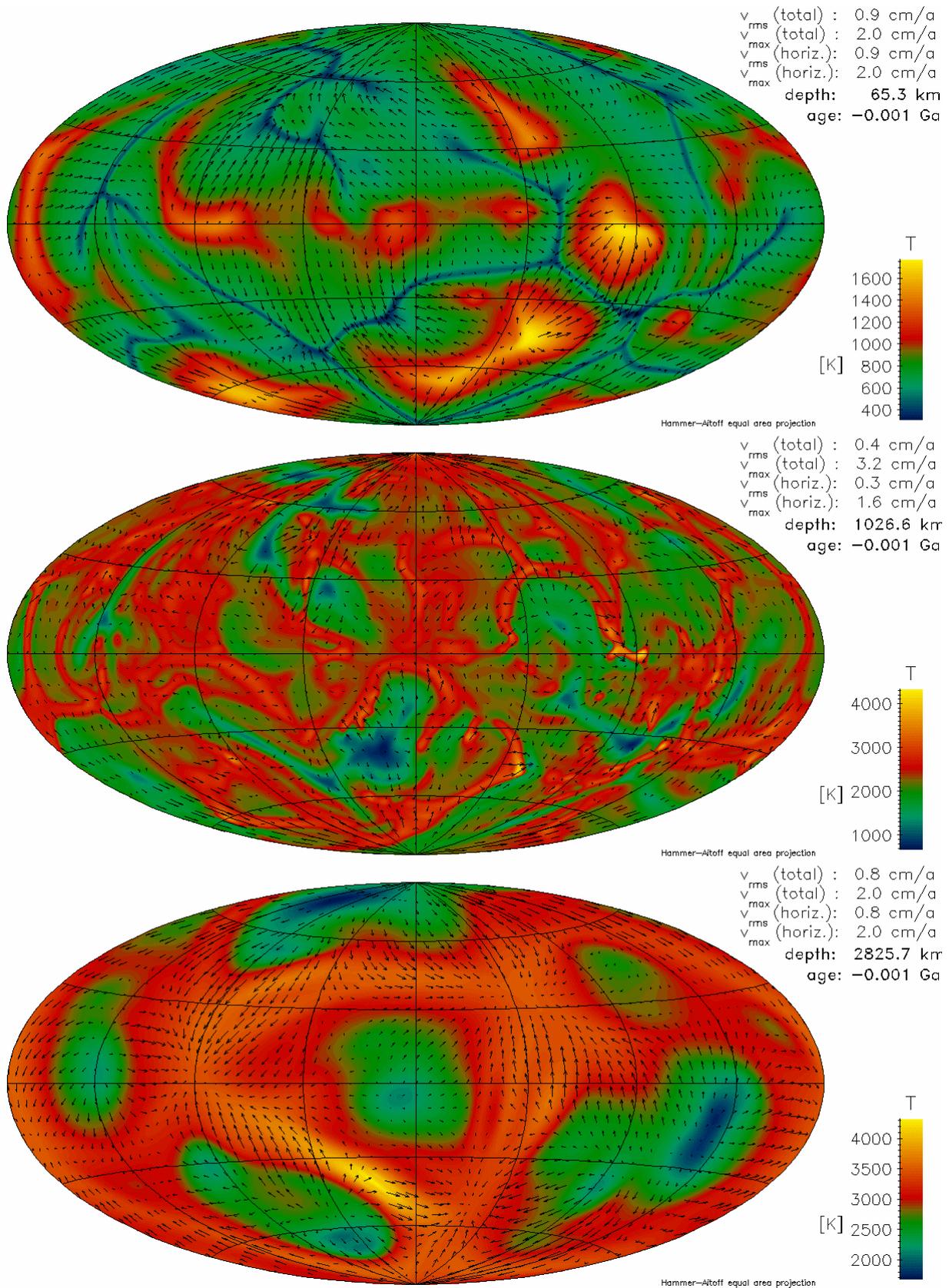


Abb. 5.11-40: Viskosität an der Oberfläche

## 5.11. Modell 651



**Abb. 5.11-5:** Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten nahe der Oberfläche, im oberen Mantel und nahe der Kern-Mantel-Grenze

## 5.11. Modell 651

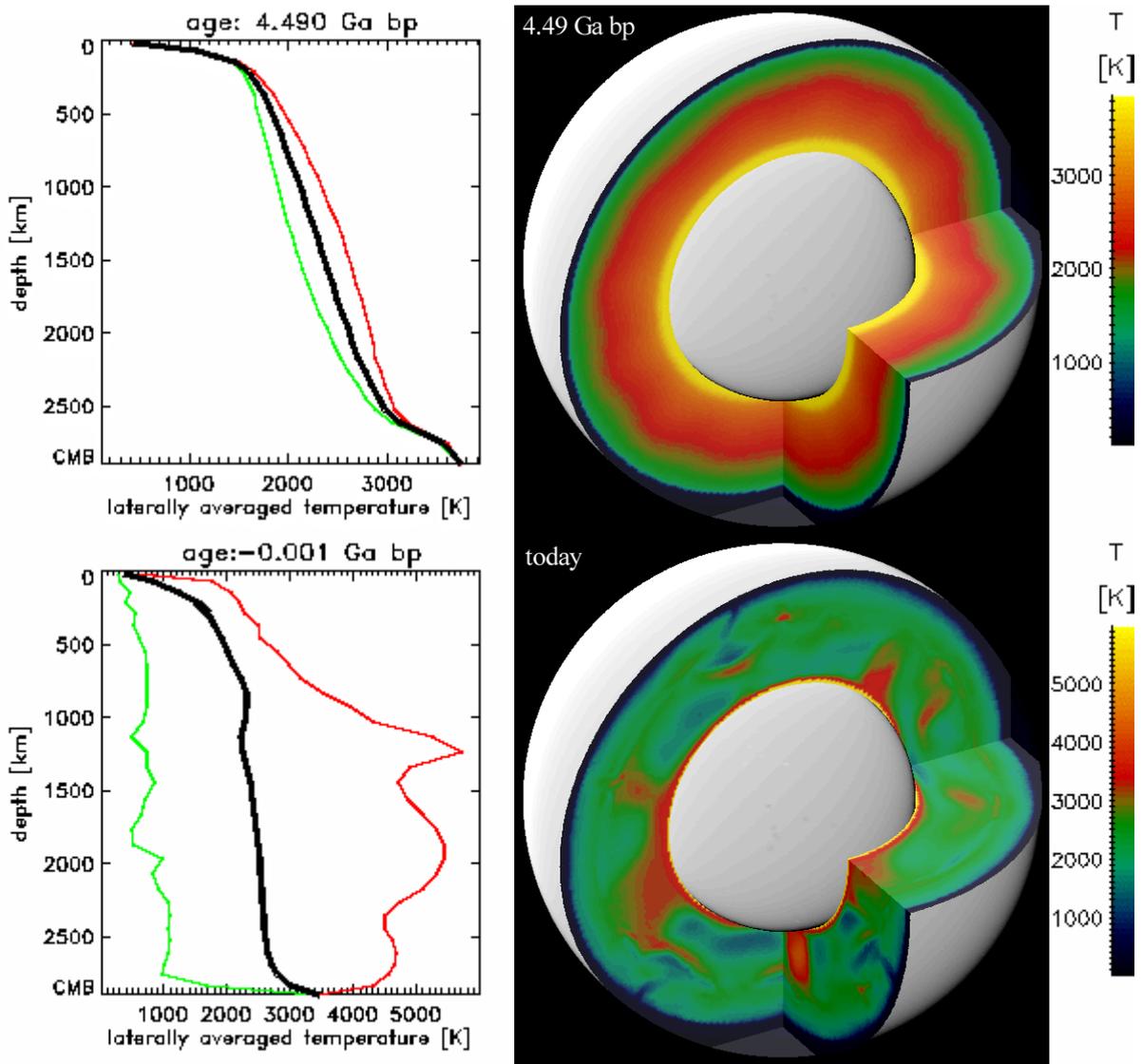


Abb. 5.11-6: Temperaturverteilung im Mantel am Anfang der Rechnung und heute

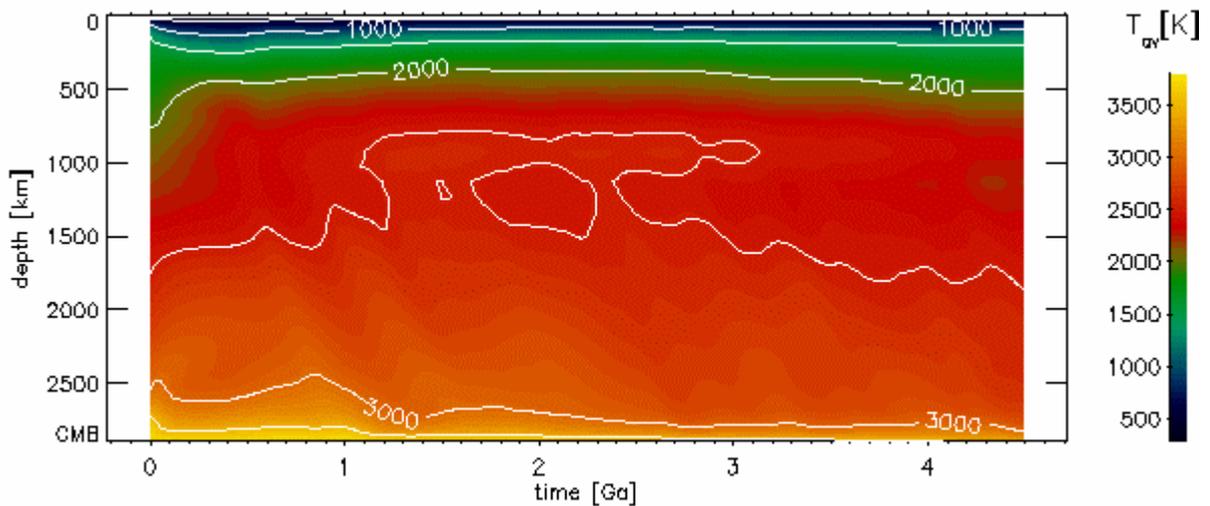
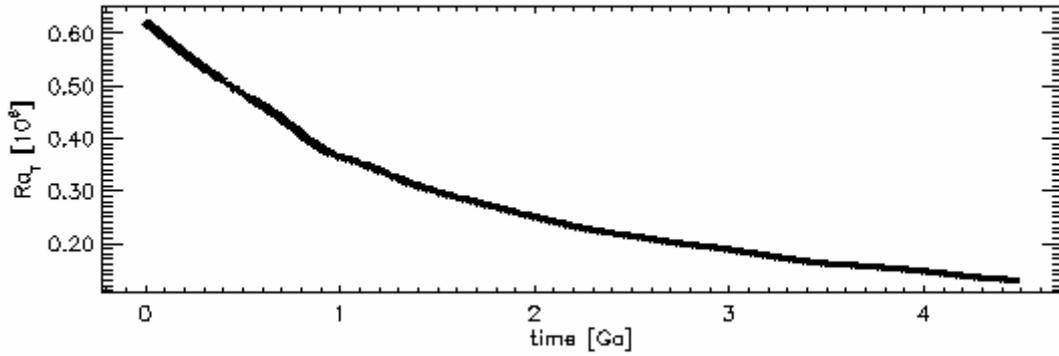
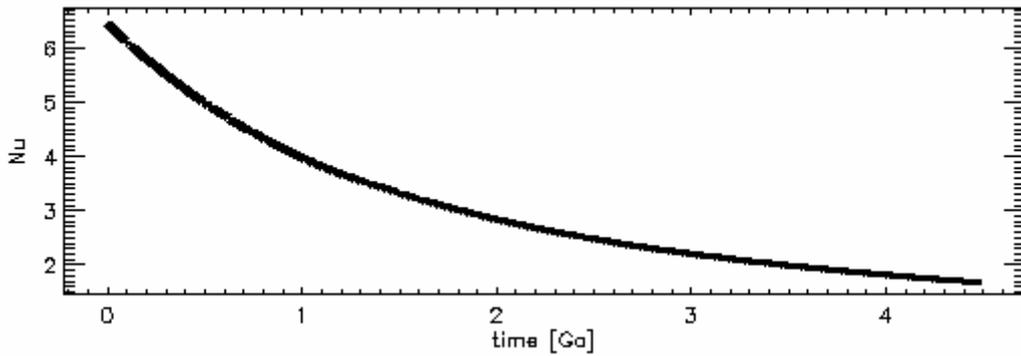


Abb. 5.11-7: Zeitliche Entwicklung des Temperaturprofils

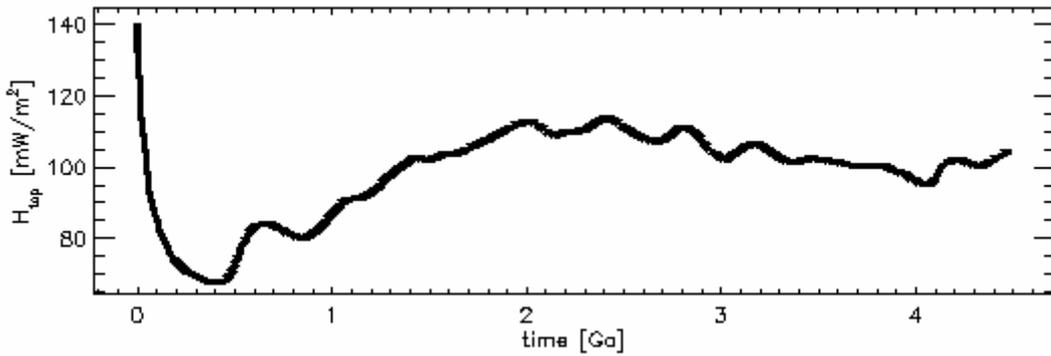
## 5.11. Modell 651



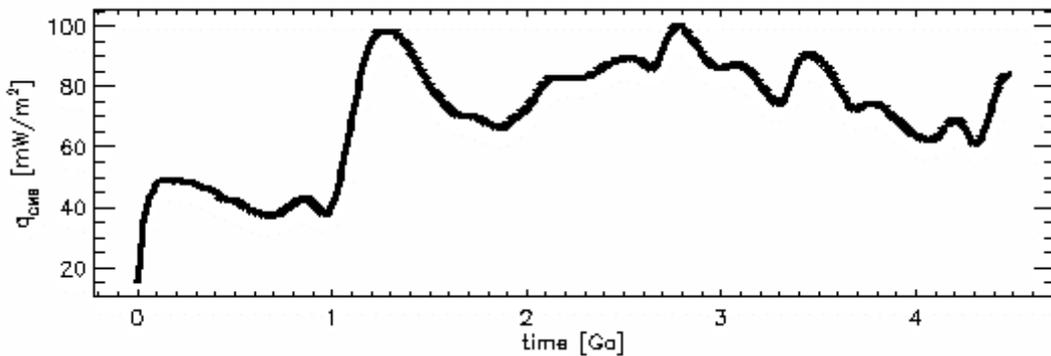
**Abb. 5.11-8:** Zeitliche Entwicklung der Rayleigh-Zahl



**Abb. 5.11-9:** Zeitliche Entwicklung der Nusselt-Zahl

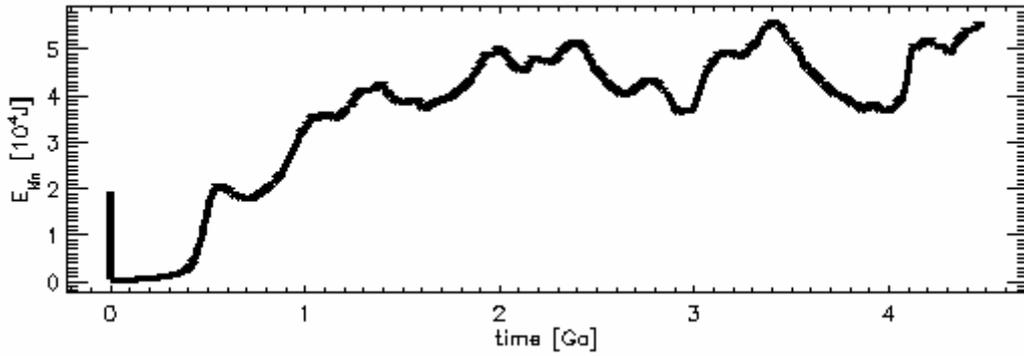


**Abb. 5.11-10:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Oberfläche

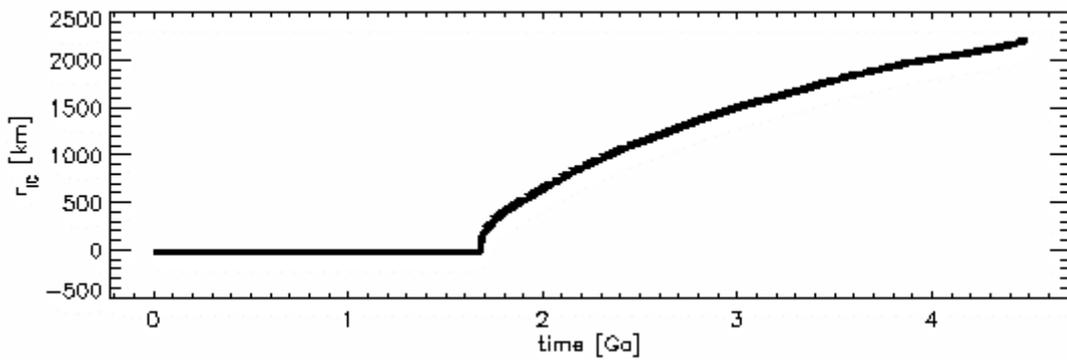


**Abb. 5.11-11:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Kern-Mantel-Grenze

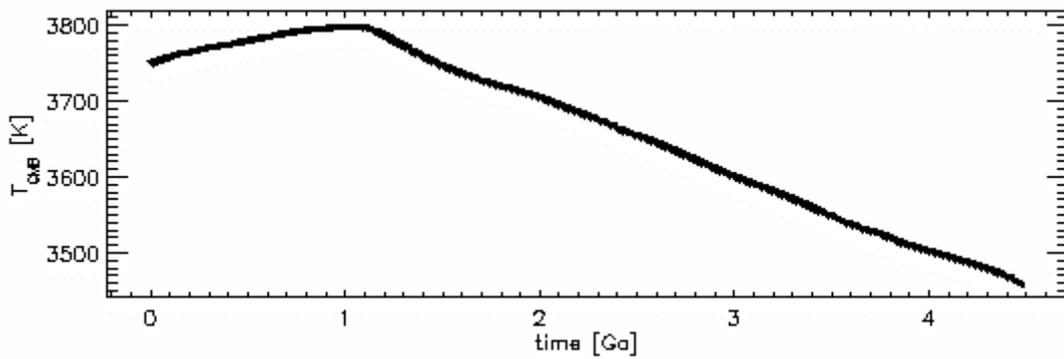
### 5.11. Modell 651



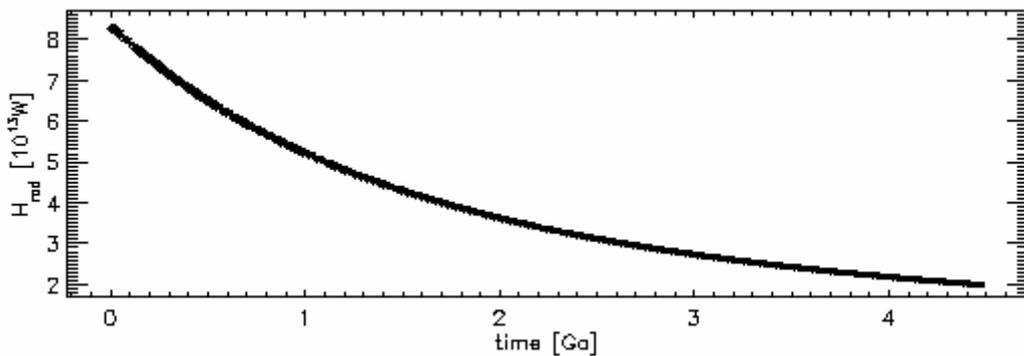
**Abb. 5.11-12:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des gesamten Mantels



**Abb. 5.11-13:** Zeitliche Entwicklung des Innenkernradius

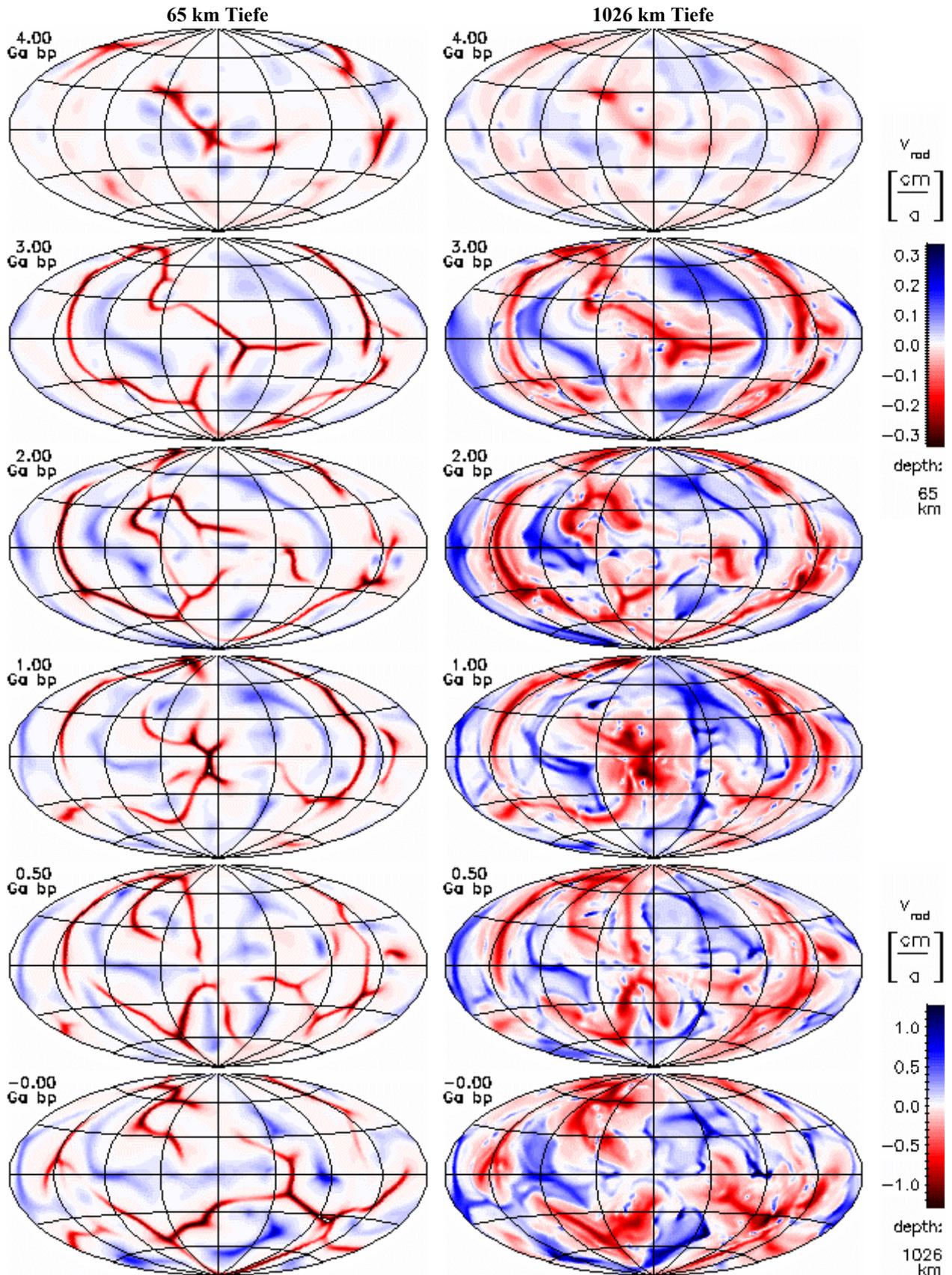


**Abb. 5.11-14:** Zeitliche Entwicklung der Temperatur an der CMB



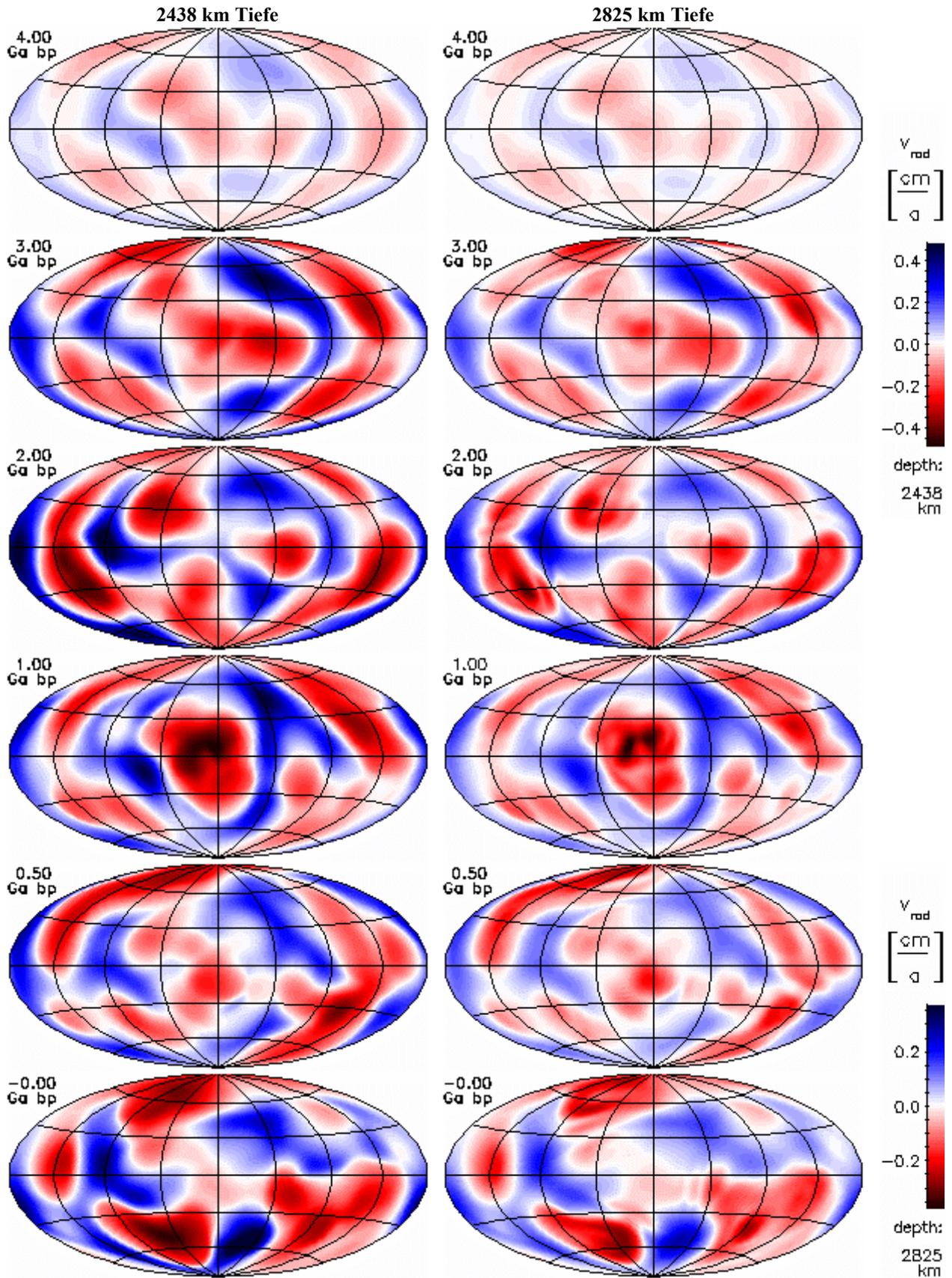
**Abb. 5.11-15:** Zeitliche Entwicklung der Heizleistung durch Zerfall von  $^{40}K$ ,  $^{42}Th$ ,  $^{235}U$  und  $^{238}U$

## 5.11. Modell 651



**Abb. 5.11-16:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente nahe der Oberfläche und im unteren Mantel. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind eventuell abgeschnitten.

## 5.11. Modell 651



**Abb. 5.11-17:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente im hochviskosen Teil des unteren Mantels und nahe der CMB. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind evtl. abgeschnitten.

## 5.11. Modell 651

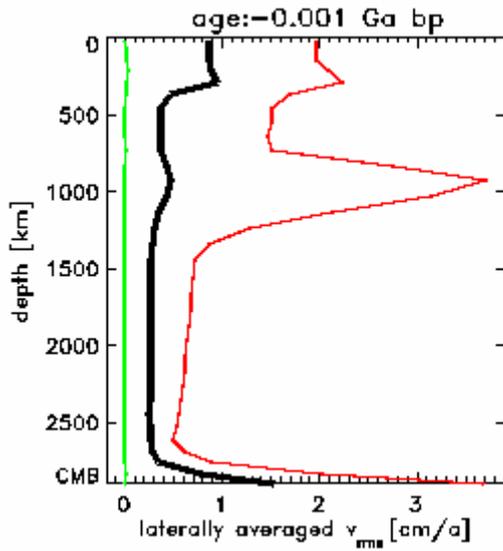


Abb. 5.11-18: Heutiges Geschwindigkeitsprofil

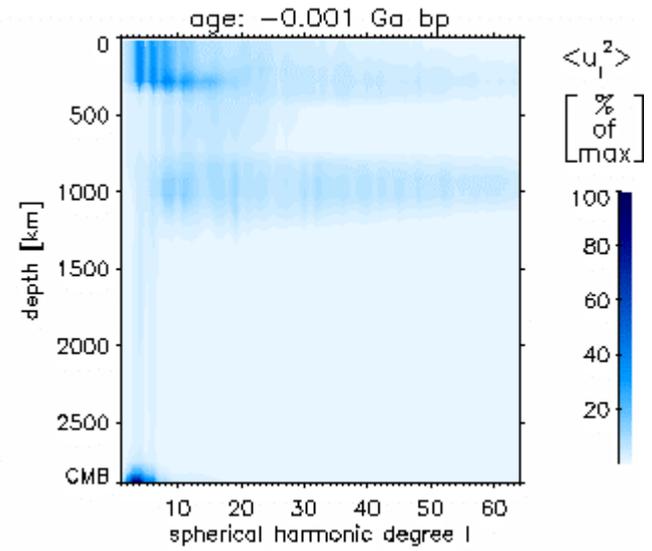


Abb. 5.11-19: Spektrum von toroidaler plus poloidaler kinetischer Energie

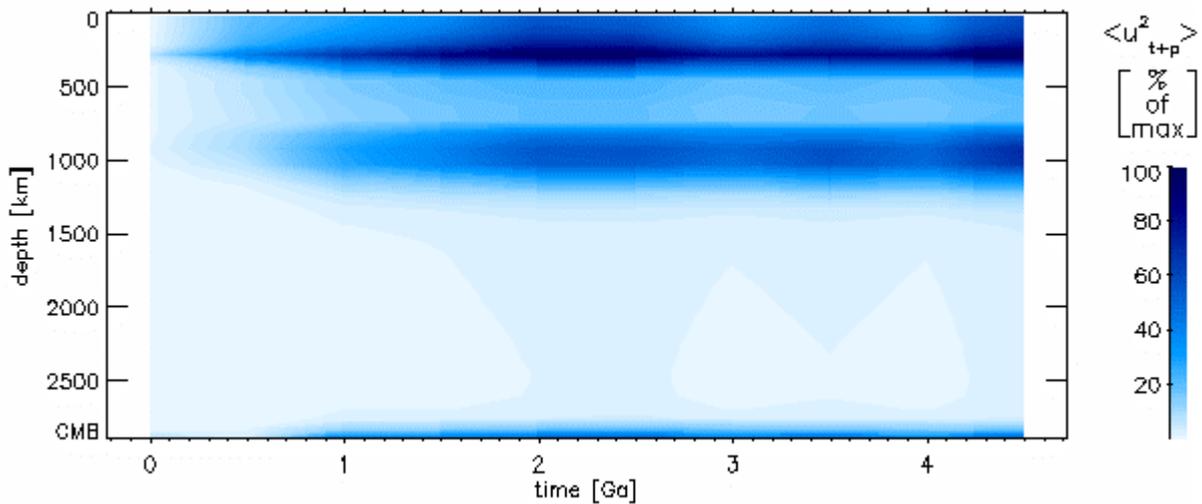


Abb. 5.11-20: Entwicklung der Summe von poloidaler und toroidaler Energie

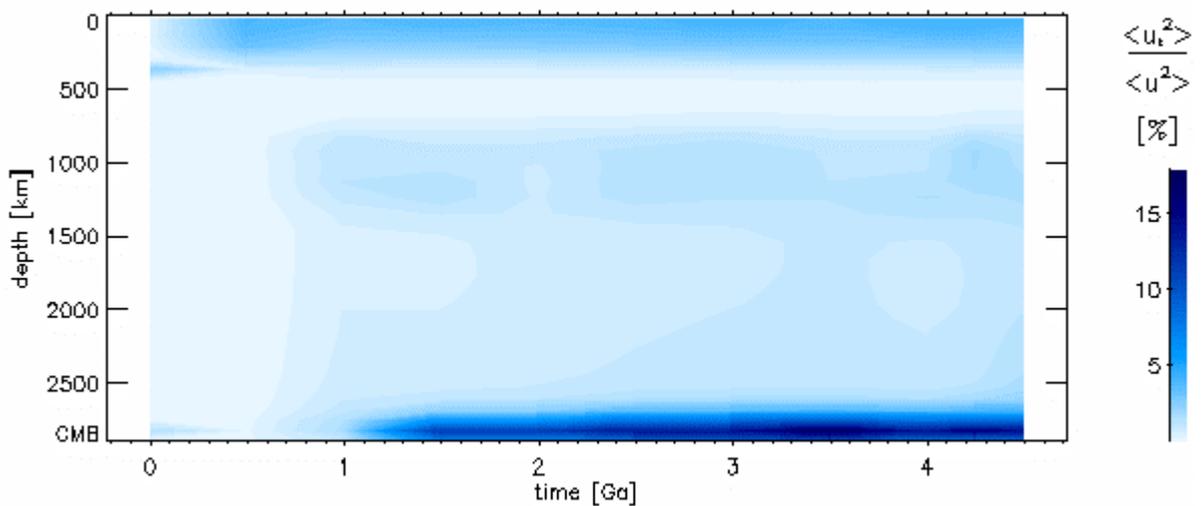
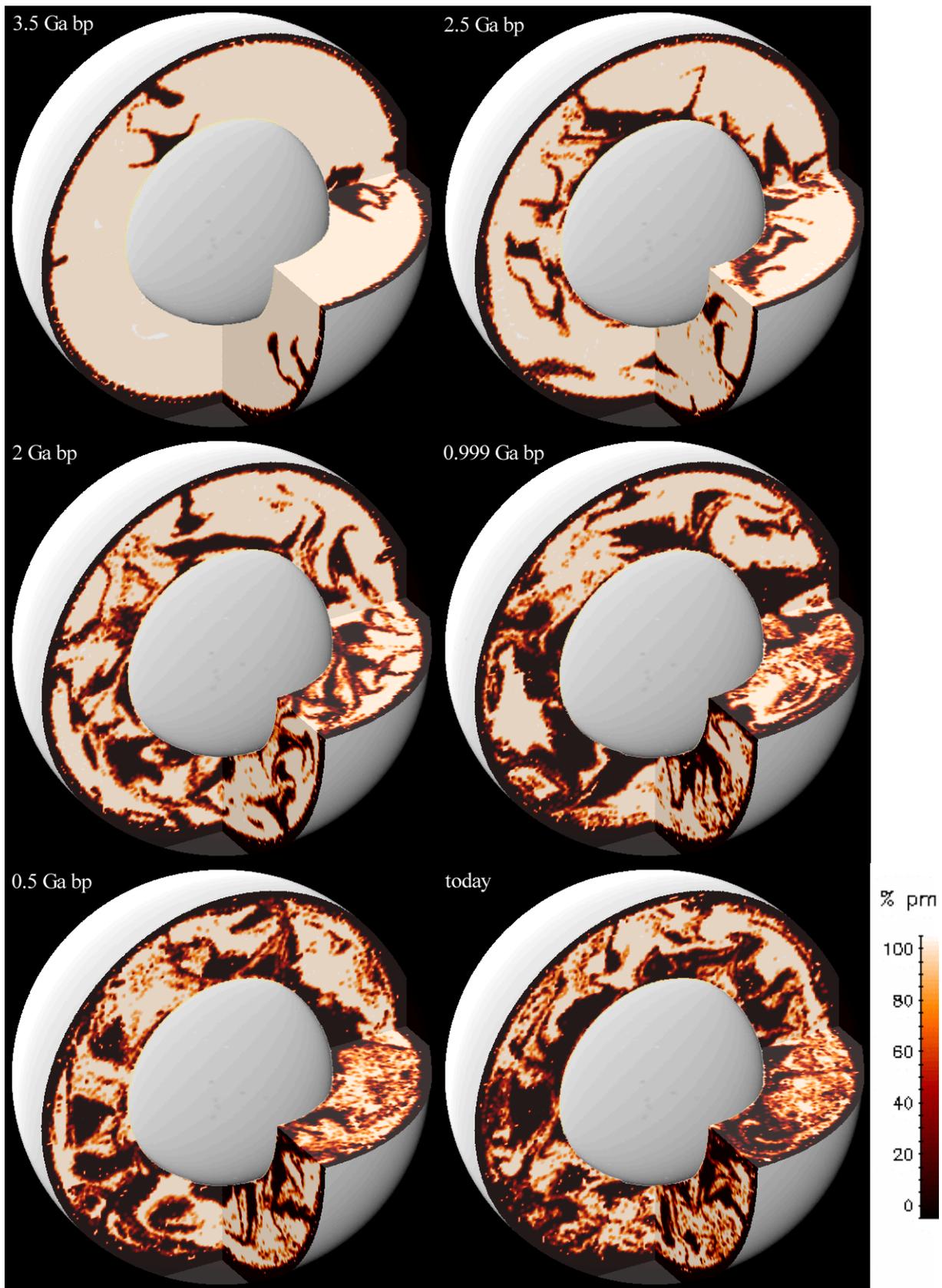


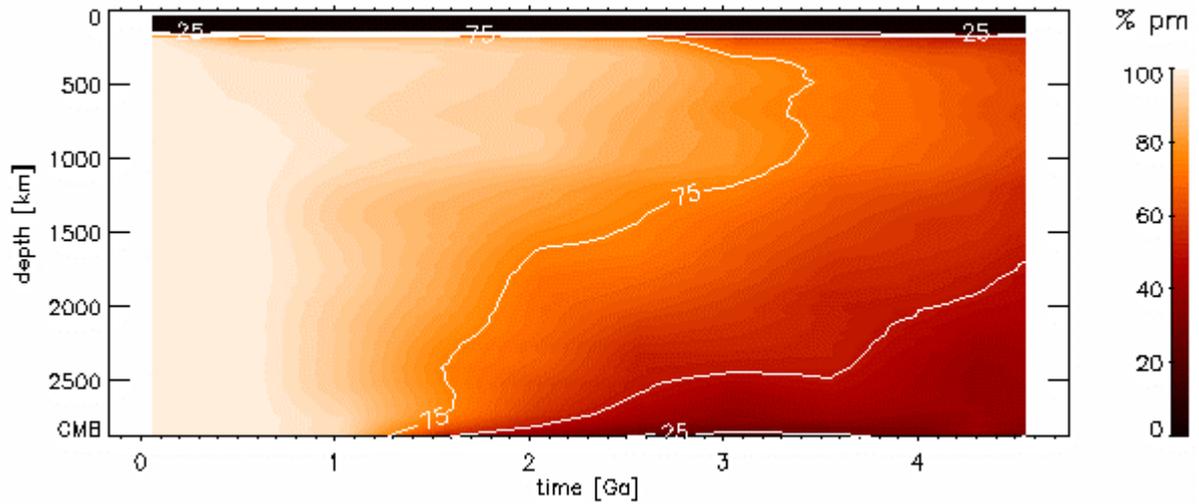
Abb. 5.11-21: Entwicklung der Tiefenverteilung des toroidalen Anteils

### 5.11. Modell 651

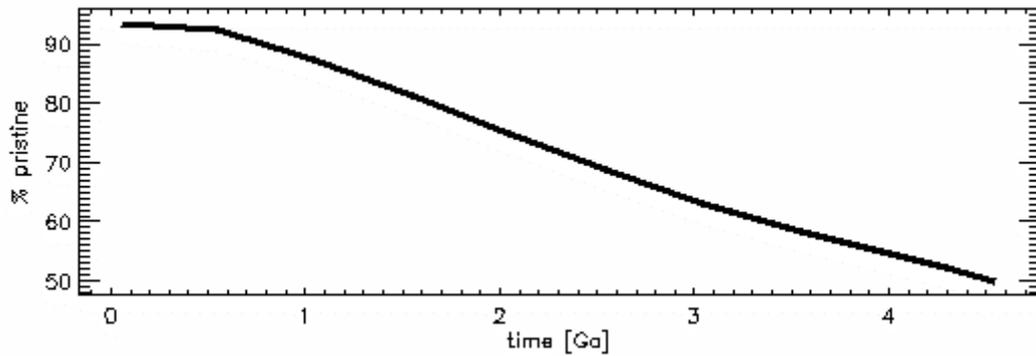


**Abb. 5.11-22:** Verteilung ursprünglichen Materials (prm) zu verschiedenen Zeiten

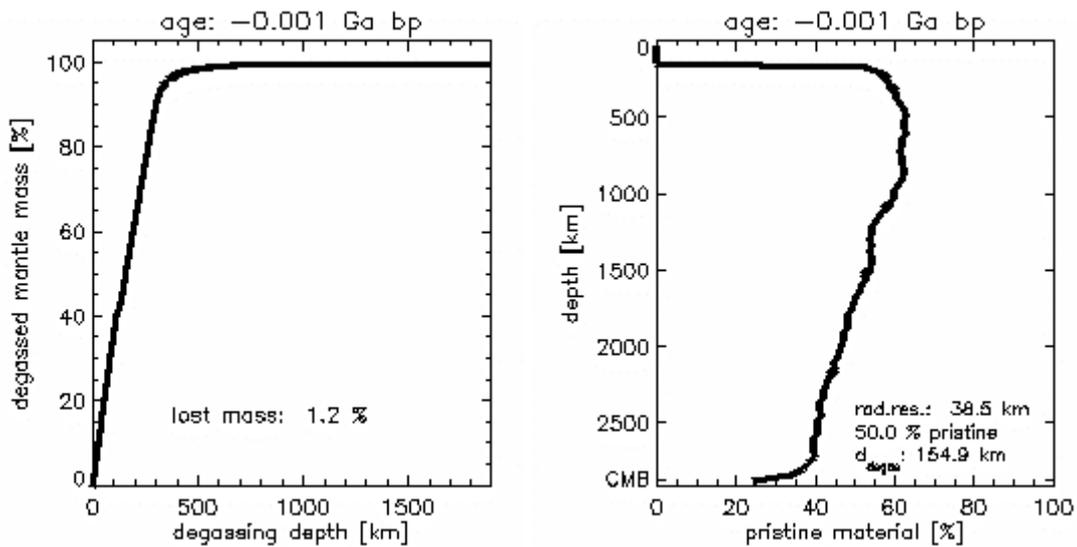
## 5.11. Modell 651



**Abb. 5.11-23:** Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung ursprünglichen Materials



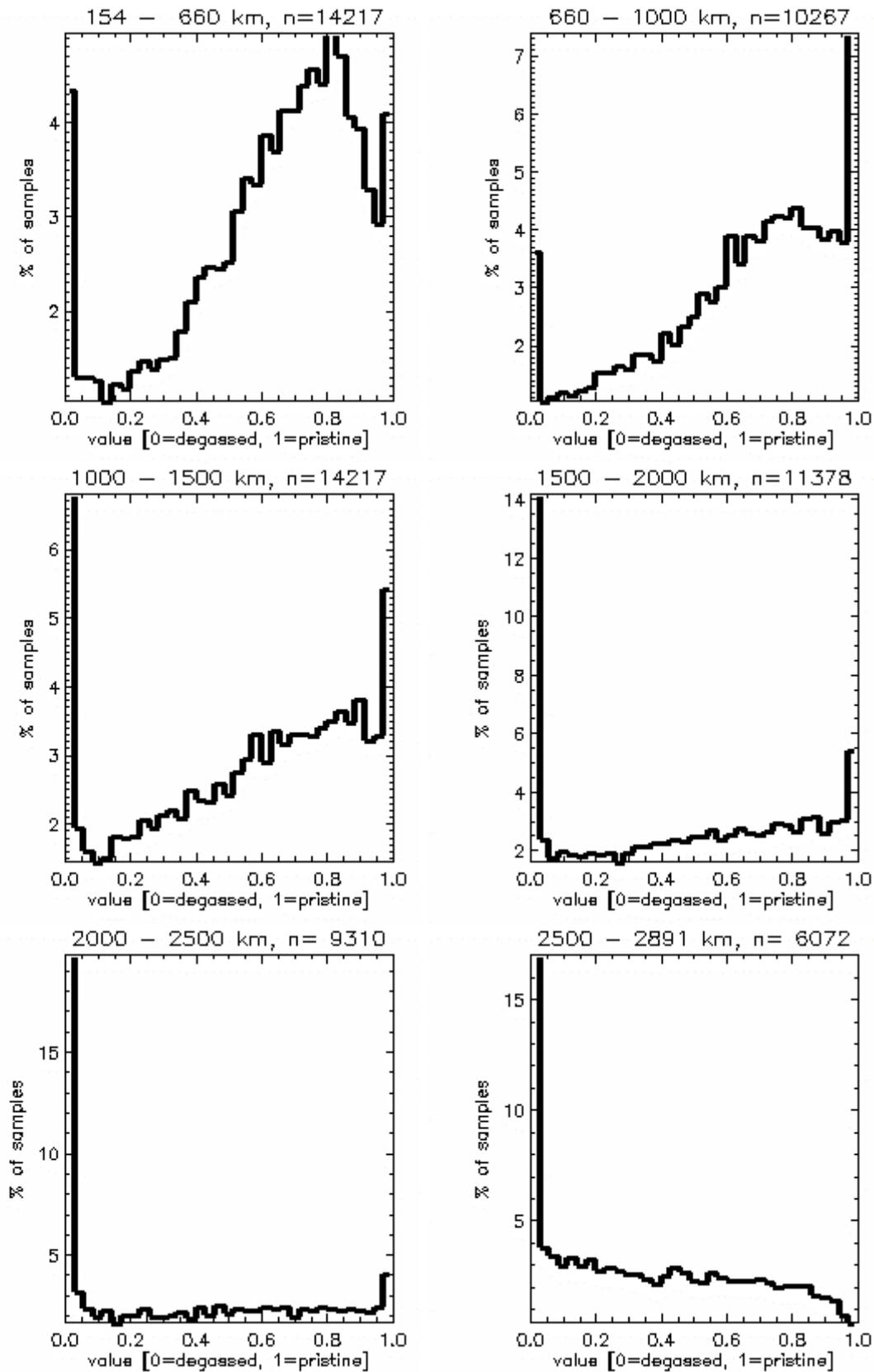
**Abb. 5.11-24:** Abnahme ursprünglichen Materials im Mantel



**Abb. 5.11-25:** Die Entgasungstiefe wird so festgelegt, dass am Ende der Rechnung 50 % des Mantels entgast sind

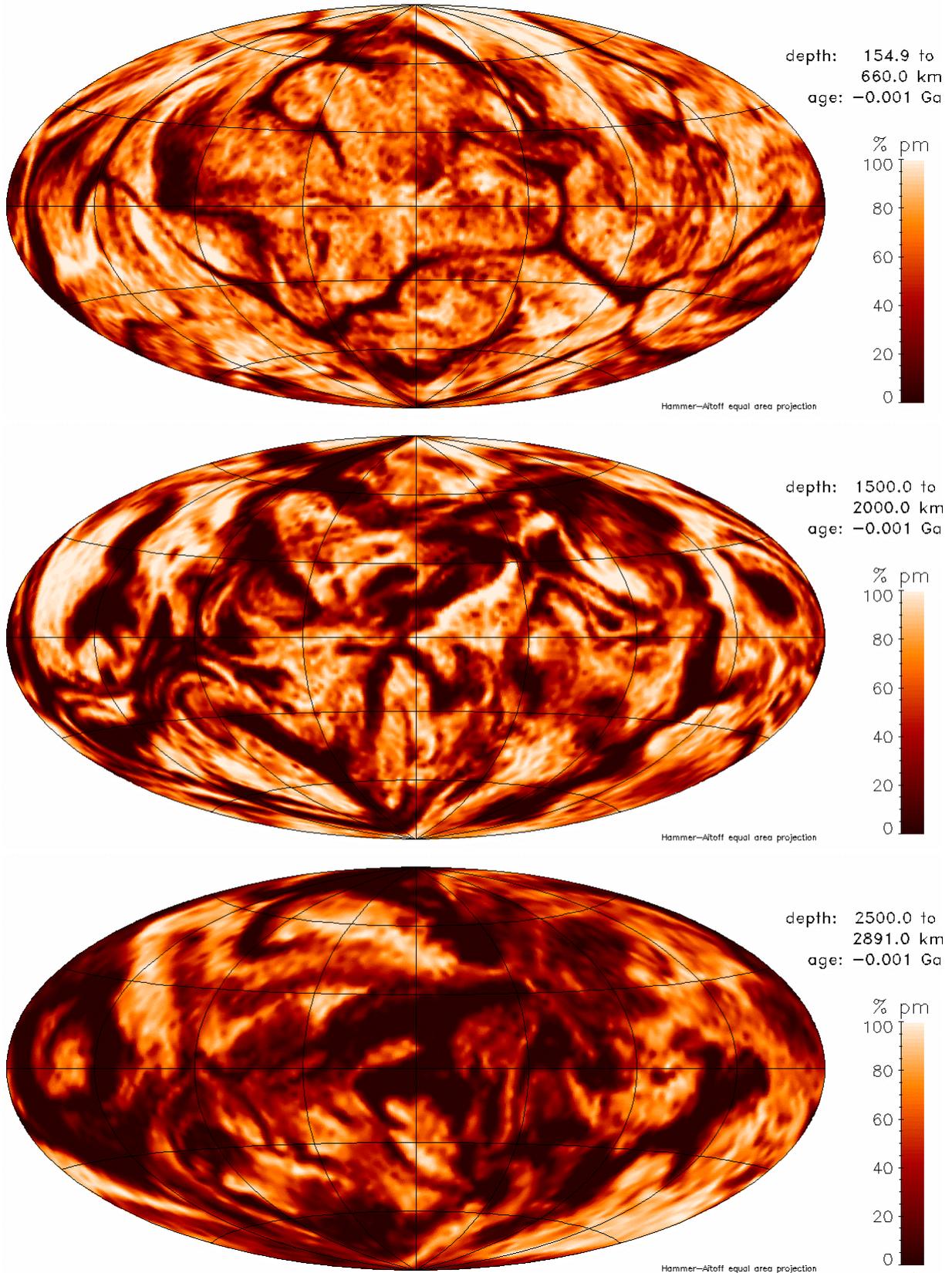
**Abb. 5.11-26:** Tiefenverteilung ursprünglichen Materials im heutigen Mantel

## 5.11. Modell 651



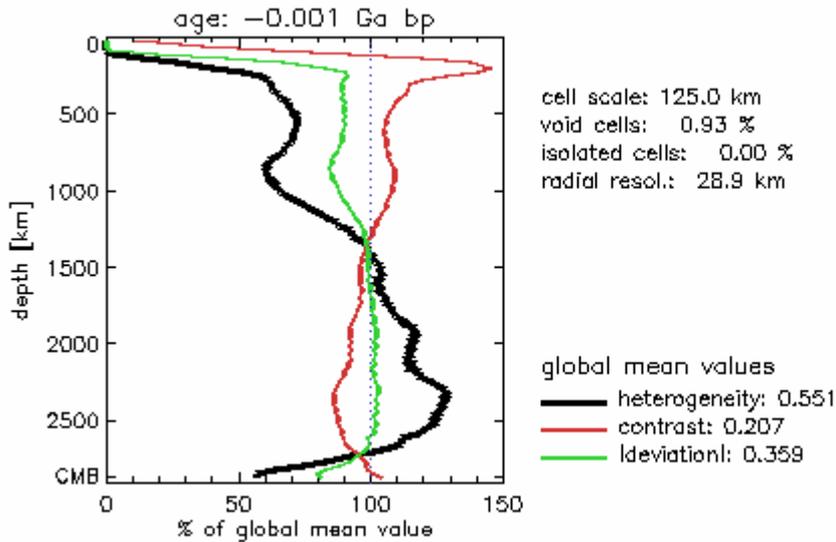
**Abb. 5.11-27:** Histogramme der Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Manteltiefen. Eine Probe repräsentiert den Mittelwert des gesamten radialen Intervalls. n ist die Anzahl der Unterteilungen der Kugelfläche in der jeweiligen Tiefe.

### 5.11. Modell 651

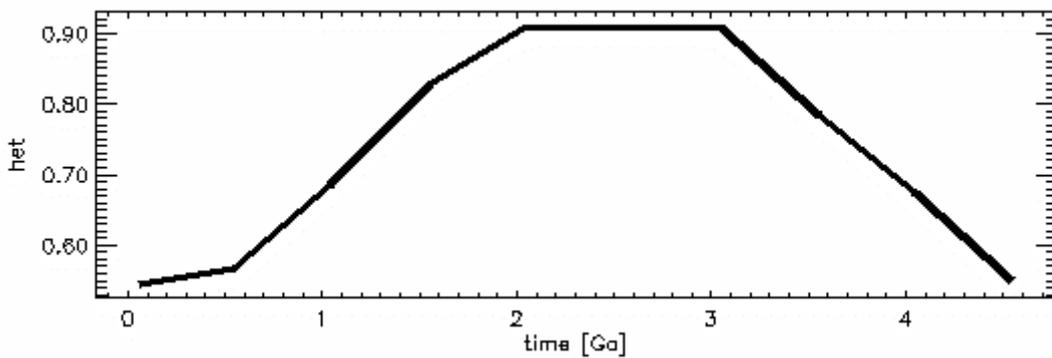


**Abb. 5.11-28:** Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Tiefenintervallen. Die laterale Auflösung entspricht der des jeweils passenden Histogramms in Abb. 5.11-27.

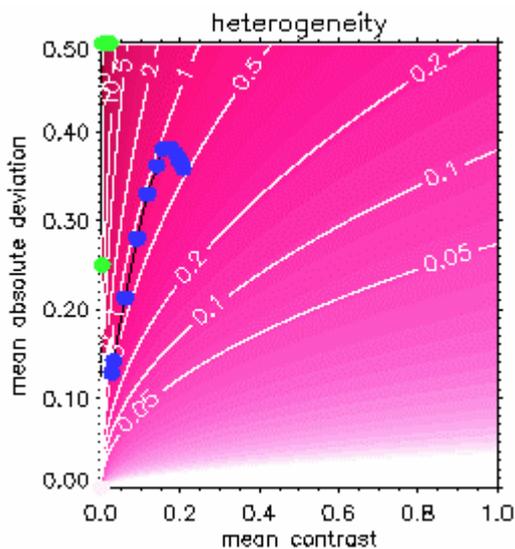
## 5.11. Modell 651



**Abb. 5.11-29:** Heutige Tiefenprofile der lateral gemittelten Werte von Heterogenität, Kontrast und mittlerer Absolutabweichung. Sie werden mit dem Mittelwert in der jeweiligen Kugelschale berechnet. Der globale Wert dient nur Skalierung der Abszisse.



**Abb. 5.11-30:** Zeitliche Entwicklung der Heterogenität



**Abb. 5.11-31:** Entwicklung der globalen Mittelwerte von Heterogenität, mittlerer Absolutabweichung und Kontrast.

Jeder blaue Punkt entspricht einem ausgewerteten Zeitschritt. Die schwarze Verbindungslinie folgt der zeitlichen Entwicklung. Der älteste Zeitschritt liegt näher am Koordinatenursprung als die jüngeren. Die grünen Punkte markieren die Lage der in Kapitel 4.2.3 vorgestellten Referenzmodelle.

Die rötliche Farbkodierung mit Höhenlinien stellt den Wert der Heterogenität dar.

5.12. Modell 652

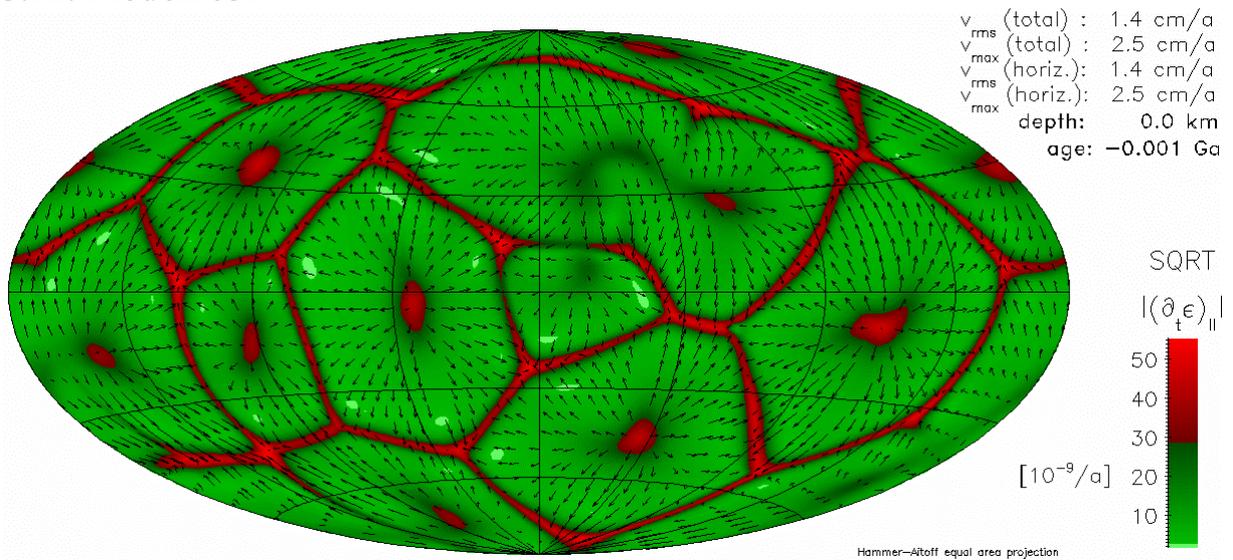


Abb. 5.12-41: Wurzel des Betrages der zweiten Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors

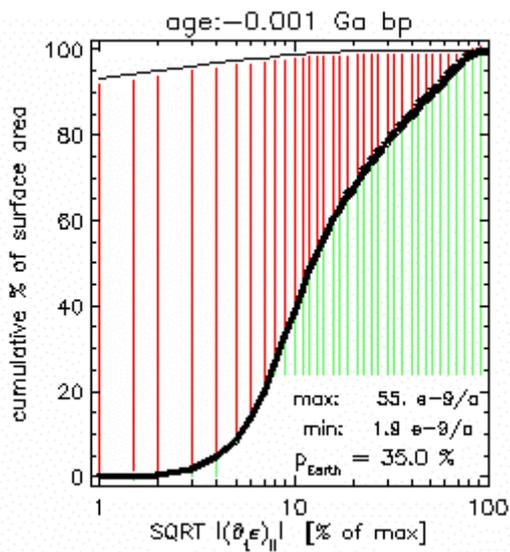


Abb. 5.12-42: Plattigkeit an der Oberfläche

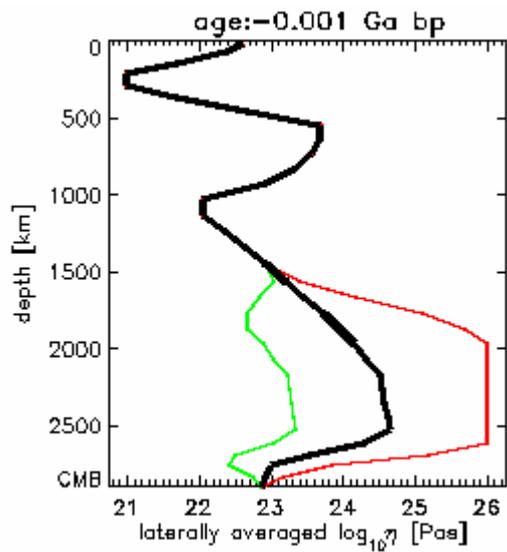


Abb. 5.12-43: Viskositätsprofil

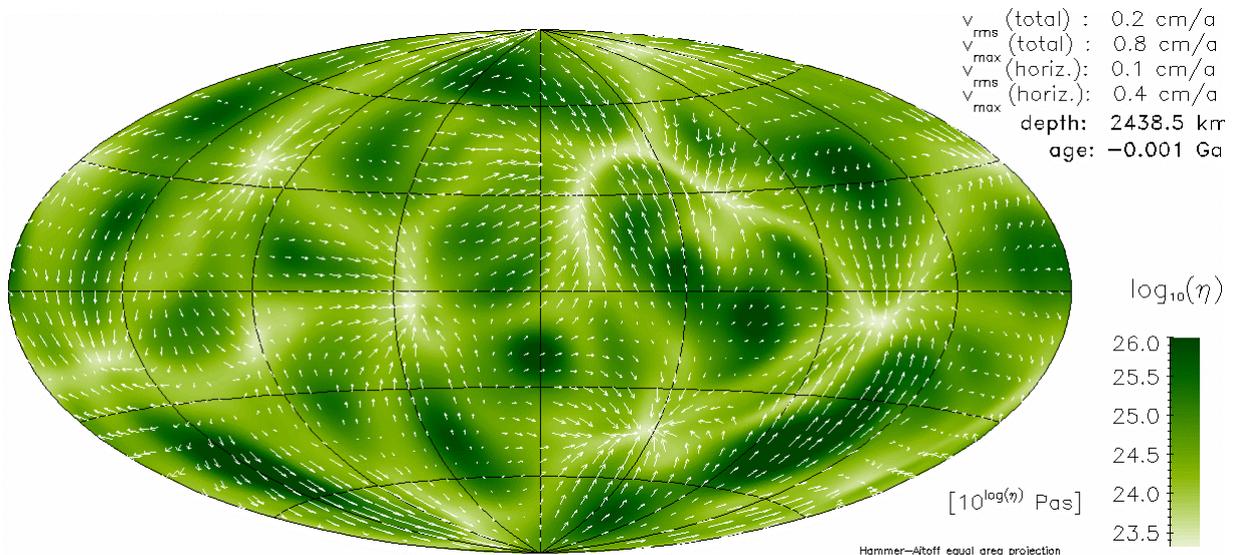
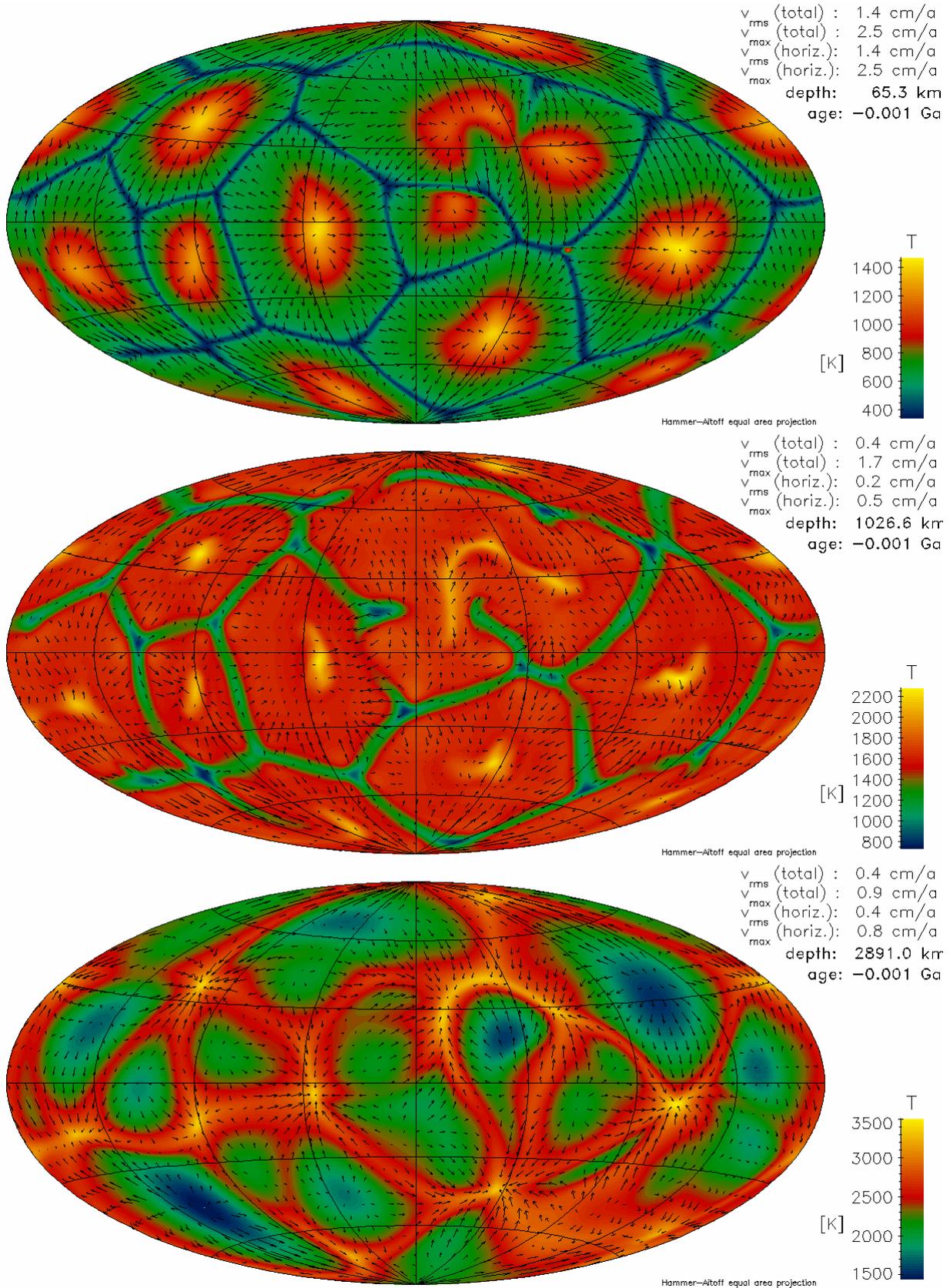


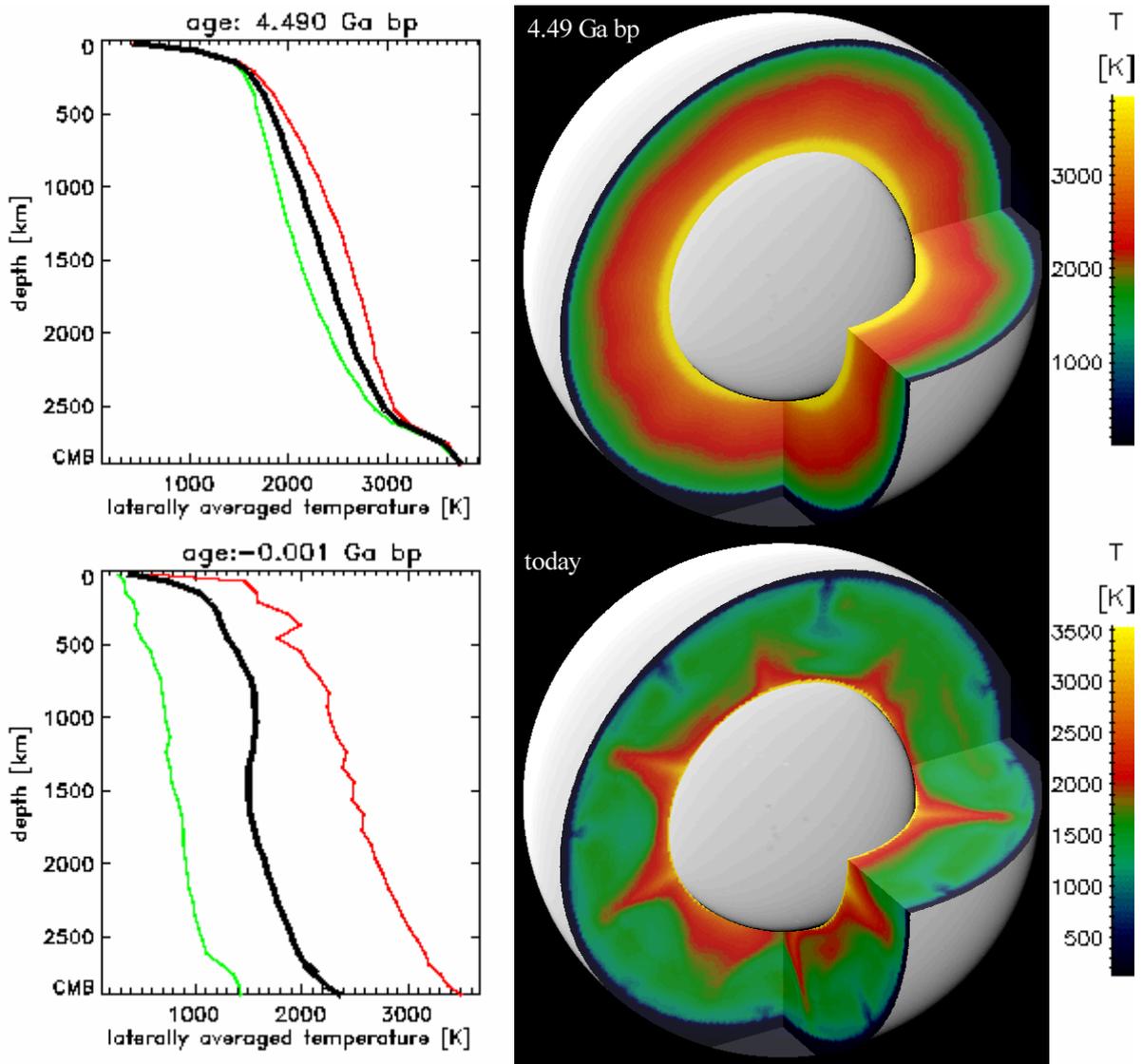
Abb. 5.12-44: Viskosität im unteren Mantel

## 5.12. Modell 652

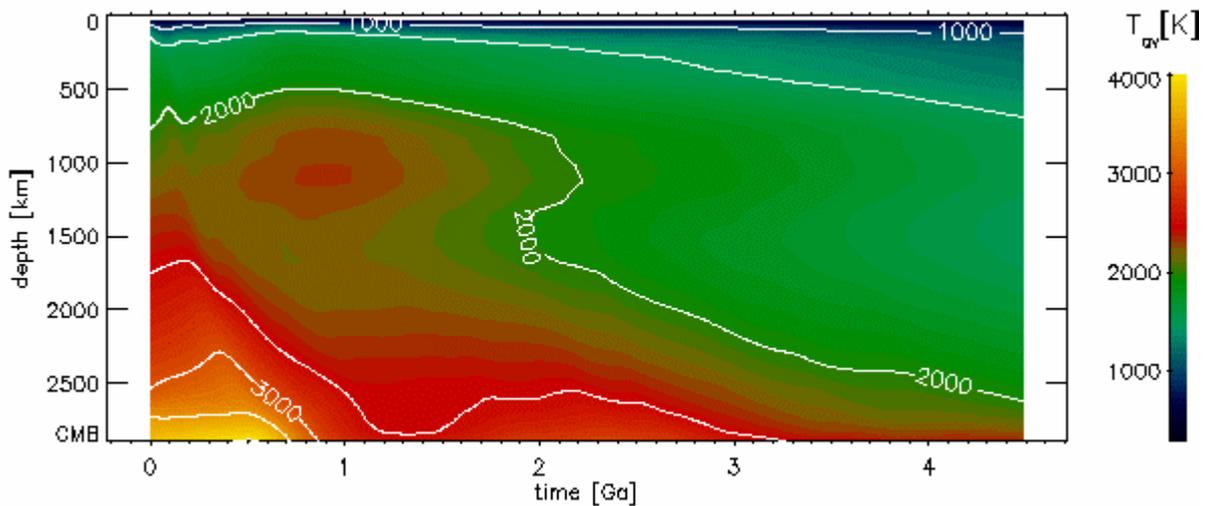


**Abb. 5.12-5:** Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten nahe der Oberfläche, im unteren Mantel und nahe der Kern-Mantel-Grenze

## 5.12. Modell 652

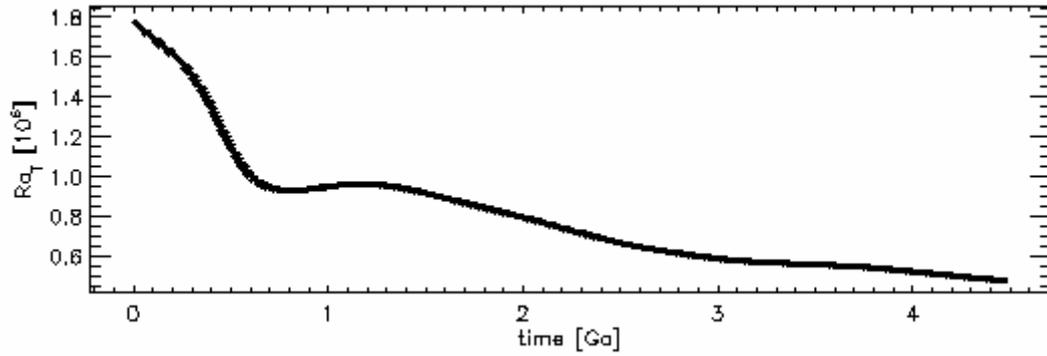


**Abb. 5.12-6:** Temperaturverteilung im Mantel am Anfang der Rechnung und heute

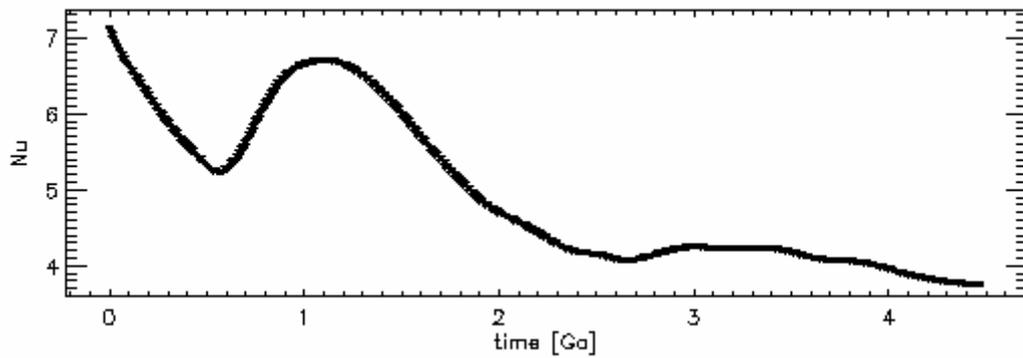


**Abb. 5.12-7:** Zeitliche Entwicklung des Temperaturprofils

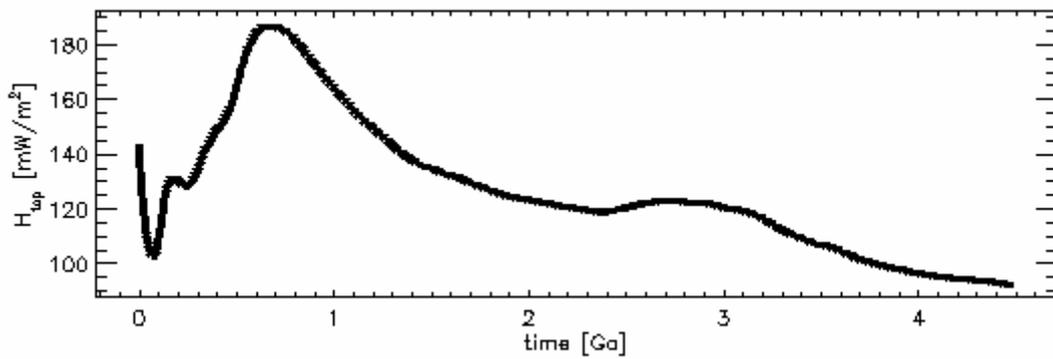
## 5.12. Modell 652



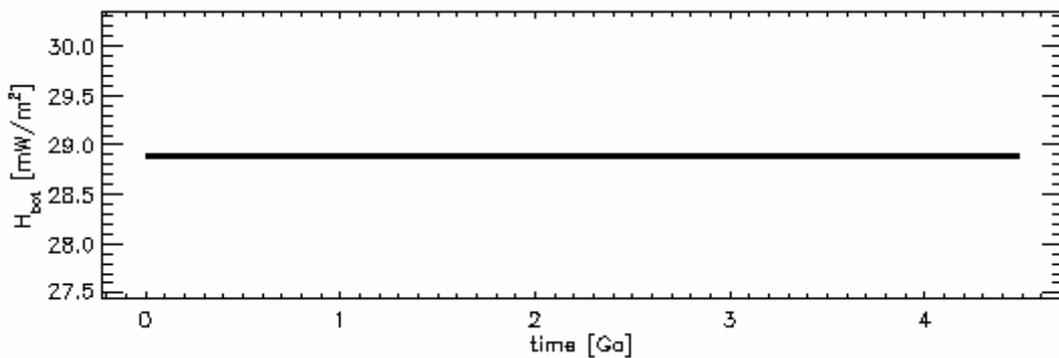
**Abb. 5.12-8:** Zeitliche Entwicklung der Rayleigh-Zahl



**Abb. 5.12-9:** Zeitliche Entwicklung der Nusselt-Zahl

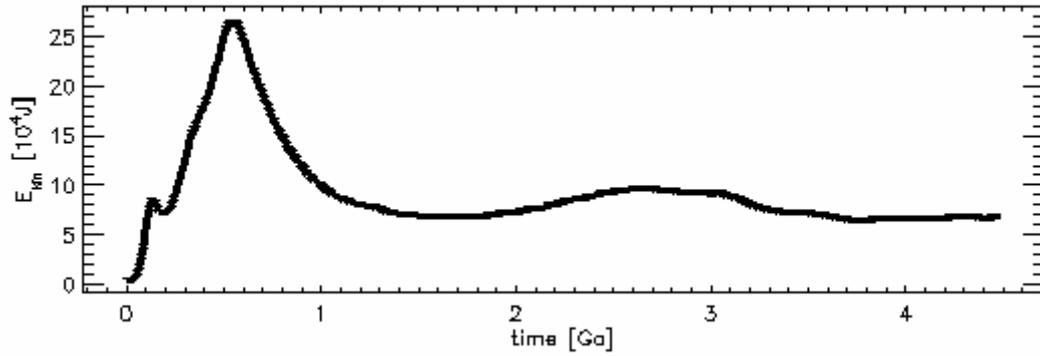


**Abb. 5.12-10:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Oberfläche

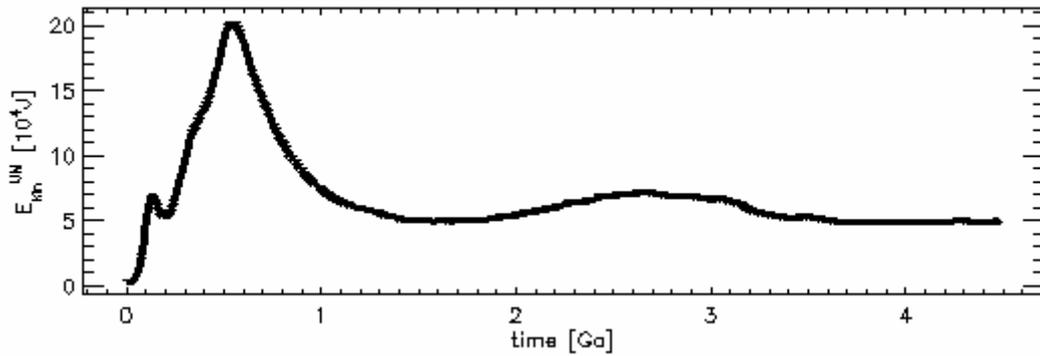


**Abb. 5.12-11:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Kern-Mantel-Grenze

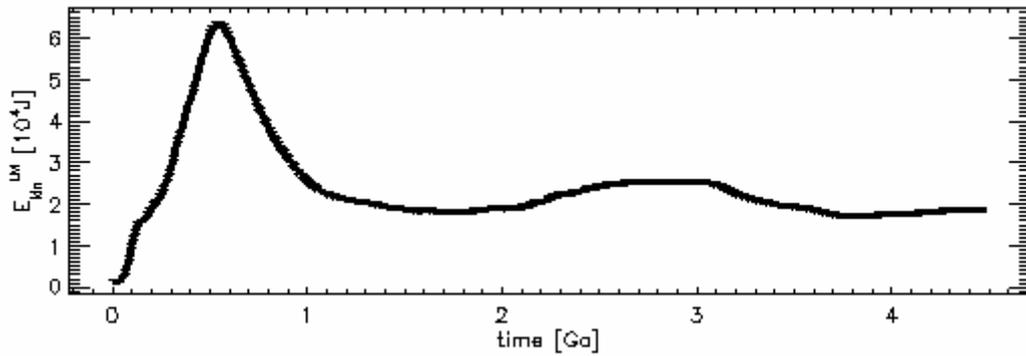
## 5.12. Modell 652



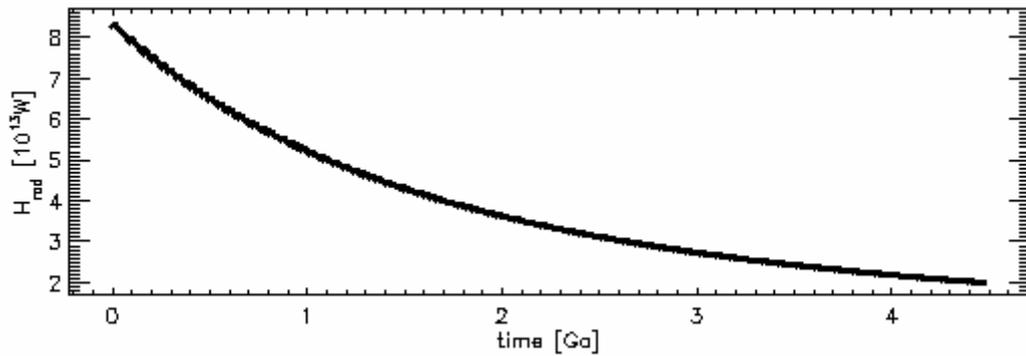
**Abb. 5.12-12:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des gesamten Mantels



**Abb. 5.12-13:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie im oberen Mantel

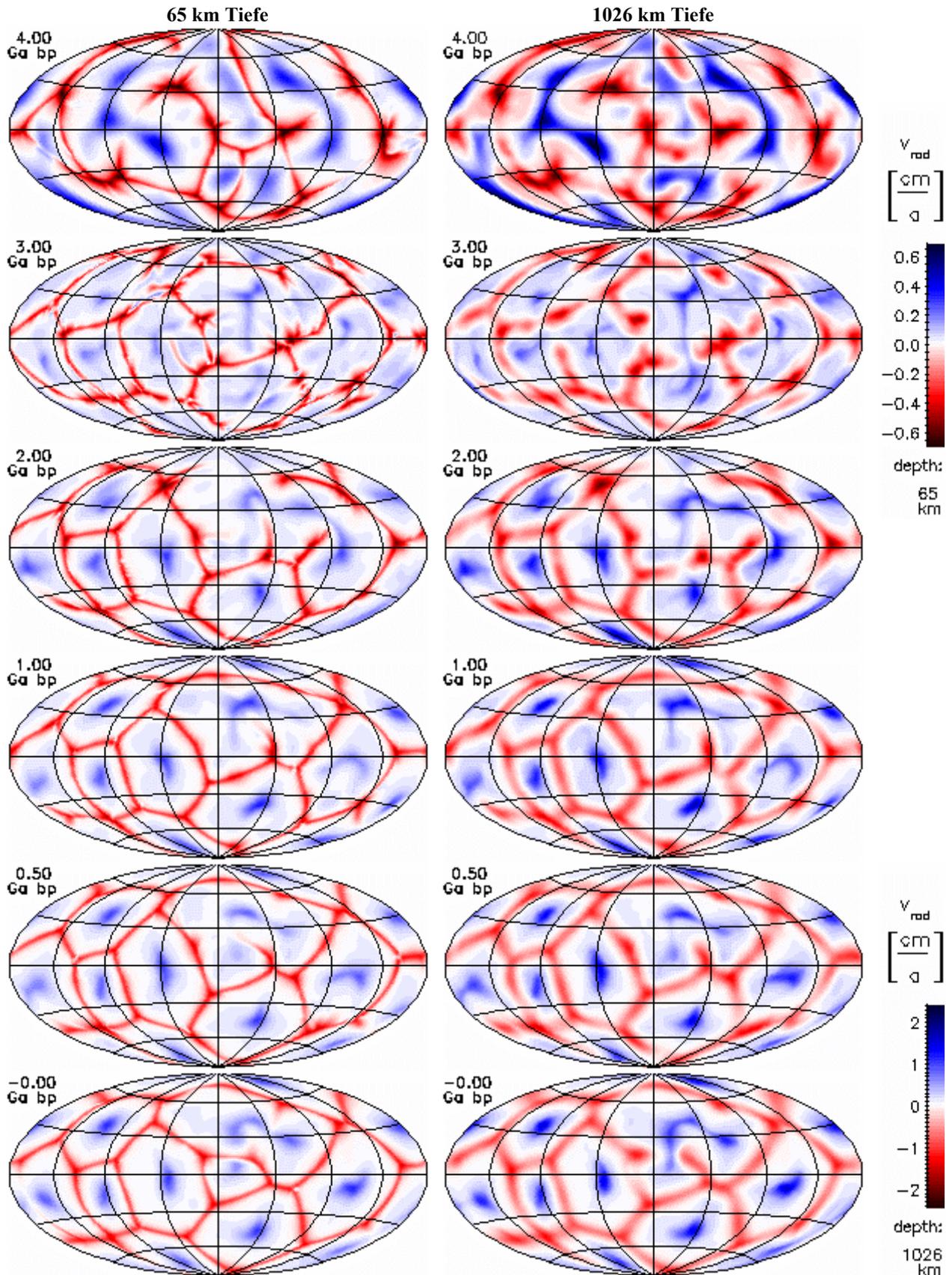


**Abb. 5.12-14:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie im unteren Mantel



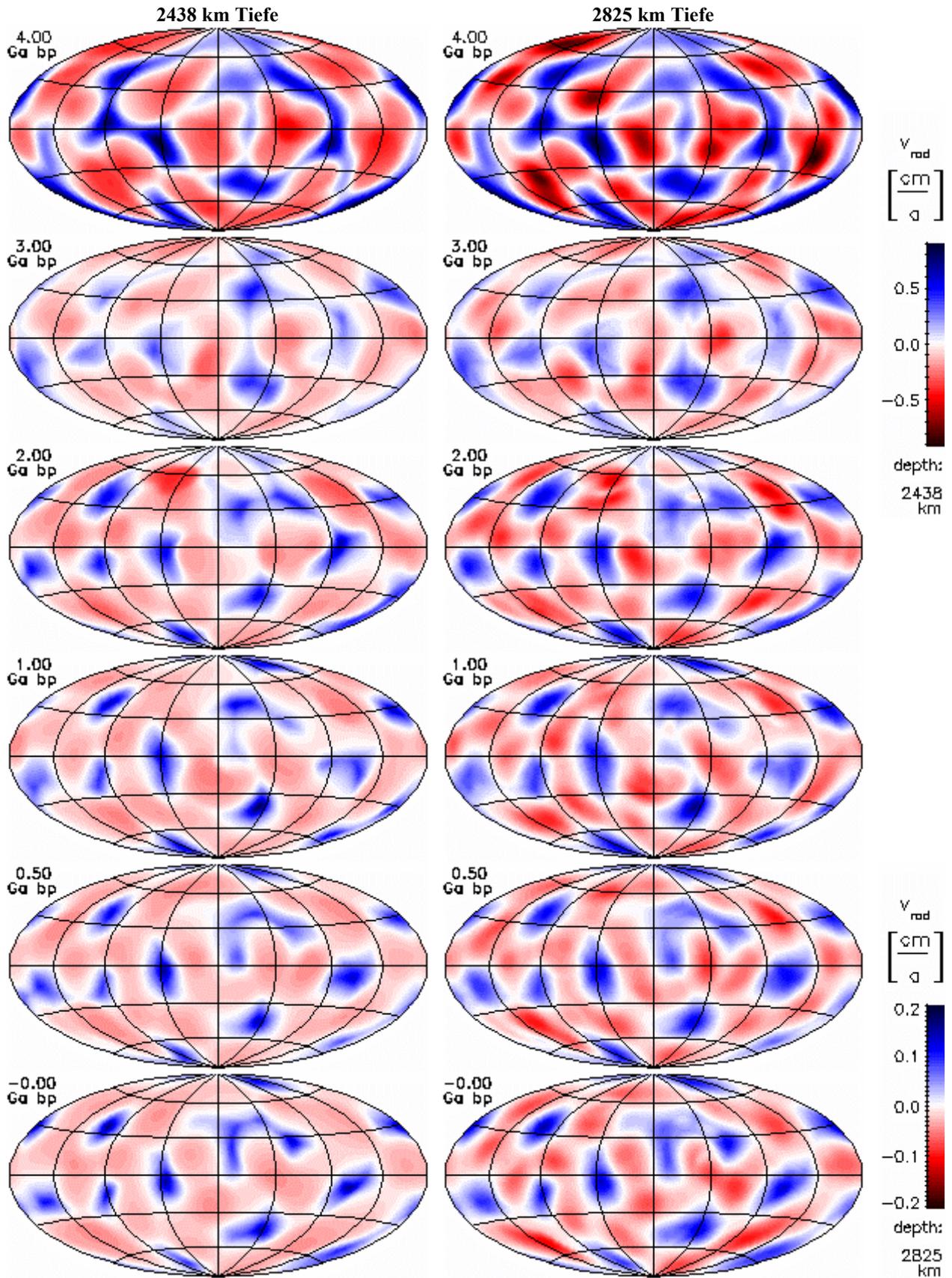
**Abb. 5.12-15:** Zeitliche Entwicklung der Heizleistung durch Zerfall von <sup>40</sup>K, <sup>42</sup>Th, <sup>235</sup>U und <sup>238</sup>U

## 5.12. Modell 652



**Abb. 5.12-16:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente nahe der Oberfläche und im unteren Mantel. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind eventuell abgeschnitten.

## 5.12. Modell 652



**Abb. 5.12-17:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente im hochviskosen Teil des unteren Mantels und nahe der CMB. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind evtl. abgeschnitten.

## 5.12. Modell 652

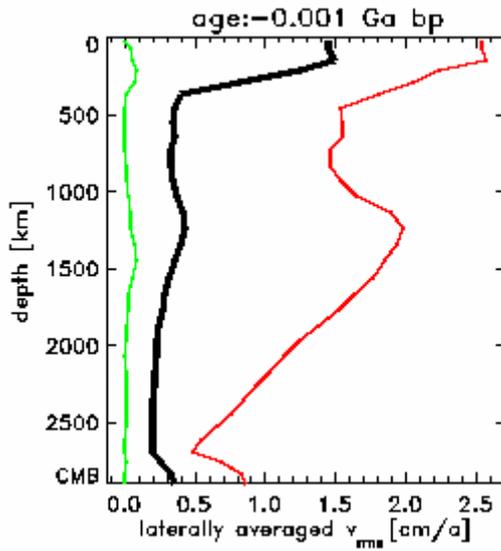


Abb. 5.12-18: Heutiges Geschwindigkeitsprofil

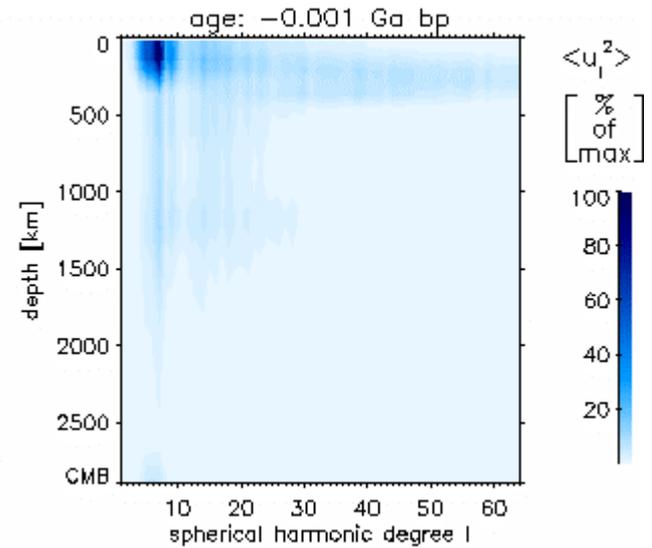


Abb. 5.12-19: Spektrum von toroidaler plus poloidaler kinetischer Energie

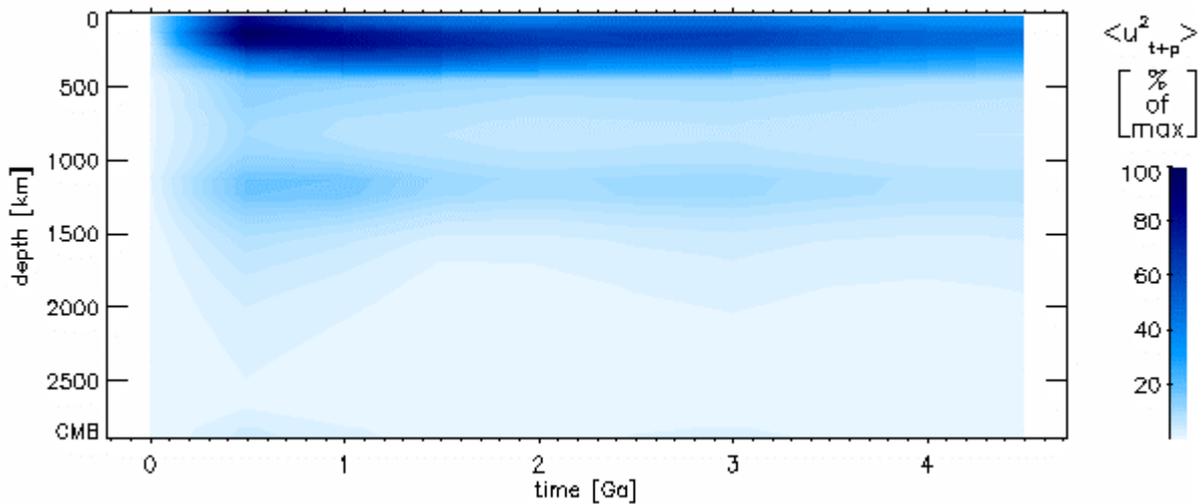


Abb. 5.12-20: Entwicklung der Tiefenverteilung der Summe von poloidaler und toroidaler Energie

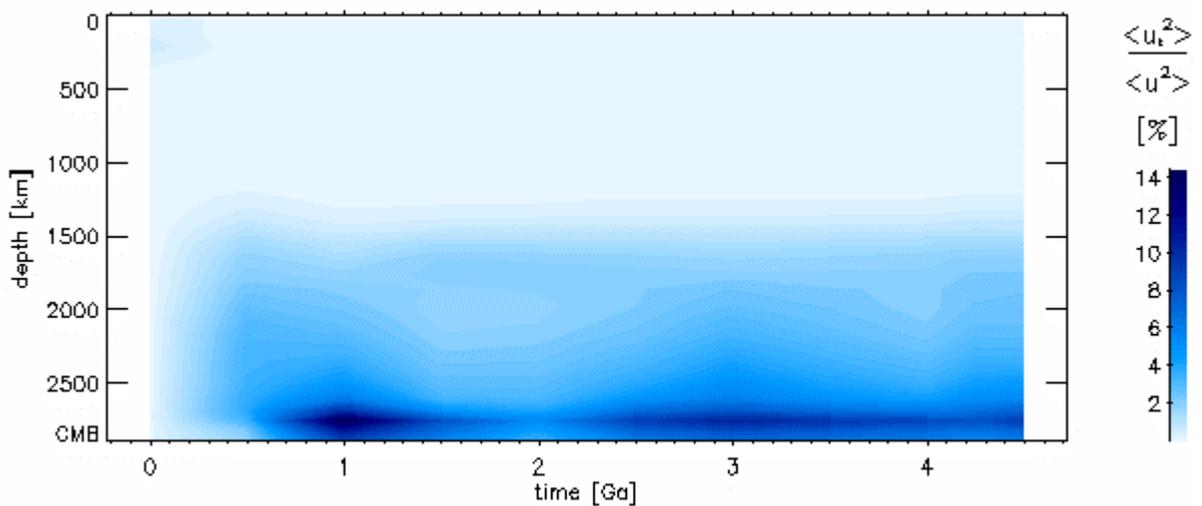
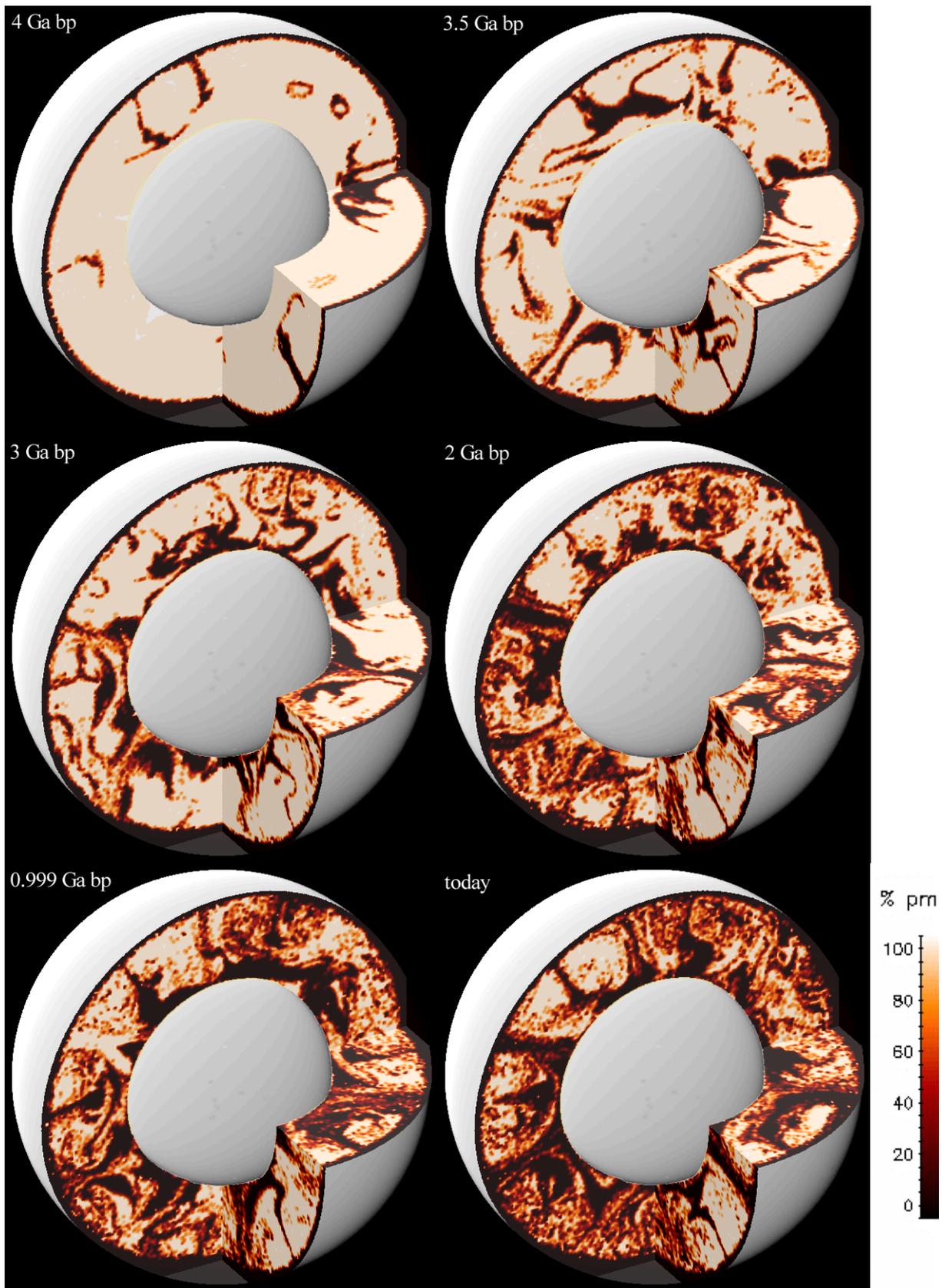


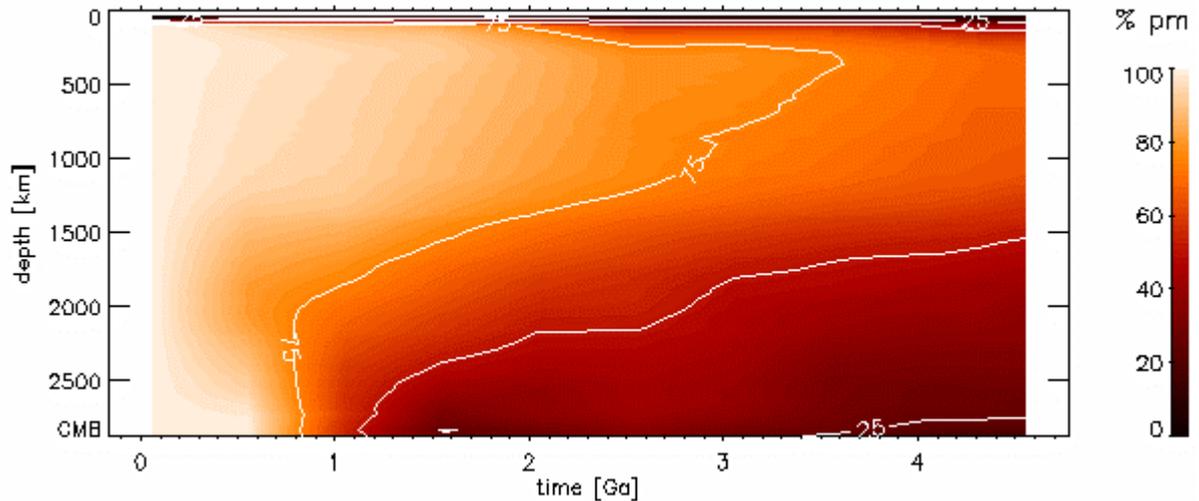
Abb. 5.12-21: Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung des toroidalen Anteils

## 5.12. Modell 652

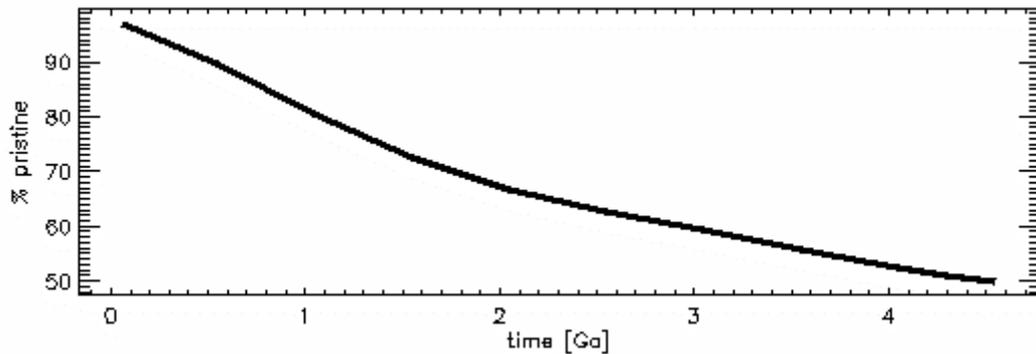


**Abb. 5.12-22:** Verteilung ursprünglichen Materials (pm) zu verschiedenen Zeiten

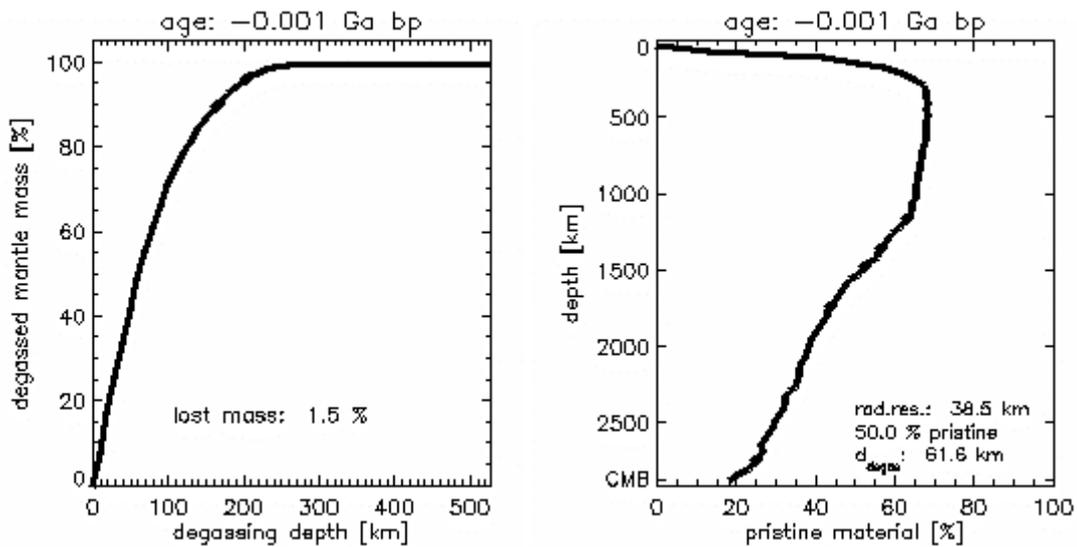
## 5.12. Modell 652



**Abb. 5.12-23:** Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung ursprünglichen Materials



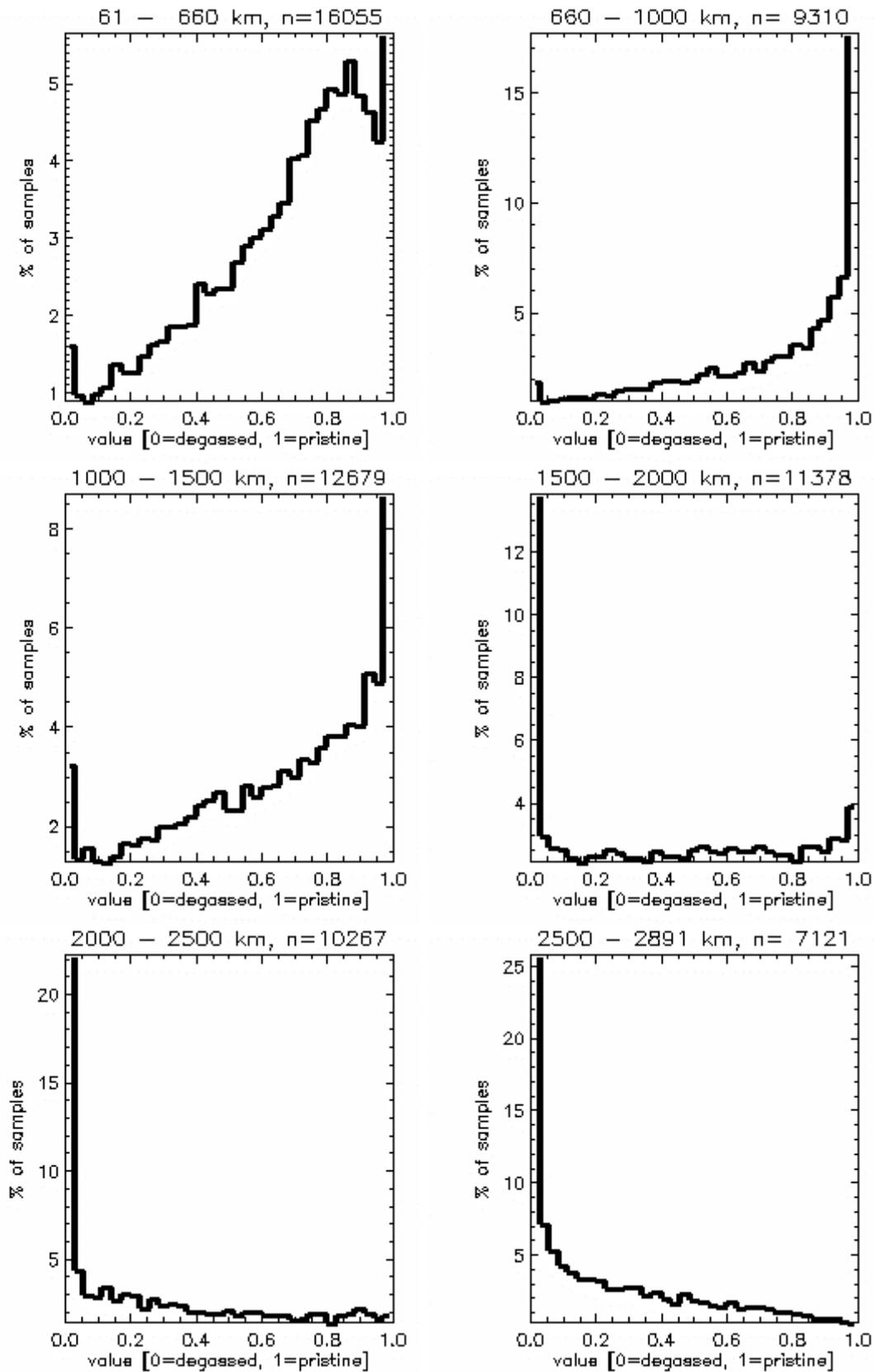
**Abb. 5.12-24:** Abnahme ursprünglichen Materials im Mantel



**Abb. 5.12-25:** Die Entgasungstiefe wird so festgelegt, dass am Ende der Rechnung 50 % des Mantels entgast sind

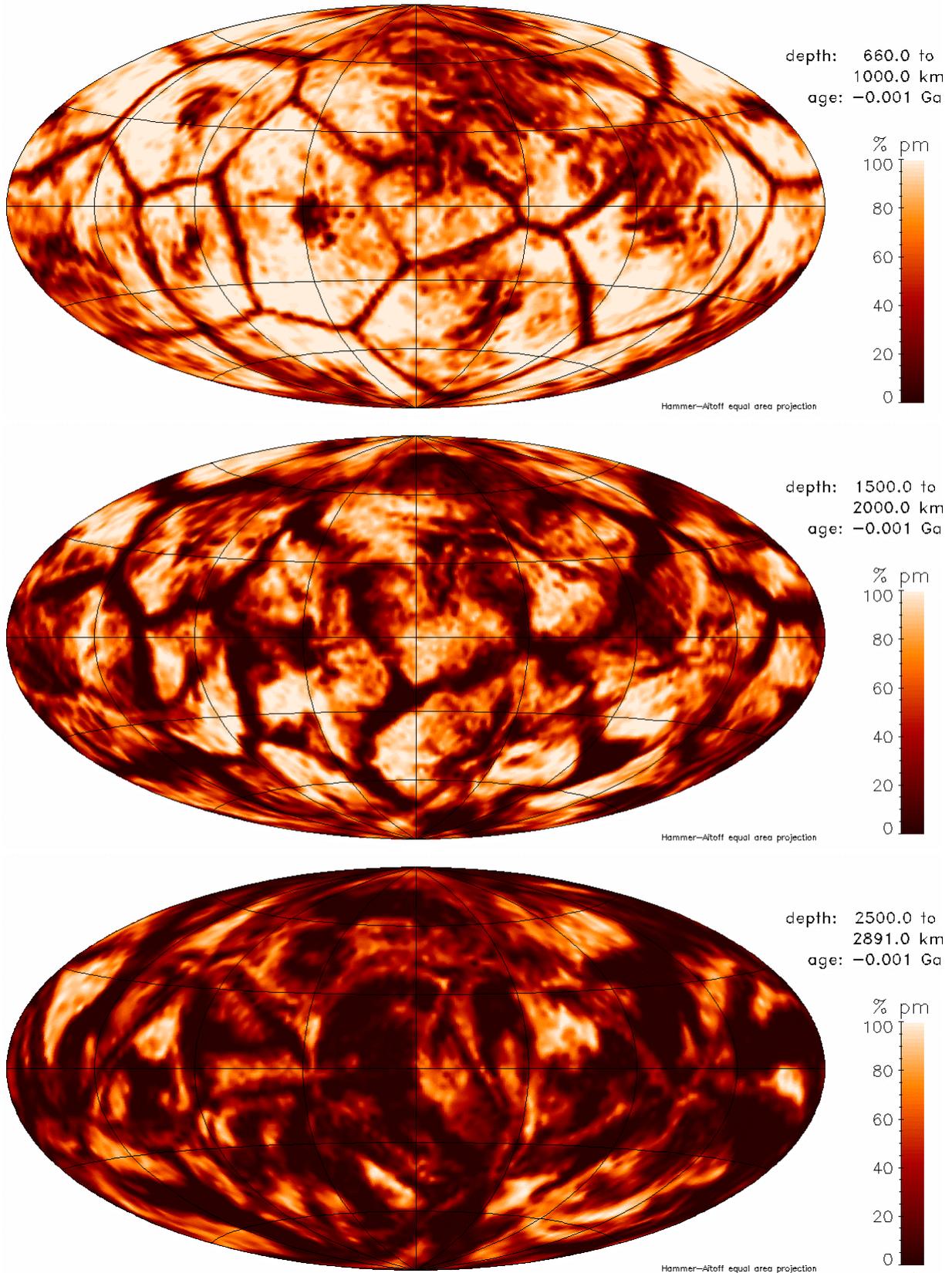
**Abb. 5.12-26:** Tiefenverteilung ursprünglichen Materials im heutigen Mantel

## 5.12. Modell 652



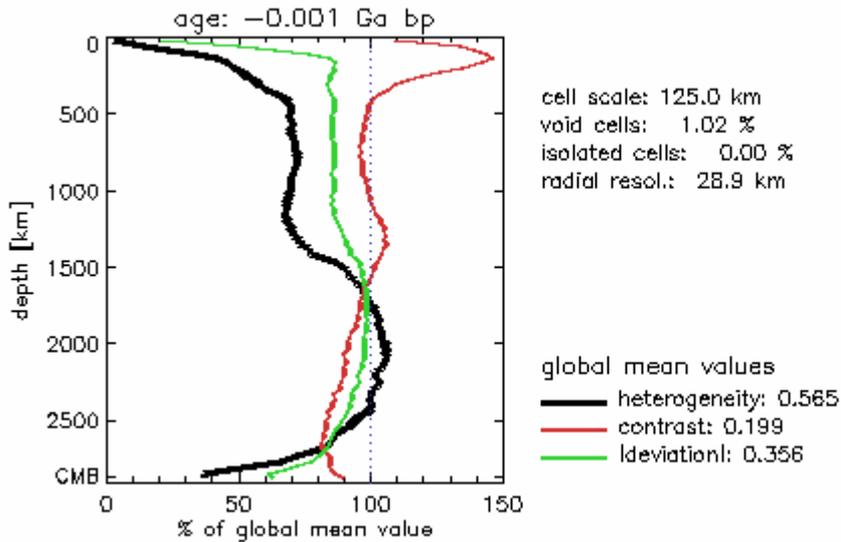
**Abb. 5.12-27:** Histogramme der Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Manteltiefen. Eine Probe repräsentiert den Mittelwert des gesamten radialen Intervalls. n ist die Anzahl der Unterteilungen der Kugelfläche in der jeweiligen Tiefe.

## 5.12. Modell 652

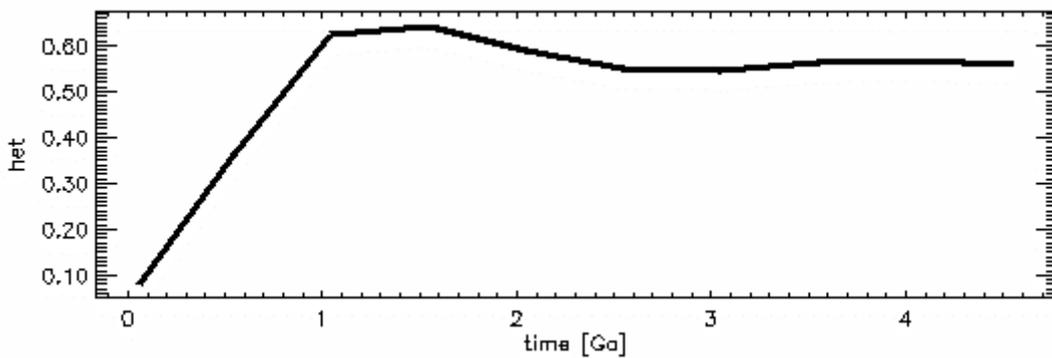


**Abb. 5.12-28:** Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Tiefenintervallen. Die laterale Auflösung entspricht der des jeweils passenden Histogramms in Abb. 5.12-27.

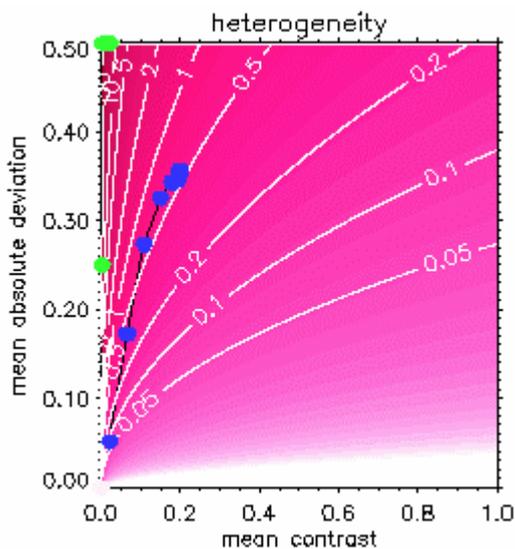
## 5.12. Modell 652



**Abb. 5.12-29:** Heutige Tiefenprofile der lateral gemittelten Werte von Heterogenität, mittlerem Kontrast und mittlerer Absolutabweichung. Sie werden mit dem Mittelwert in der jeweiligen Kugelschale berechnet. Der globale Wert dient nur zur Skalierung der Abszisse.



**Abb. 5.12-30:** Zeitliche Entwicklung der Heterogenität



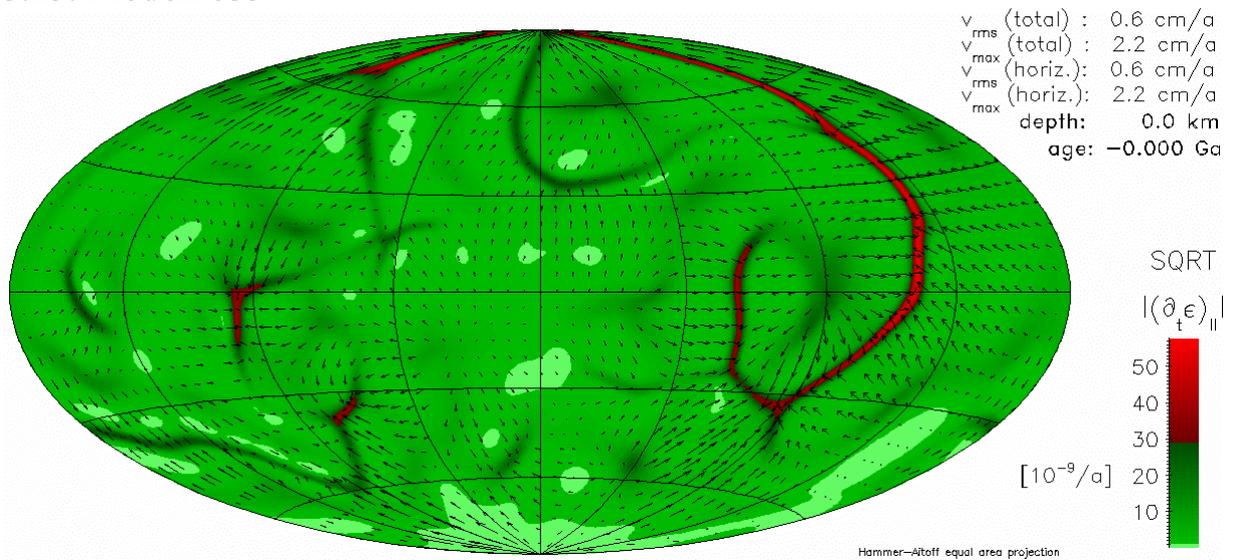
**Abb. 5.12-31:** Entwicklung der globalen Mittelwerte von Heterogenität, mittlerer Absolutabweichung und Kontrast.

Jeder blaue Punkt entspricht einem ausgewerteten Zeitschritt. Die schwarze Verbindungslinie folgt der zeitlichen Entwicklung. Der älteste Zeitschritt liegt näher am Koordinatenursprung als die jüngeren. Die grünen Punkte markieren die Lage der in Kapitel 4.2.3 vorgestellten Referenzmodelle.

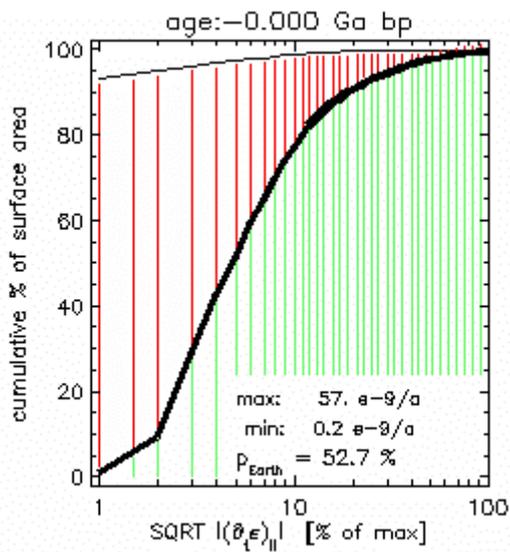
Die rötliche Farbkodierung mit Höhenlinien stellt den Wert der Heterogenität dar.

## 5.13. Modell 653

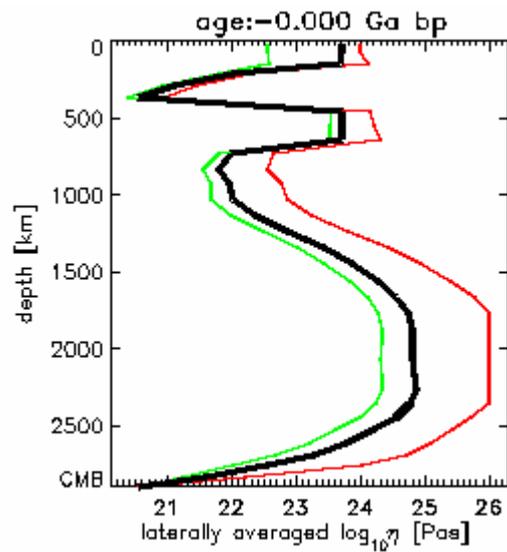
### 5.13. Modell 653



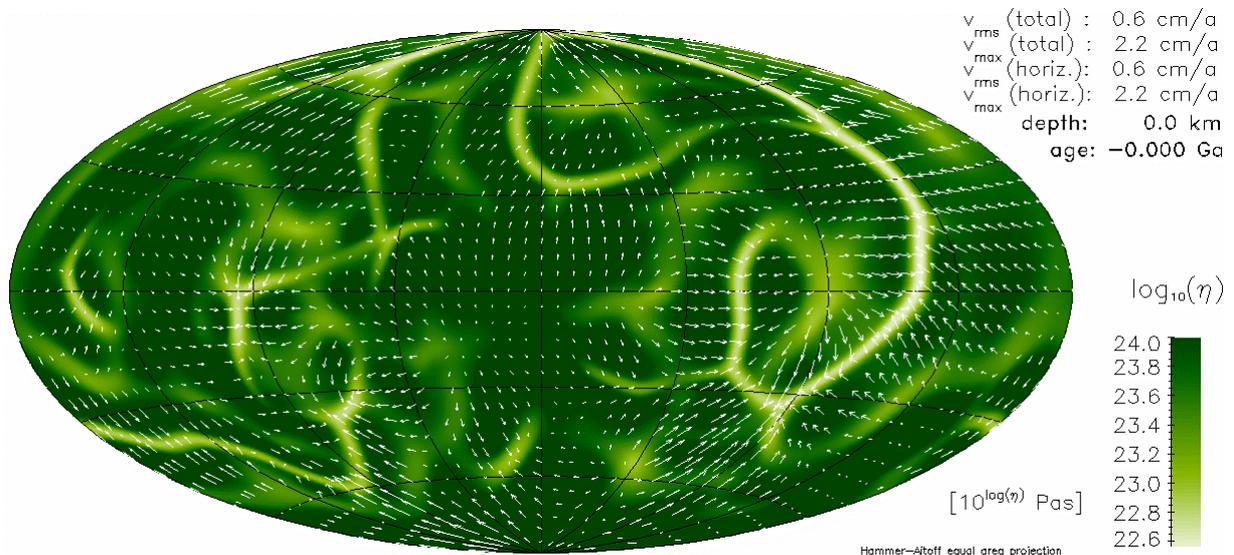
**Abb. 5.13-45:** Wurzel des Betrages der zweiten Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors



**Abb. 5.13-46:** Plattigkeit an der Oberfläche

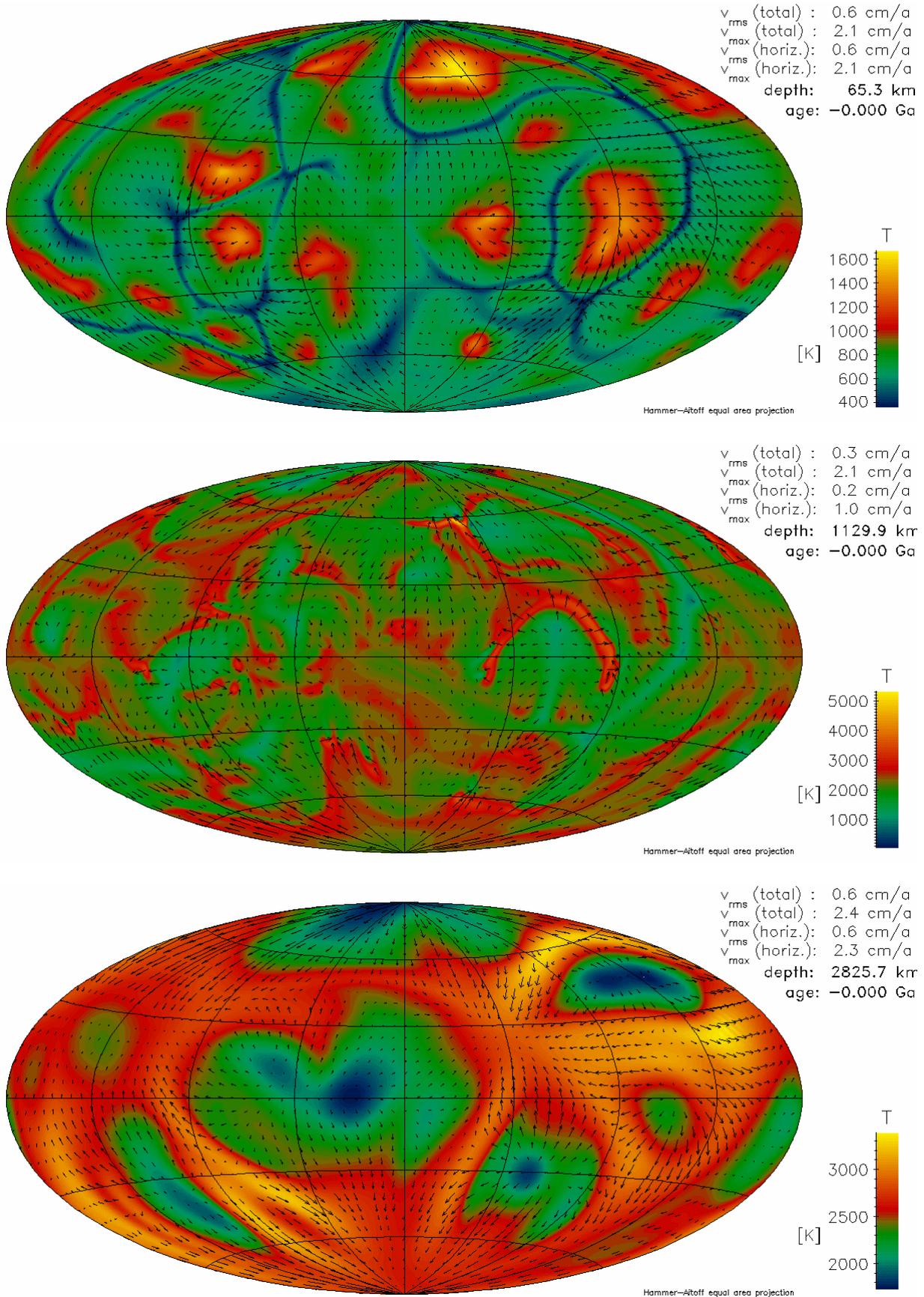


**Abb. 5.13-47:** Viskositätsprofil



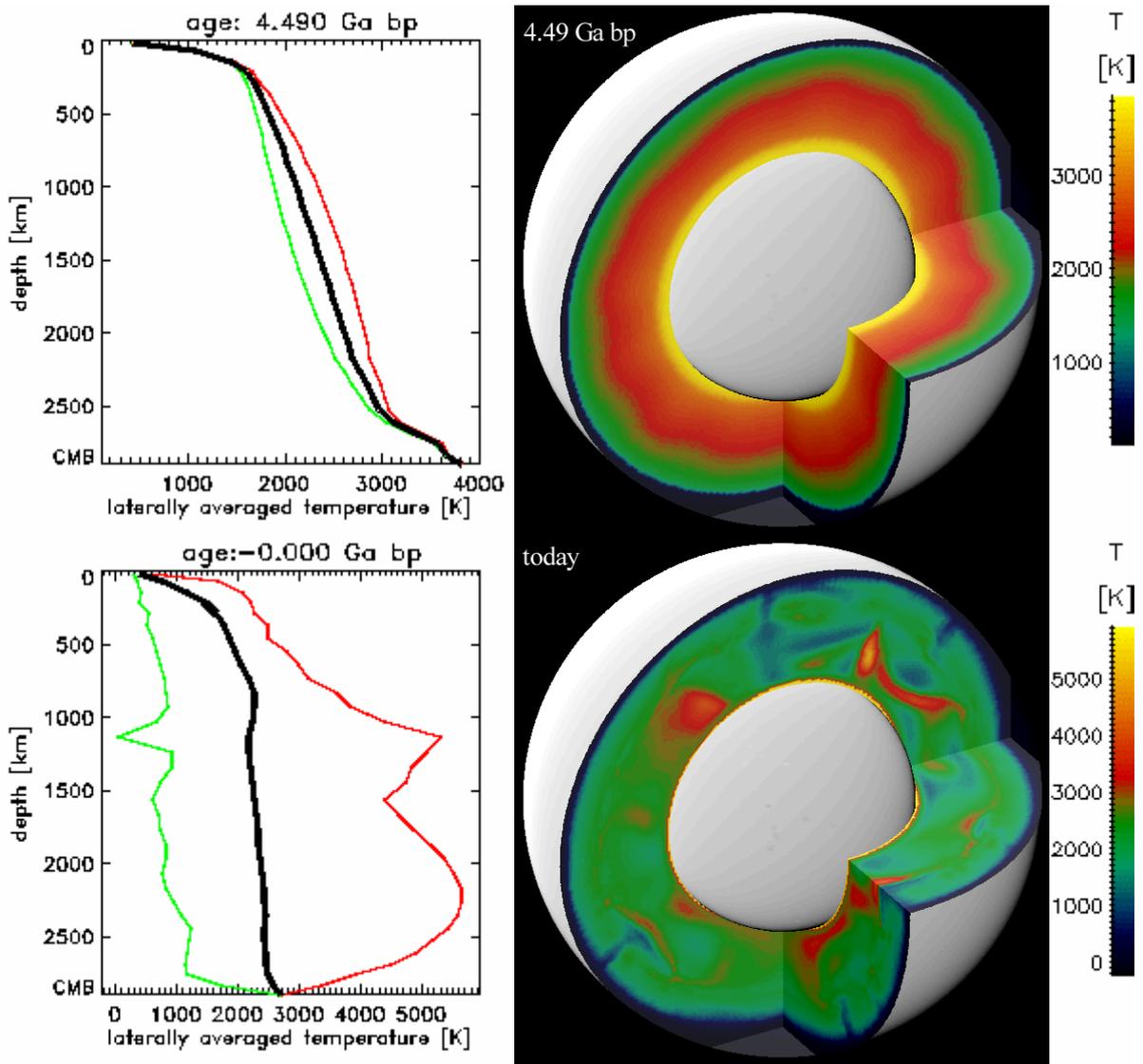
**Abb. 5.13-48:** Viskosität an der Oberfläche

### 5.13. Modell 653

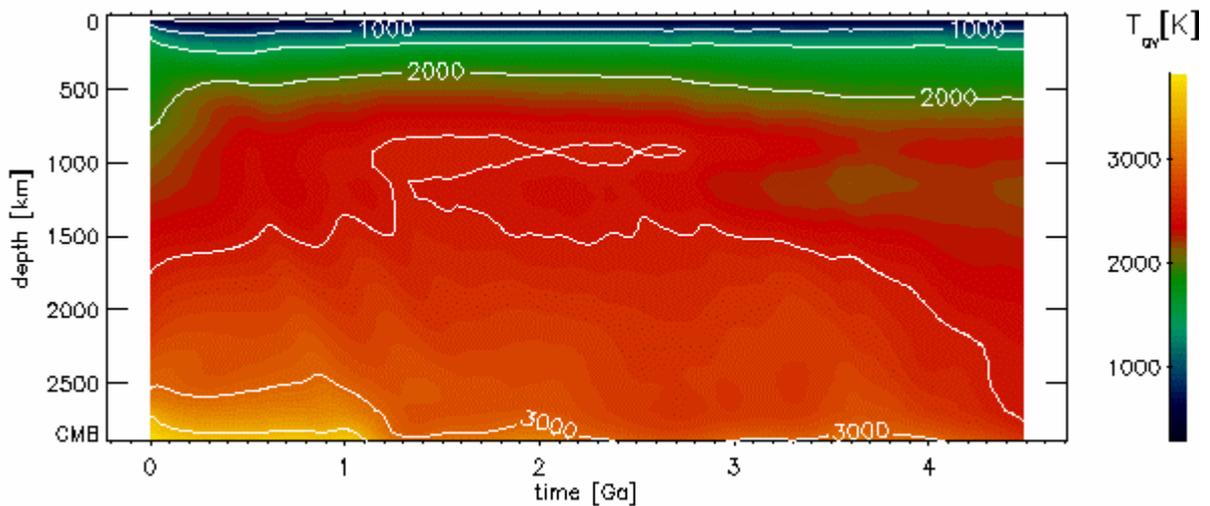


**Abb. 5.13-5:** Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten nahe der Oberfläche, im unteren Mantel und nahe der Kern-Mantel-Grenze

### 5.13. Modell 653

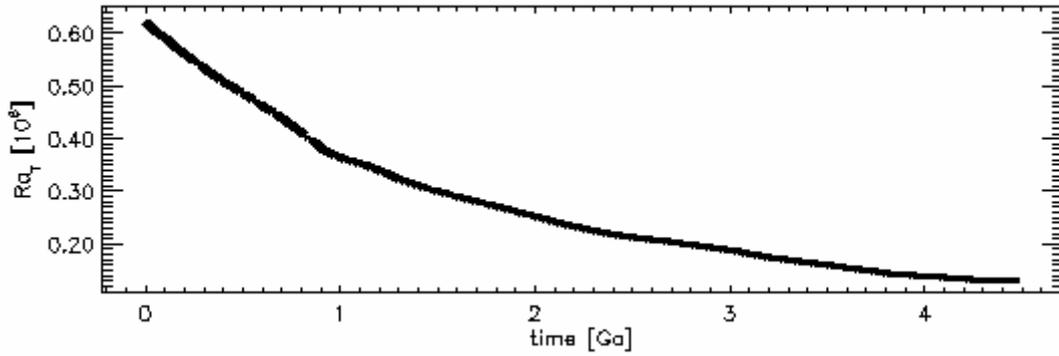


**Abb. 5.13-6:** Temperaturverteilung im Mantel am Anfang der Rechnung und heute

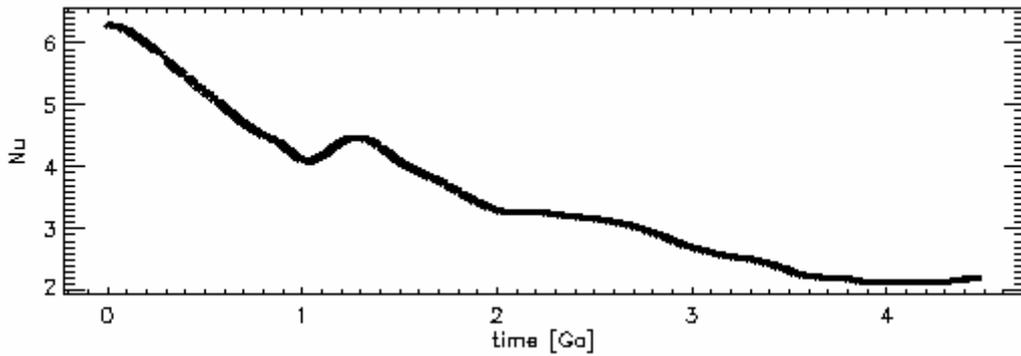


**Abb. 5.13-7:** Zeitliche Entwicklung des Temperaturprofils

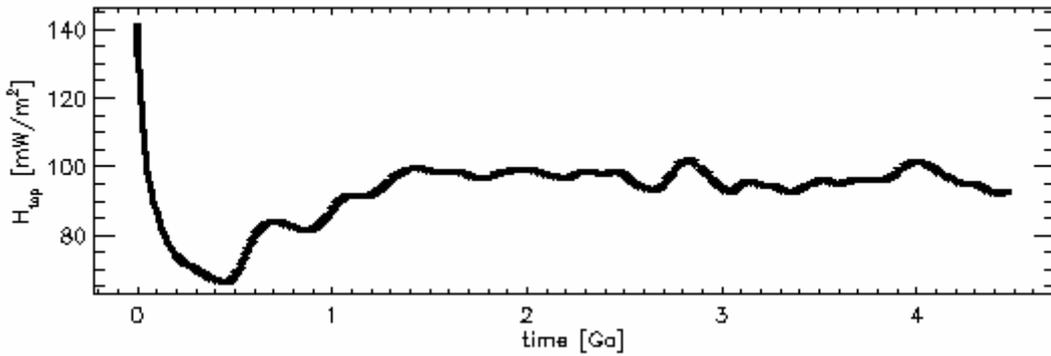
### 5.13. Modell 653



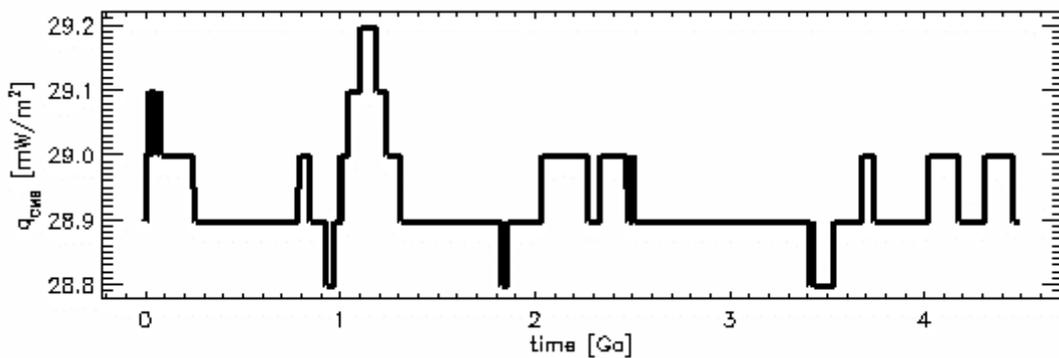
**Abb. 5.13-8:** Zeitliche Entwicklung der Rayleigh-Zahl



**Abb. 5.13-9:** Zeitliche Entwicklung der Nusselt-Zahl

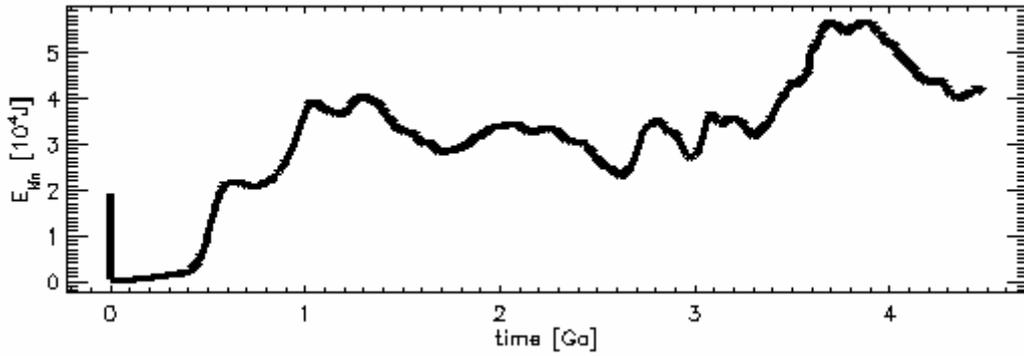


**Abb. 5.13-10:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Oberfläche

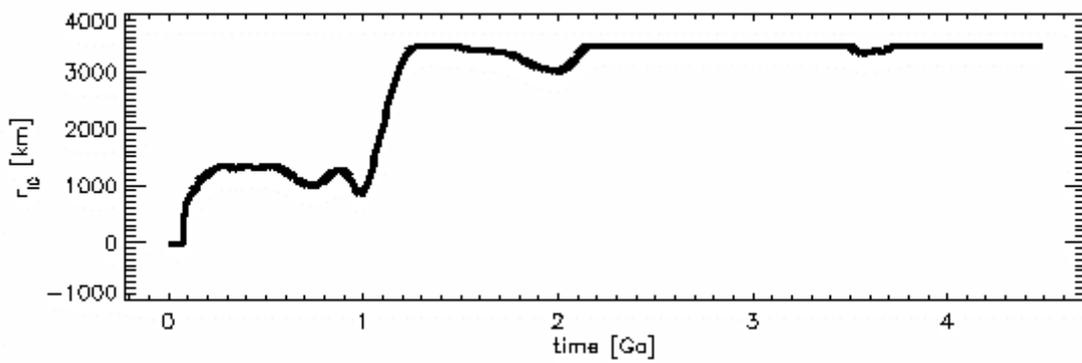


**Abb. 5.13-11:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Kern-Mantel-Grenze

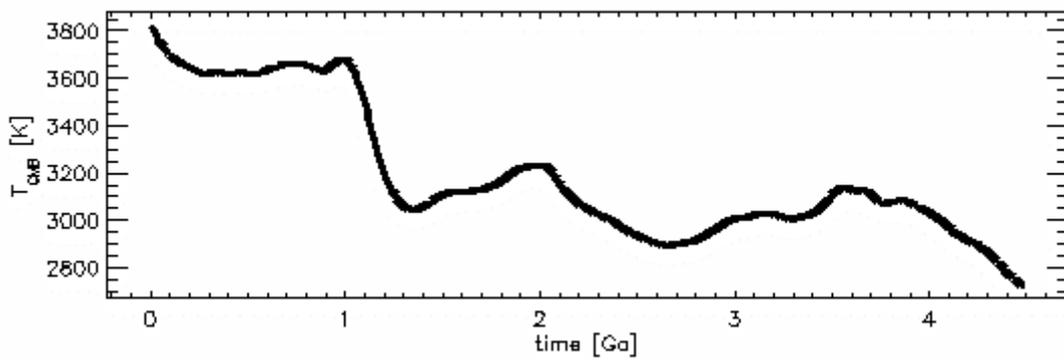
### 5.13. Modell 653



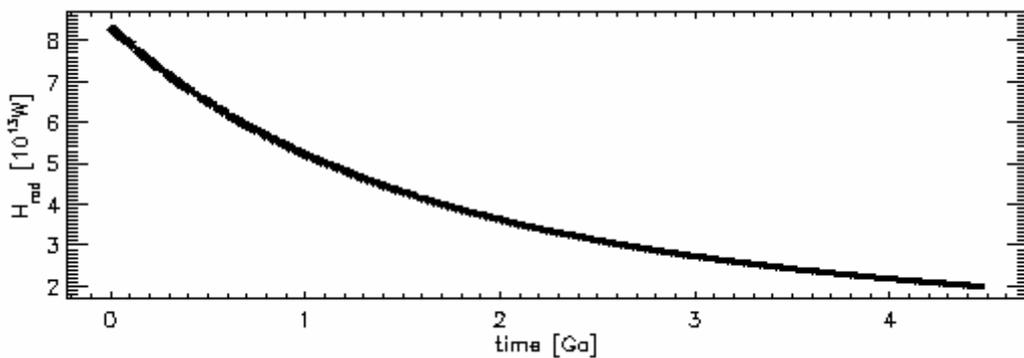
**Abb. 5.13-12:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des gesamten Mantels. Der hohe Wert am Anfang ist ein Artefakt.



**Abb. 5.13-13:** Zeitliche Entwicklung des Innenkernradius

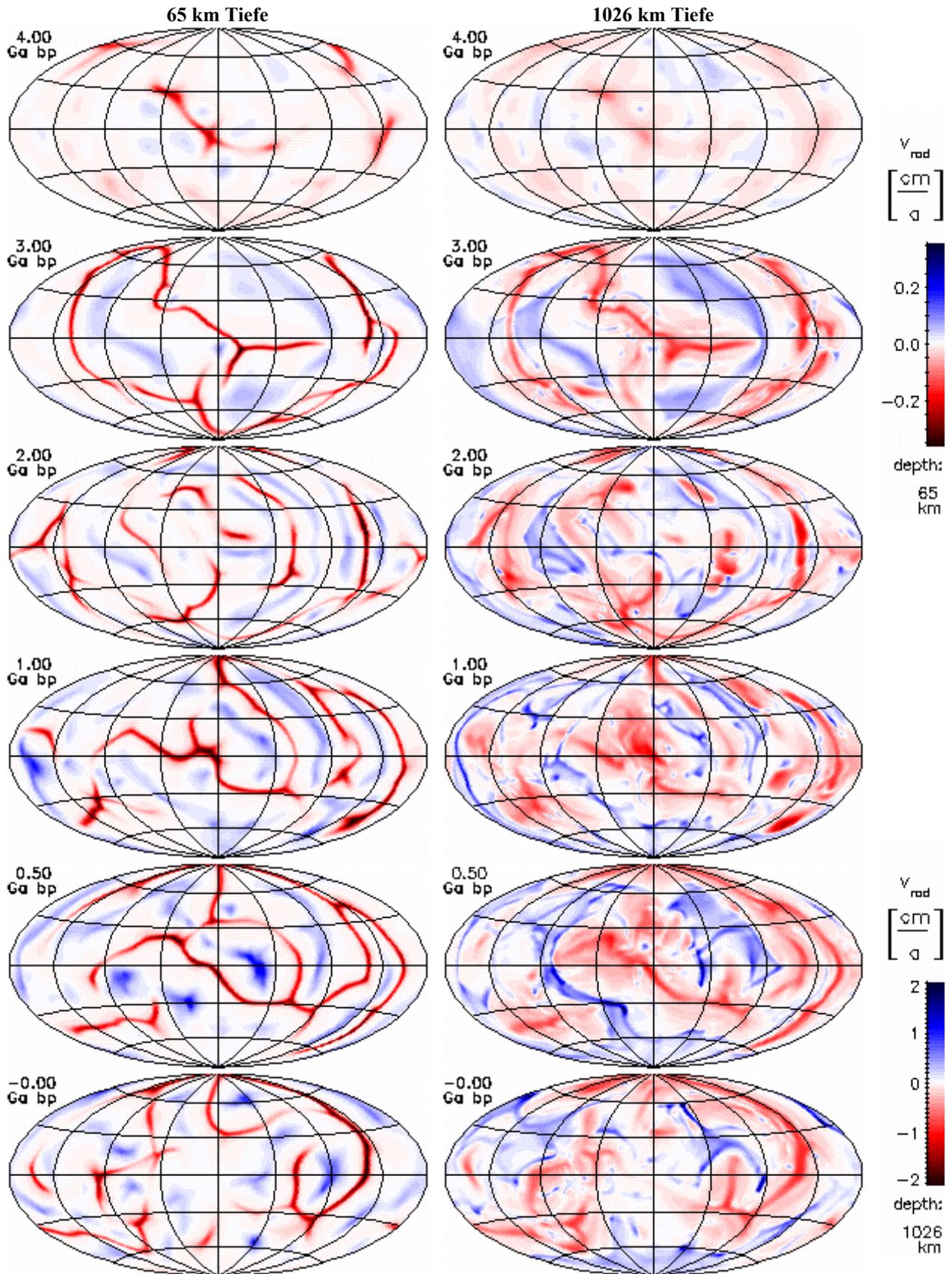


**Abb. 5.13-14:** Zeitliche Entwicklung der Temperatur an der CMB



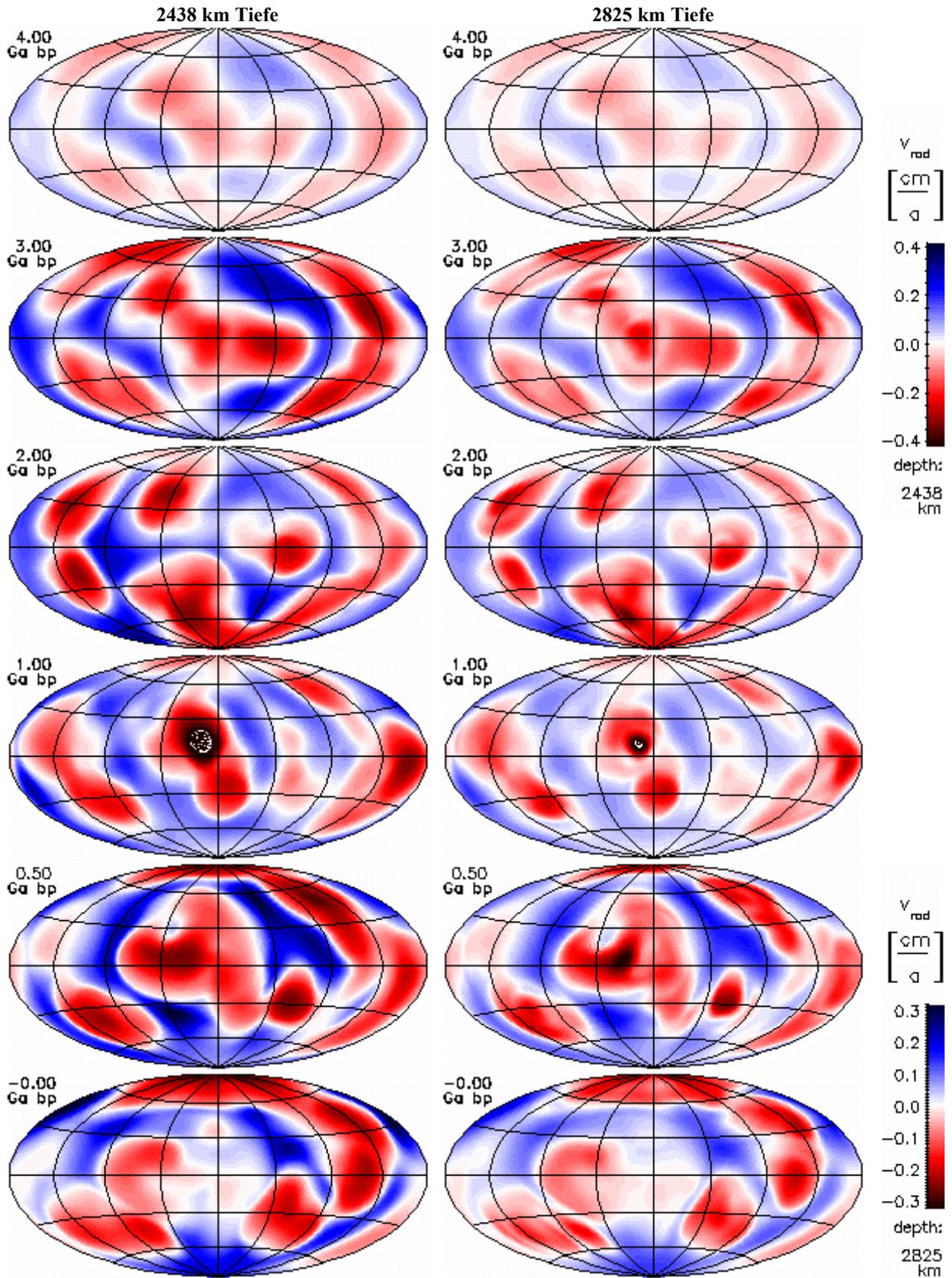
**Abb. 5.13-15:** Zeitliche Entwicklung der Heizleistung durch Zerfall von  $^{40}K$ ,  $^{42}Th$ ,  $^{235}U$  und  $^{238}U$  im Mantel

### 5.13. Modell 653



**Abb. 5.13-16:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente nahe der Oberfläche und im unteren Mantel. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind eventuell abgeschnitten.

### 5.13. Modell 653



**Abb. 5.13-17:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente im hochviskosen Teil des unteren Mantels und nahe der CMB. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind evtl. abgeschnitten.

### 5.13. Modell 653

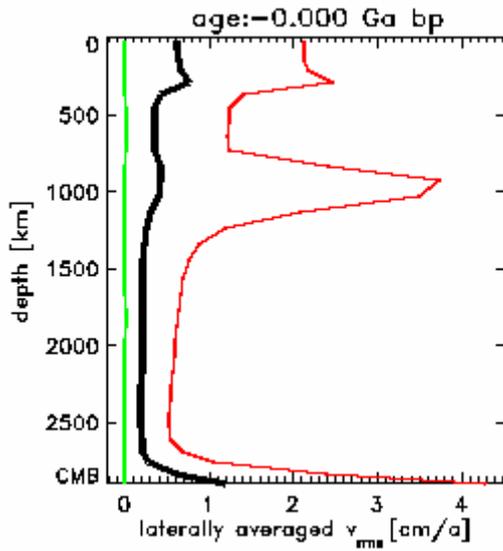


Abb. 5.13-18: Heutiges Geschwindigkeitsprofil

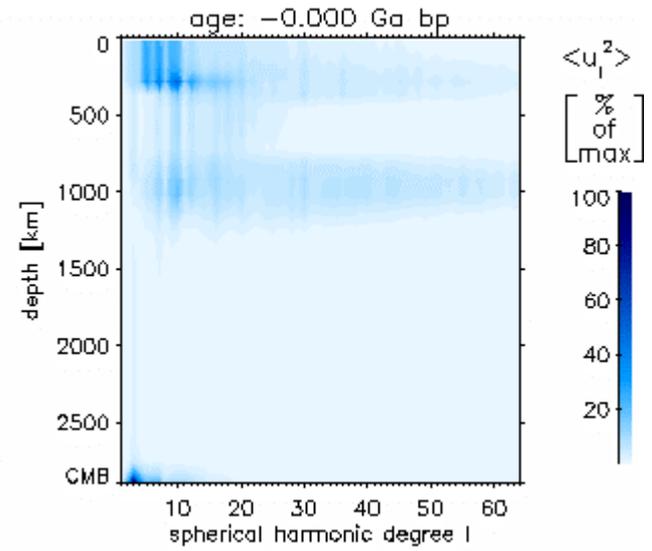


Abb. 5.13-19: Spektrum von toroidaler plus poloidaler kinetischer Energie

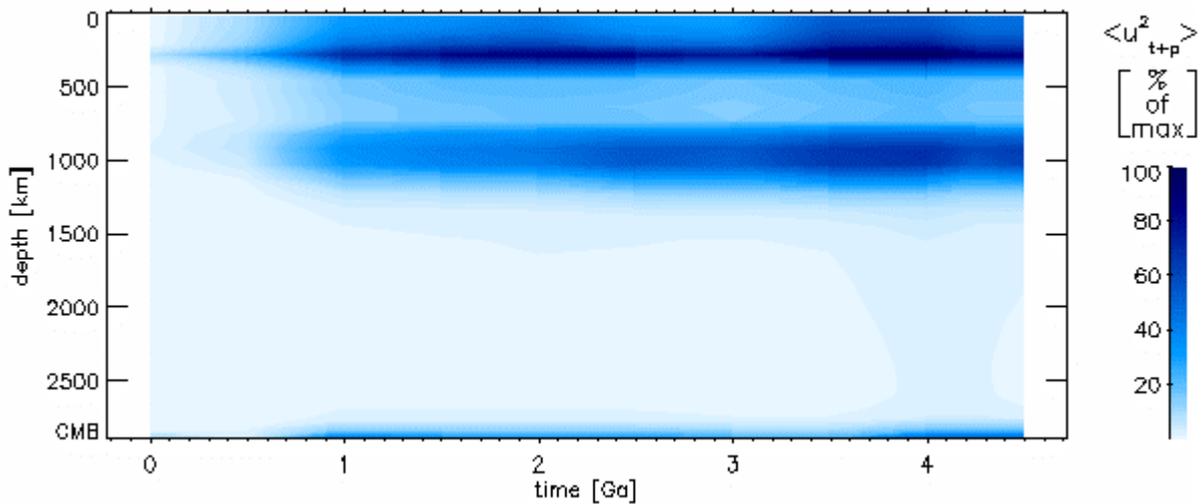


Abb. 5.13-20: Entwicklung der Tiefenverteilung der Summe von poloidaler und toroidaler Energie

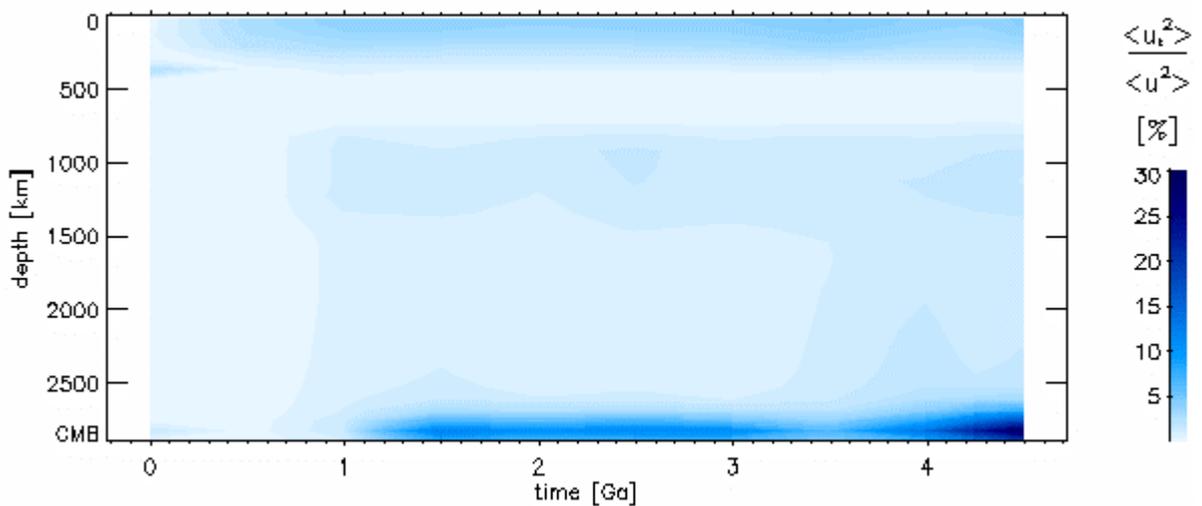
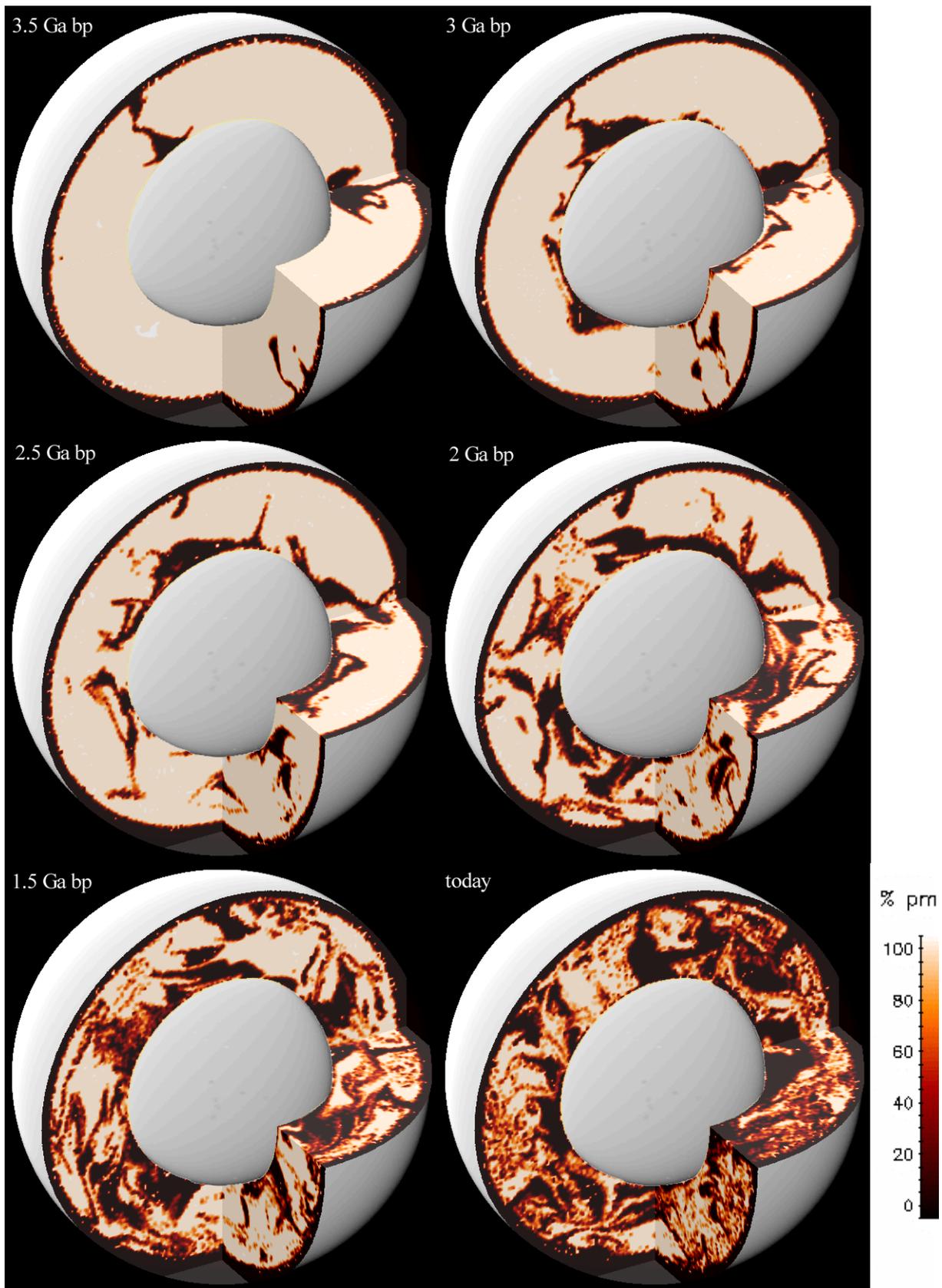


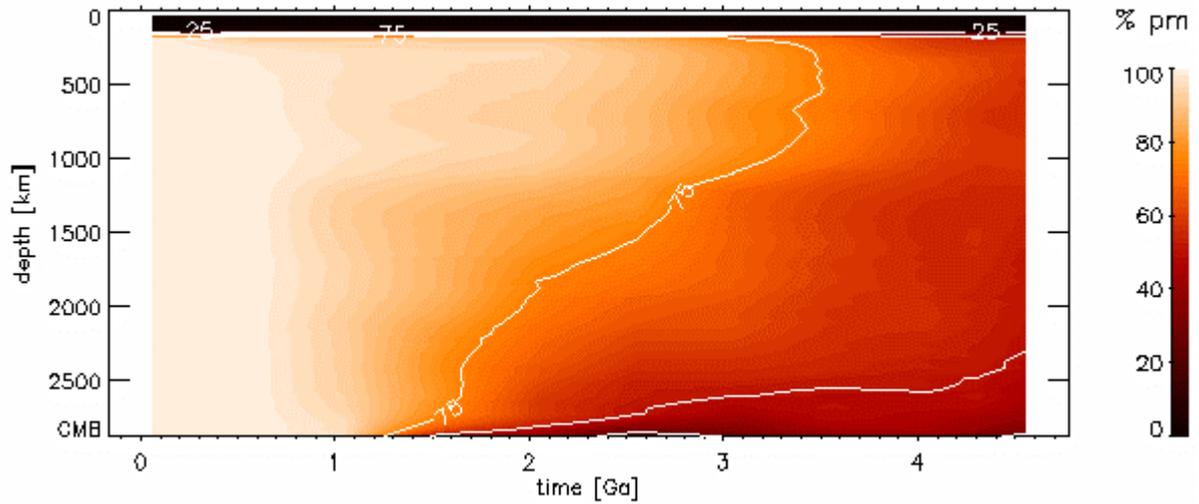
Abb. 5.13-21: Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung des toroidalen Anteils

### 5.13. Modell 653

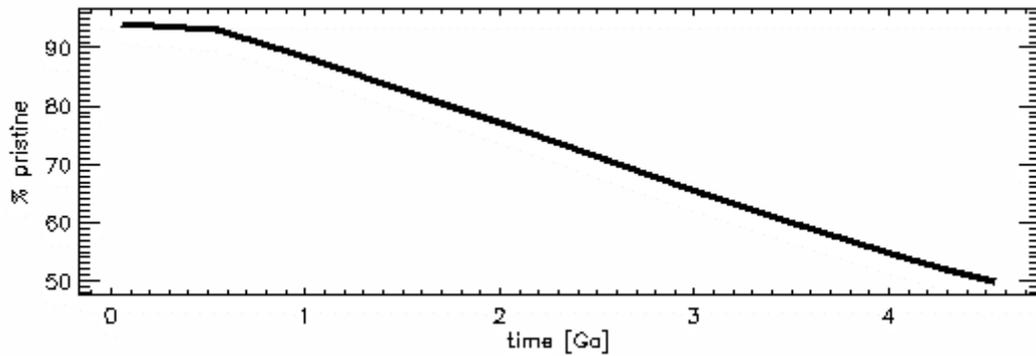


**Abb. 5.13-22:** Verteilung ursprünglichen Materials (pm) zu verschiedenen Zeiten

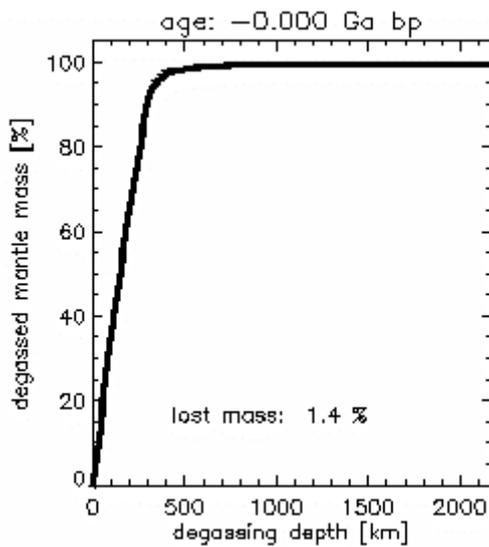
### 5.13. Modell 653



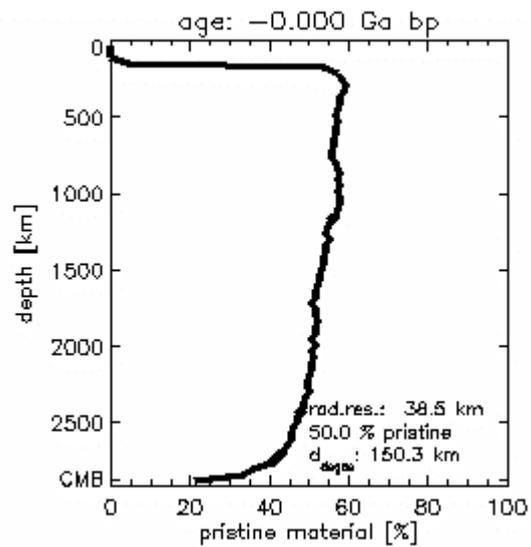
**Abb. 5.13-23:** Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung ursprünglichen Materials



**Abb. 5.13-24:** Abnahme ursprünglichen Materials im Mantel

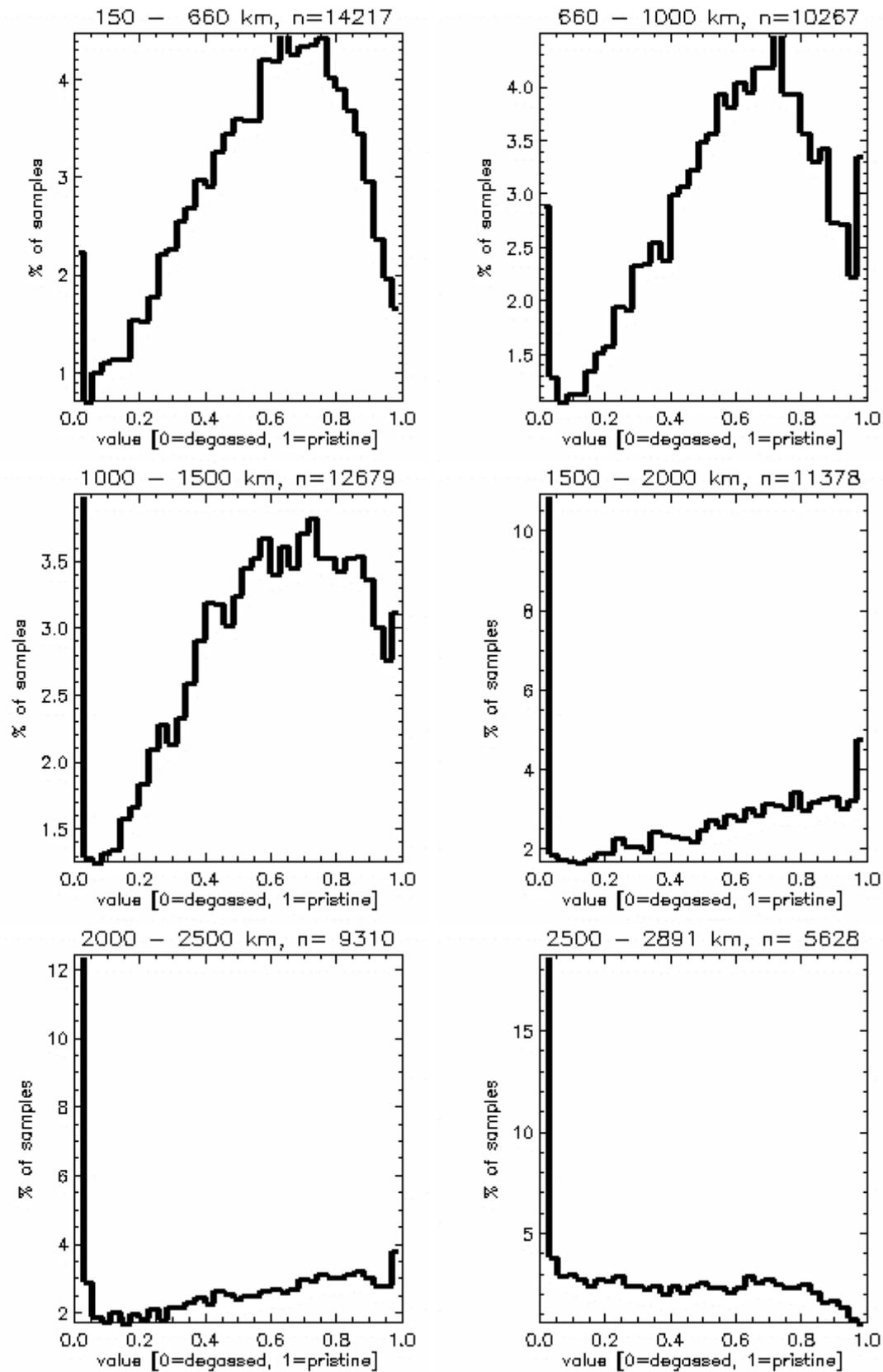


**Abb. 5.13-25:** Die Entgasungstiefe wird so festgelegt, dass am Ende der Rechnung 50 % des Mantels entgast sind



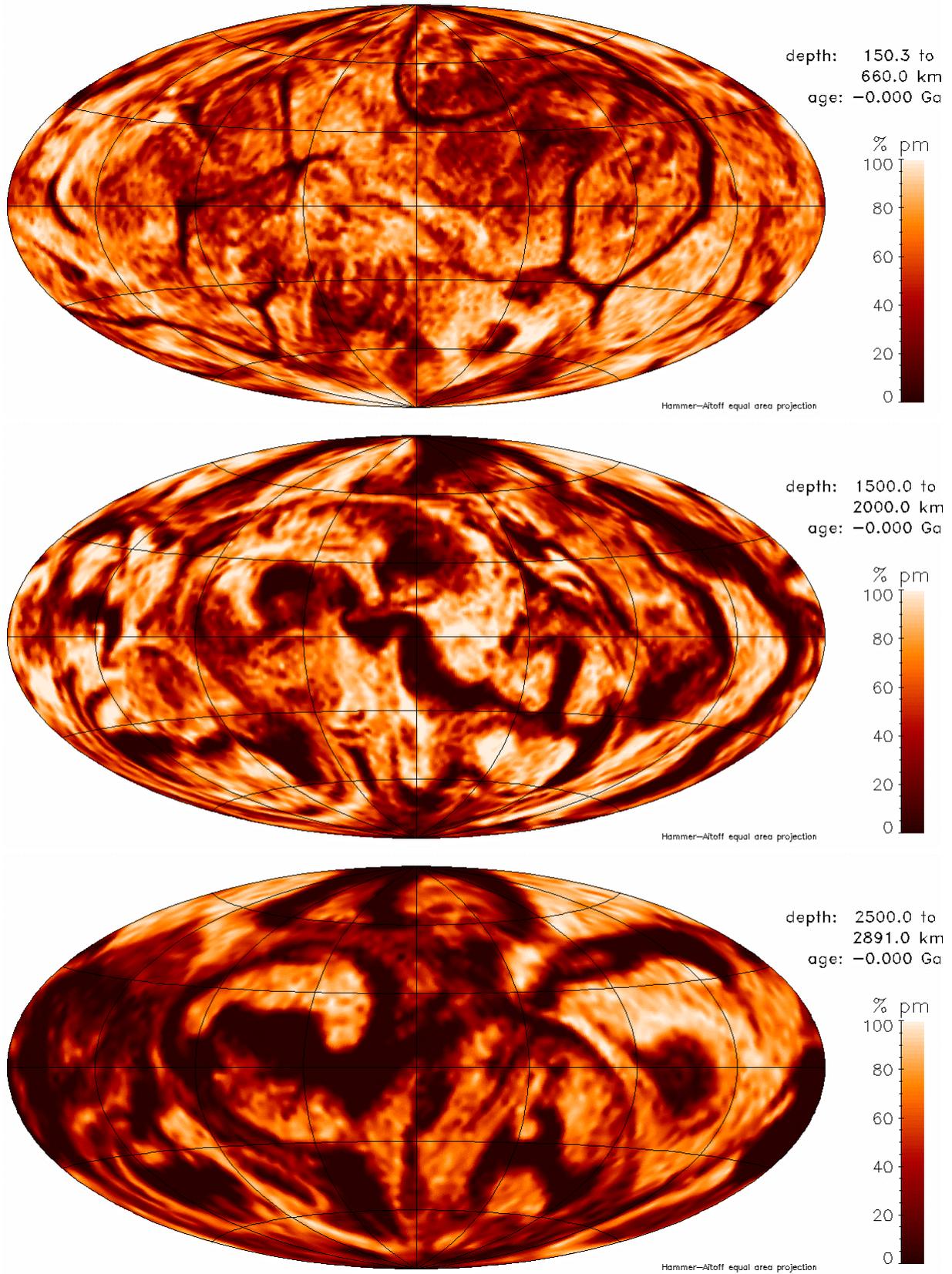
**Abb. 5.13-26:** Tiefenverteilung ursprünglichen Materials im heutigen Mantel

### 5.13. Modell 653



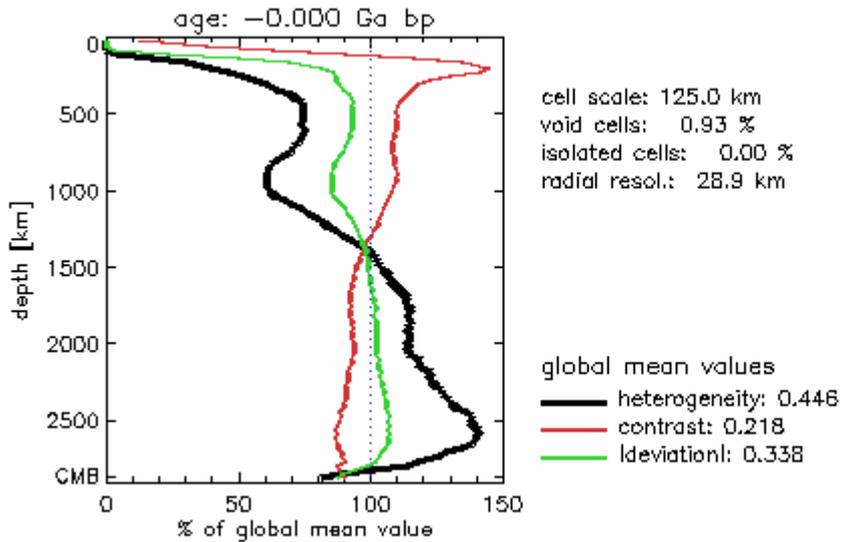
**Abb. 5.13-27:** Histogramme der Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Manteltiefen. Eine Probe repräsentiert den Mittelwert des gesamten radialen Intervalls. n ist die Anzahl der Unterteilungen der Kugelfläche in der jeweiligen Tiefe.

### 5.13. Modell 653

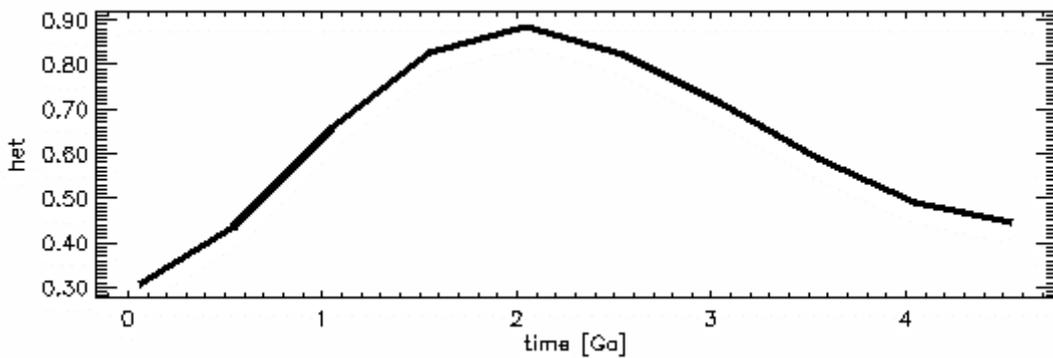


**Abb. 5.13-28:** Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Tiefenintervallen. Die laterale Auflösung entspricht der des jeweils passenden Histogramms in Abb. 5.13-27.

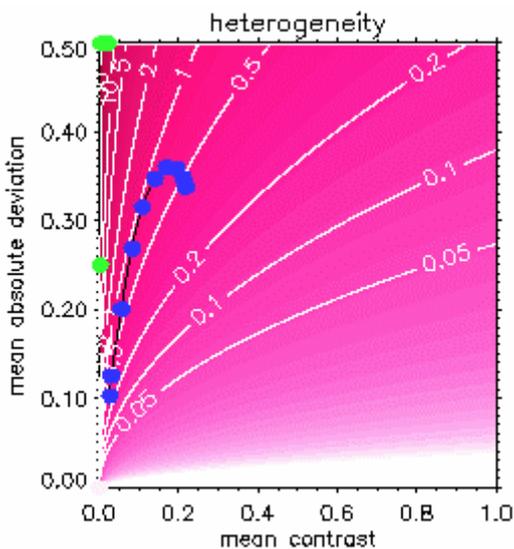
### 5.13. Modell 653



**Abb. 5.13-29:** Heutige Tiefenprofile der lateral gemittelten Werte von Heterogenität, Kontrast und mittlerer Absolutabweichung. Sie werden mit dem Mittelwert in der jeweiligen Kugelschale berechnet. Der globale Wert dient nur Skalierung der Abszisse.



**Abb. 5.13-30:** Zeitliche Entwicklung der Heterogenität



**Abb. 5.13-31:** Entwicklung der globalen Mittelwerte von Heterogenität, mittlerer Absolutabweichung und Kontrast. Jeder blaue Punkt entspricht einem ausgewerteten Zeitschritt. Die schwarze Verbindungslinie folgt der zeitlichen Entwicklung. Der älteste Zeitschritt liegt näher am Koordinatenursprung als die jüngeren. Die grünen Punkte markieren die Lage der in Kapitel 4.2.3 vorgestellten Referenzmodelle. Die rötliche Farbkodierung mit Höhenlinien stellt den Wert der Heterogenität dar.

5.14. Modell 656

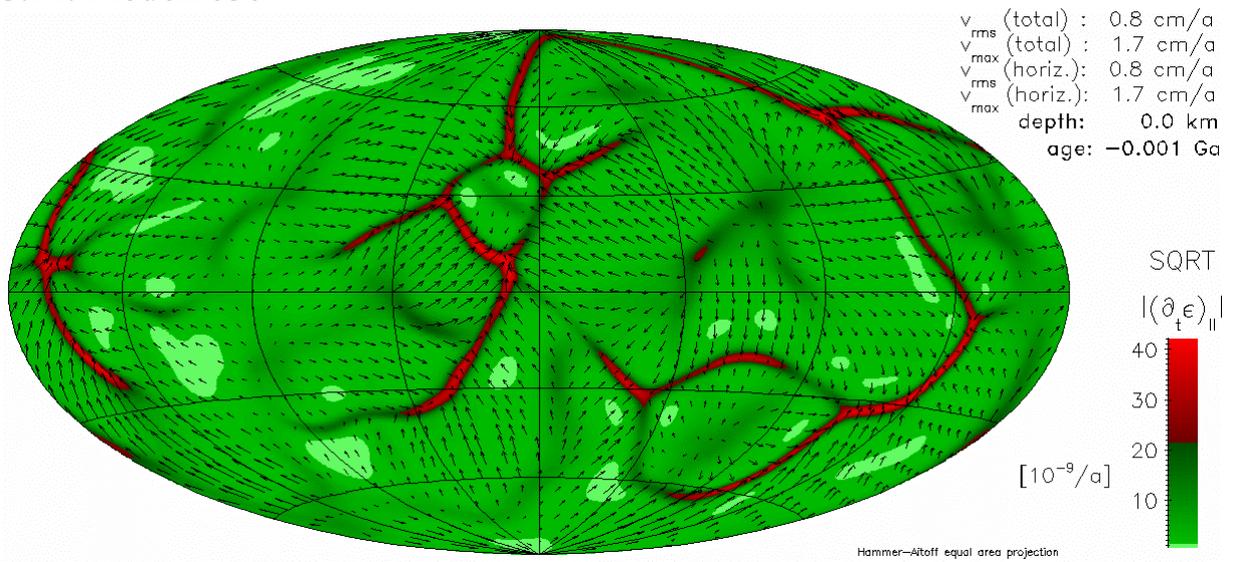


Abb. 5.14-49: Wurzel des Betrages der zweiten Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors

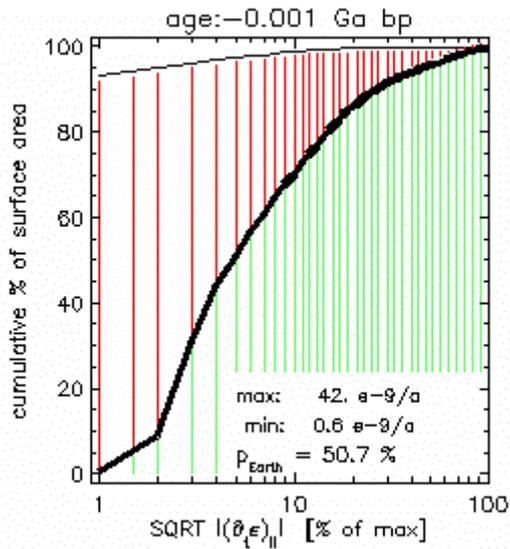


Abb. 5.14-50: Plattigkeit an der Oberfläche

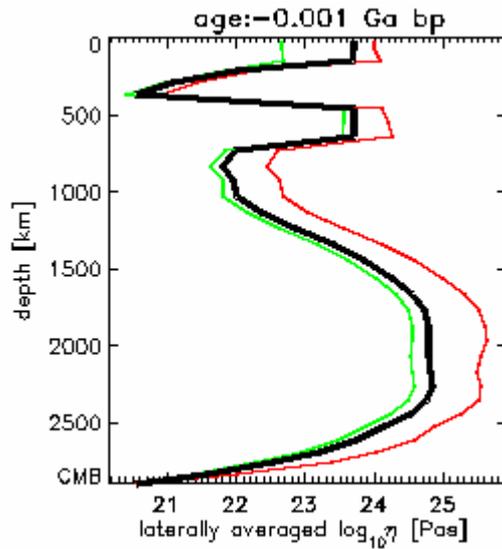


Abb. 5.14-51: Viskositätsprofil

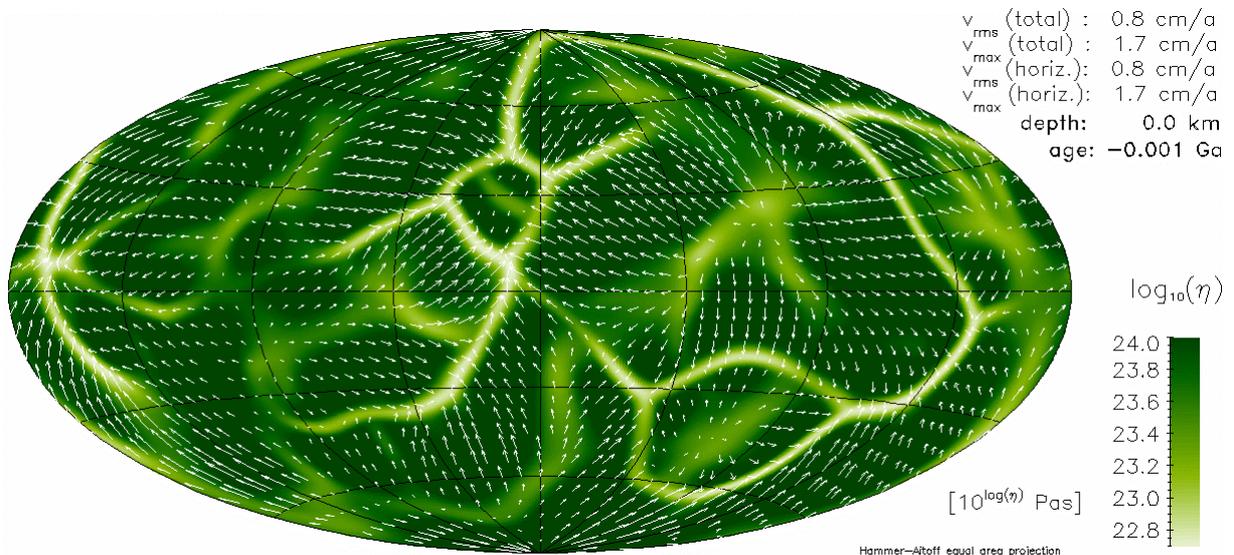
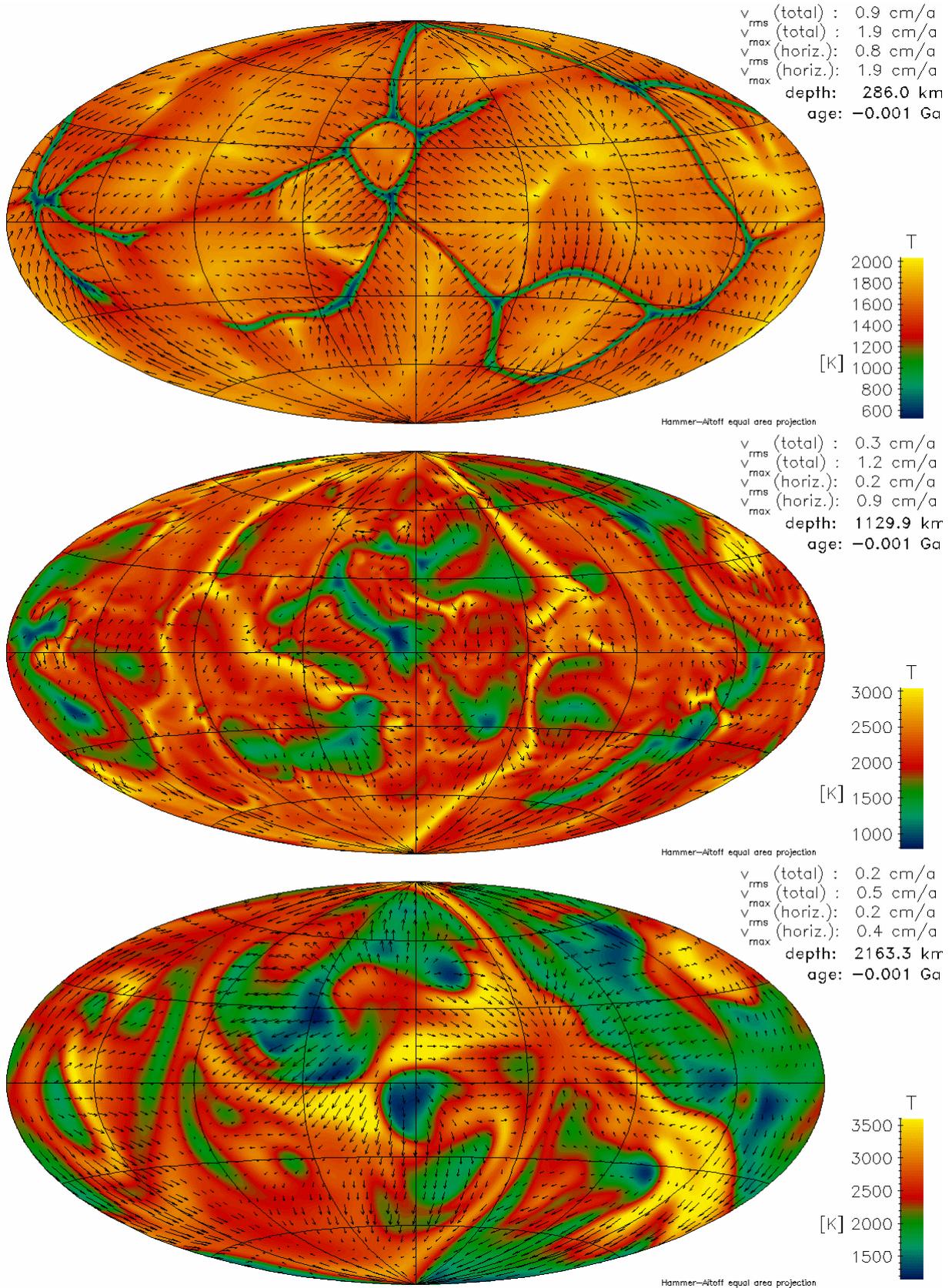


Abb. 5.14-52: Viskosität an der Oberfläche

## 5.14. Modell 656



**Abb. 5.14-5: Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten in verschiedenen Manteltiefen**

### 5.14. Modell 656

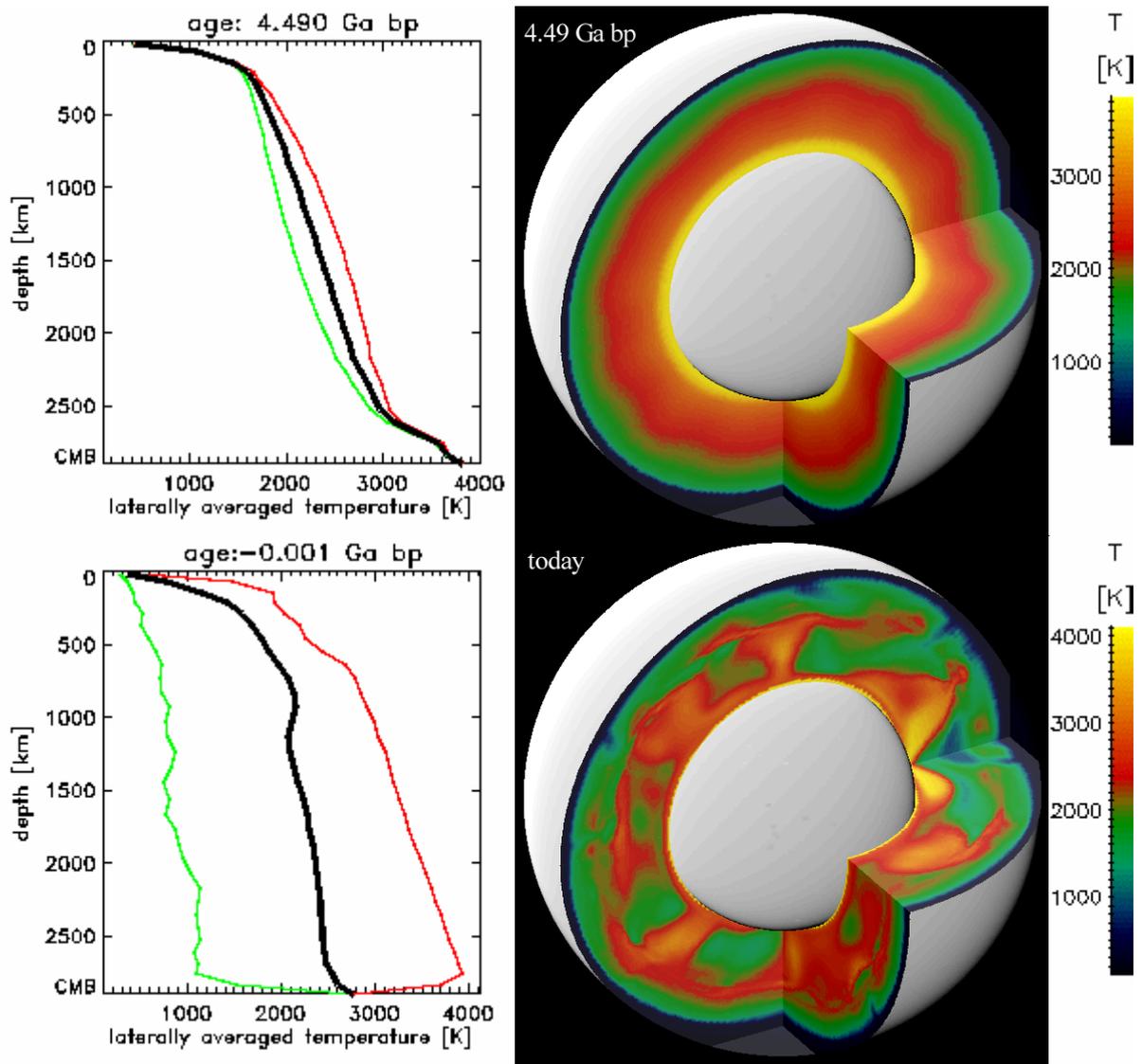


Abb. 5.14-6: Temperaturverteilung im Mantel am Anfang der Rechnung und heute

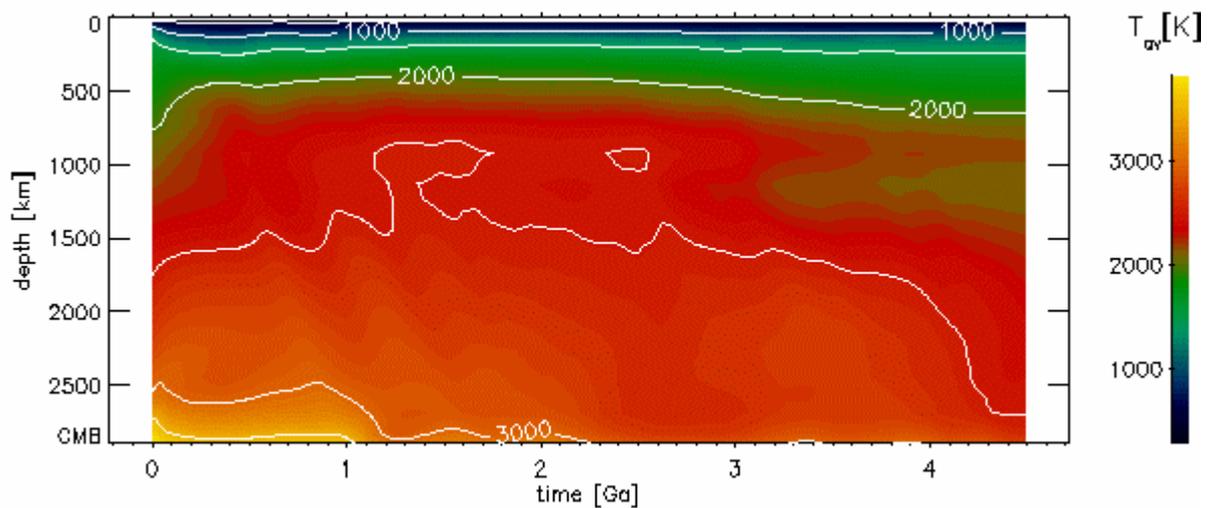


Abb. 5.14-7: Zeitliche Entwicklung des Temperaturprofils

### 5.14. Modell 656

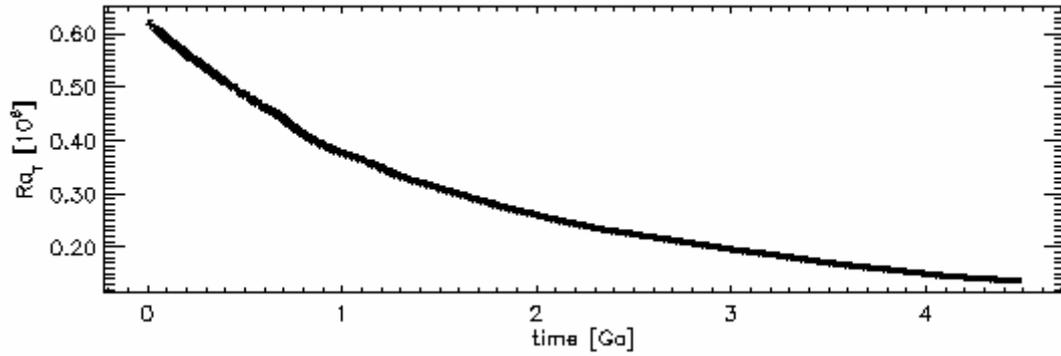


Abb. 5.14-8: Zeitliche Entwicklung der Rayleigh-Zahl

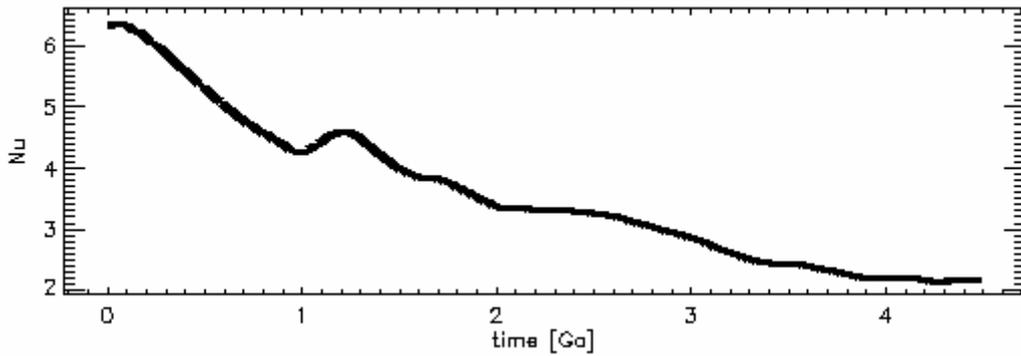


Abb. 5.14-9: Zeitliche Entwicklung der Nusselt-Zahl

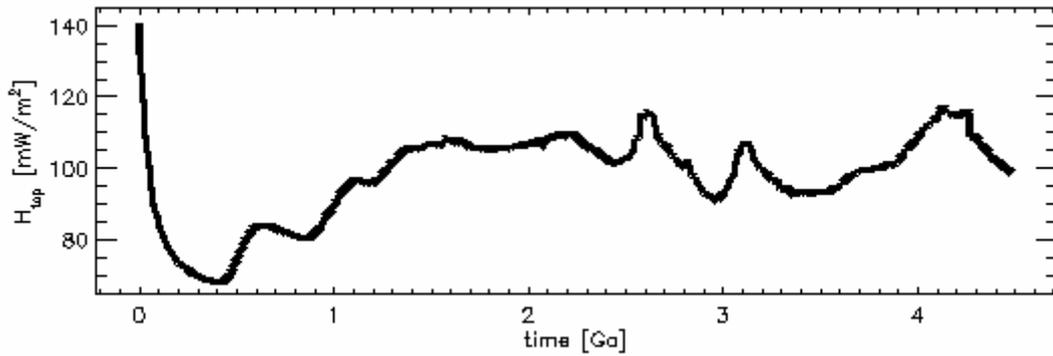


Abb. 5.14-10: Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Oberfläche

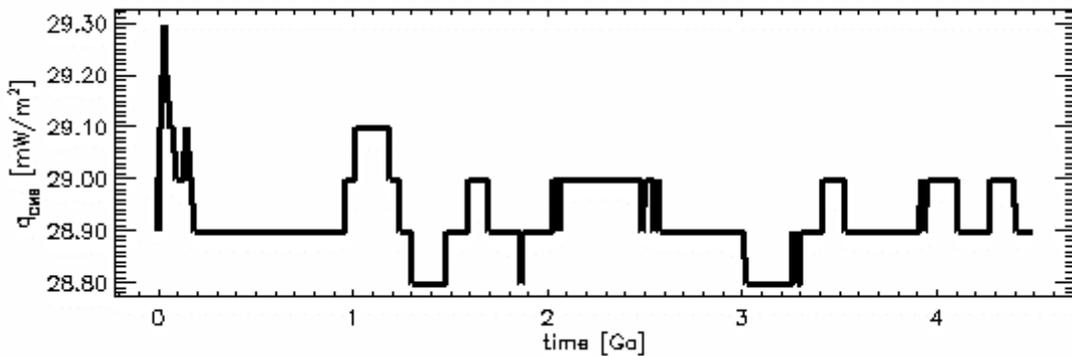
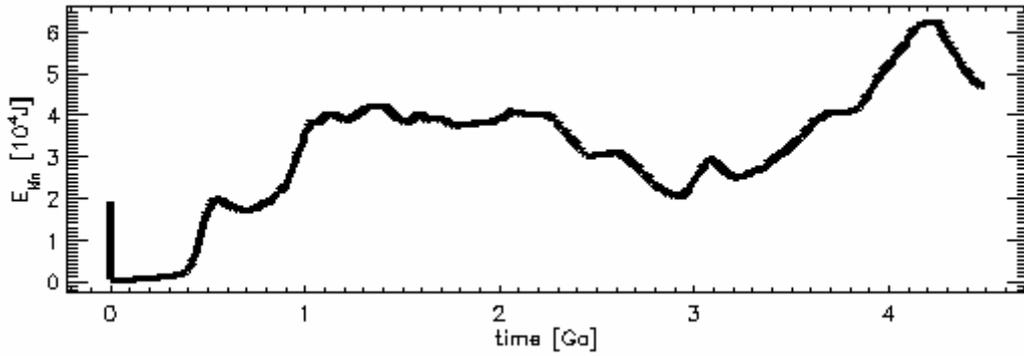
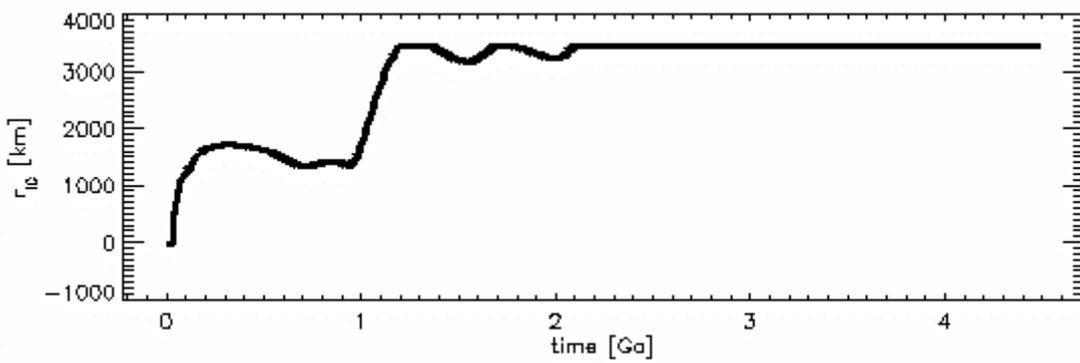


Abb. 5.14-11: Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Kern-Mantel-Grenze

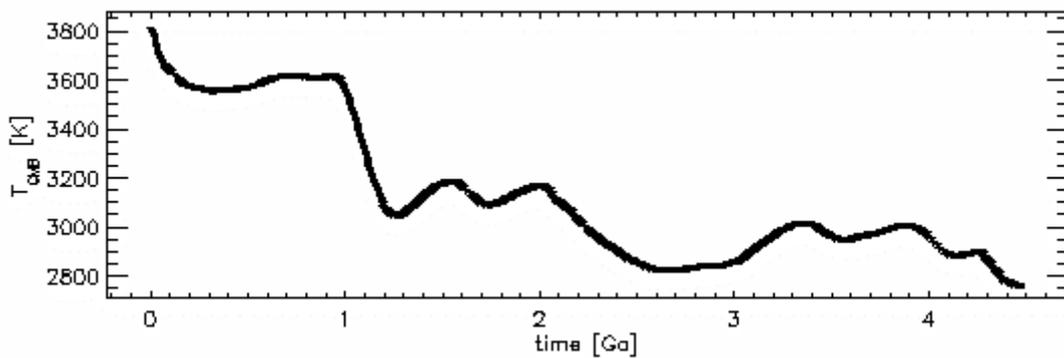
### 5.14. Modell 656



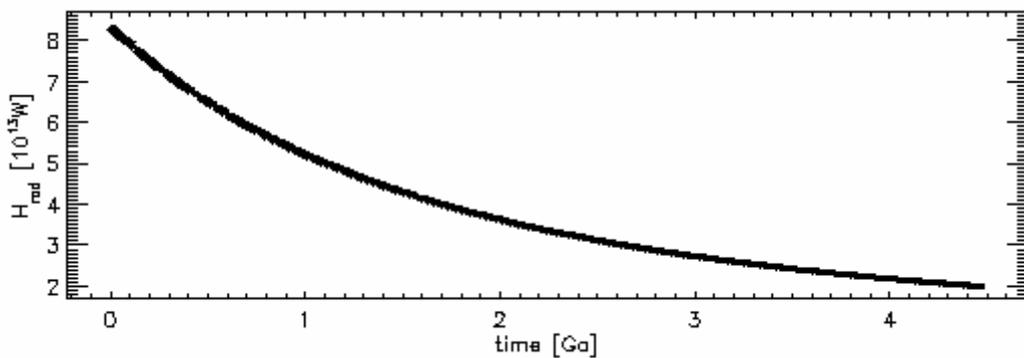
**Abb. 5.14-12:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des gesamten Mantels. Der hohe Wert am Anfang ist ein Artefakt.



**Abb. 5.14-13:** Zeitliche Entwicklung des Innenkernradius

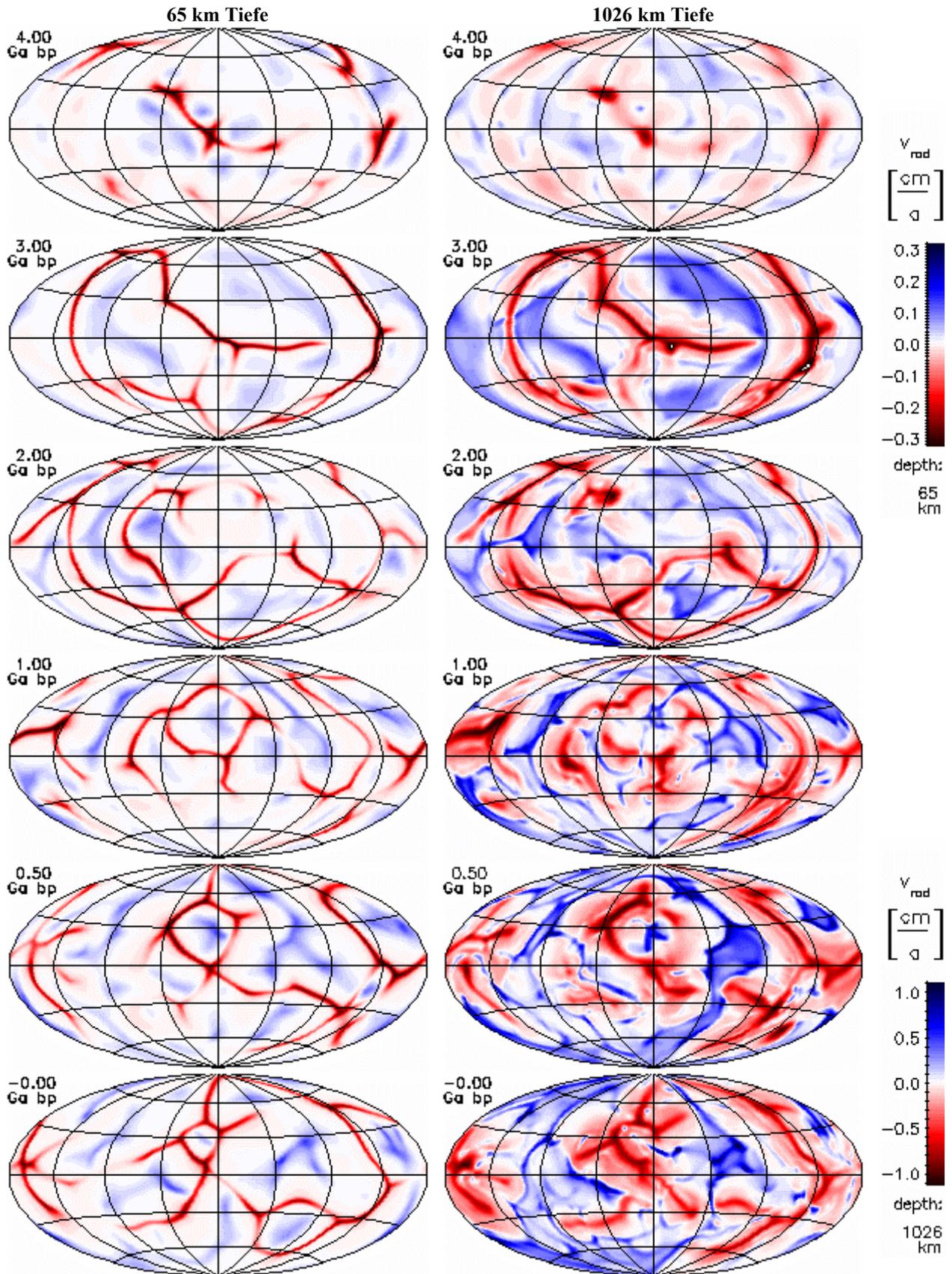


**Abb. 5.14-14:** Zeitliche Entwicklung der Temperatur an der CMB



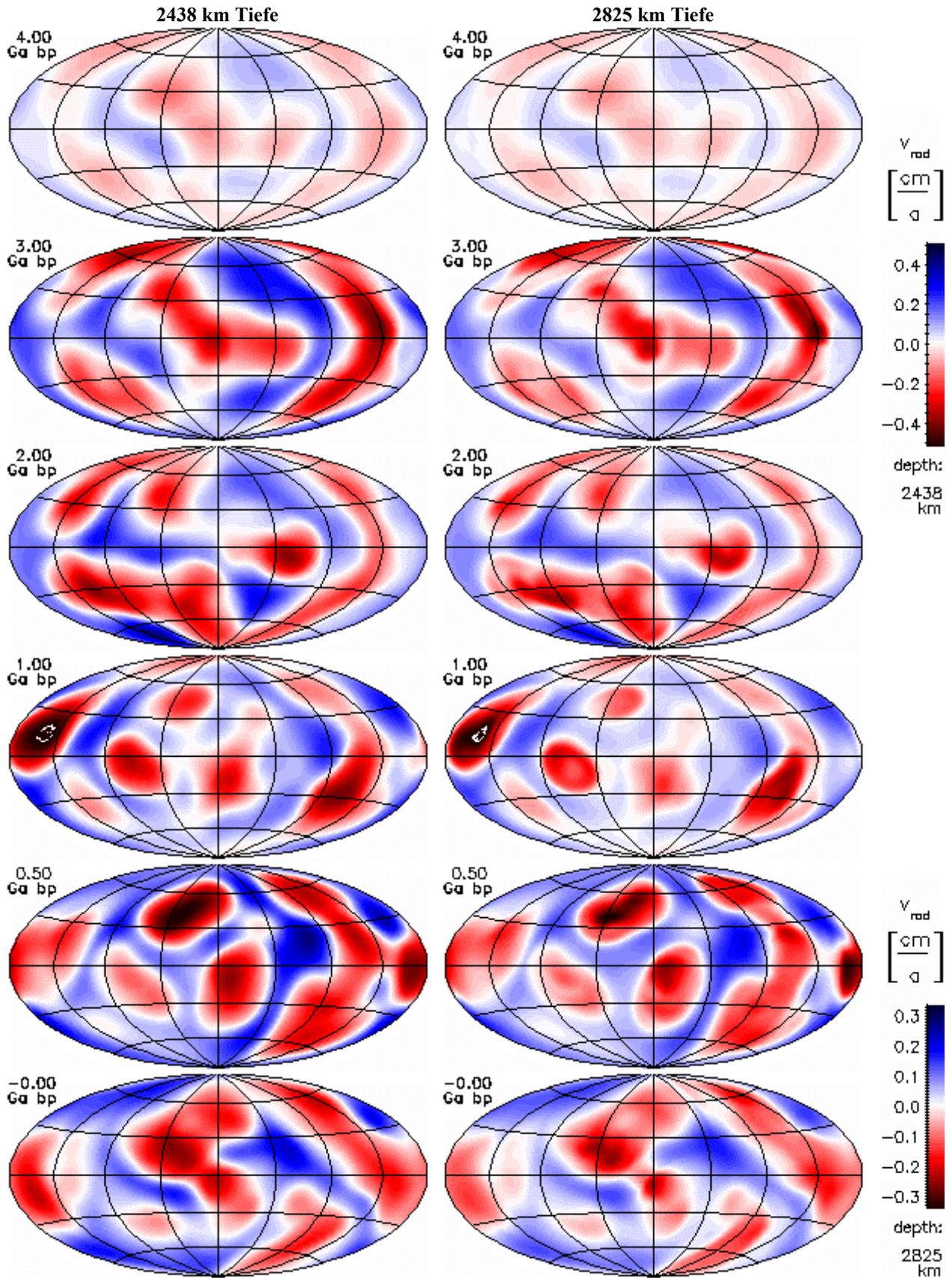
**Abb. 5.14-15:** Zeitliche Entwicklung der Heizleistung durch Zerfall von  $^{40}\text{K}$ ,  $^{42}\text{Th}$ ,  $^{235}\text{U}$  und  $^{238}\text{U}$  im Mantel

## 5.14. Modell 656



**Abb. 5.14-16:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente nahe der Oberfläche und im unteren Mantel. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind eventuell abgeschnitten.

### 5.14. Modell 656



**Abb. 5.14-17:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente im hochviskosen Teil des unteren Mantels und nahe der CMB. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind evtl. abgeschnitten.

## 5.14. Modell 656

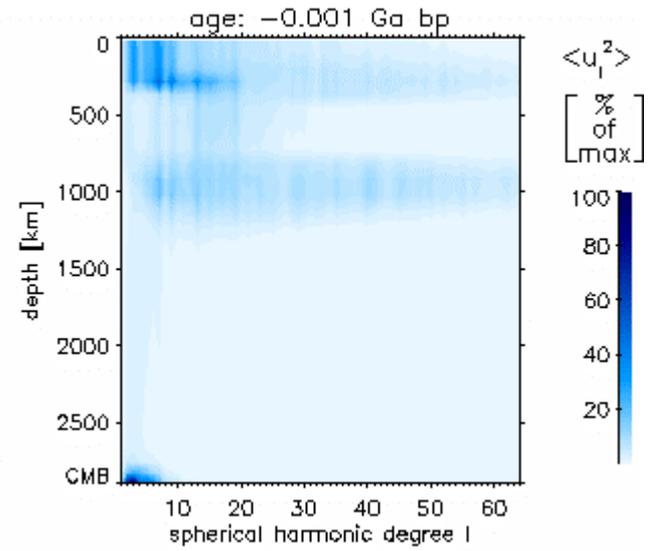
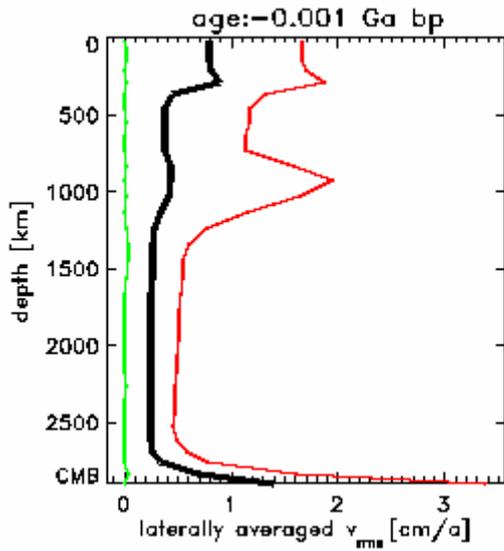


Abb. 5.14-18: Heutiges Geschwindigkeitsprofil

Abb. 5.14-19: Spektrum von toroidaler plus poloidaler kinetischer Energie

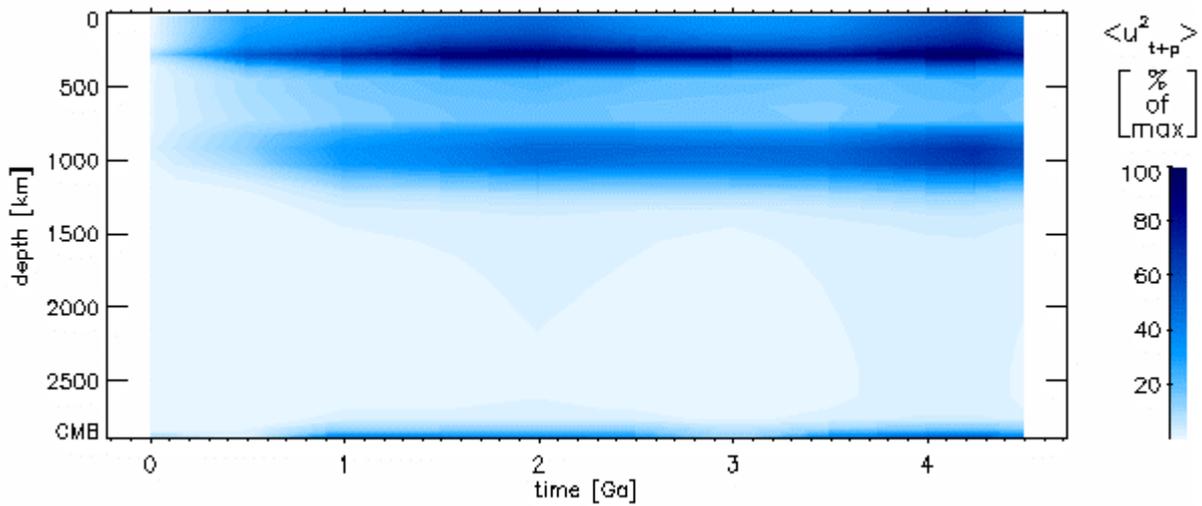


Abb. 5.14-20: Entwicklung der Tiefenverteilung der Summe von poloidaler und toroidaler Energie

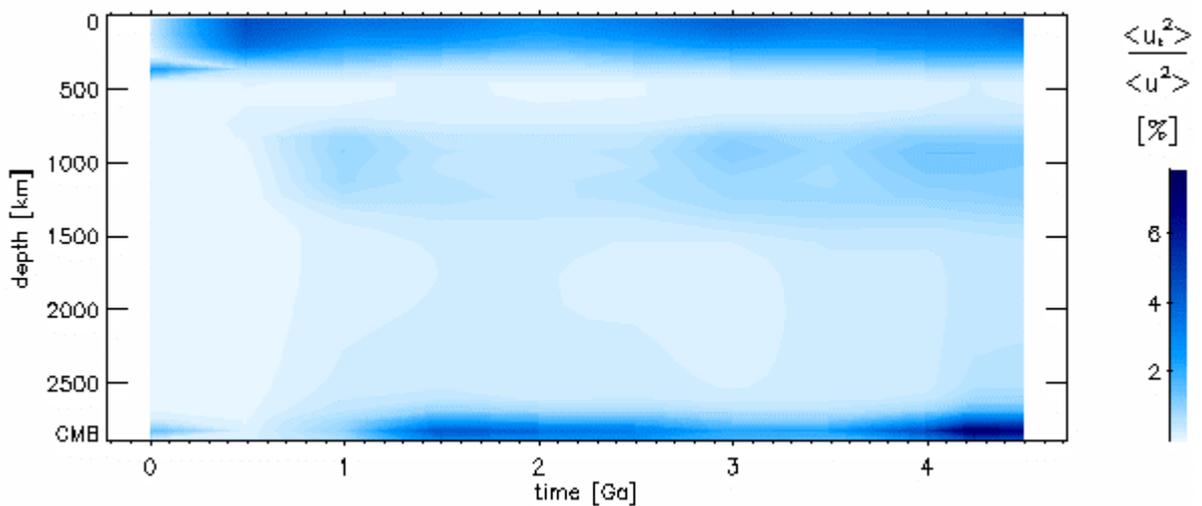
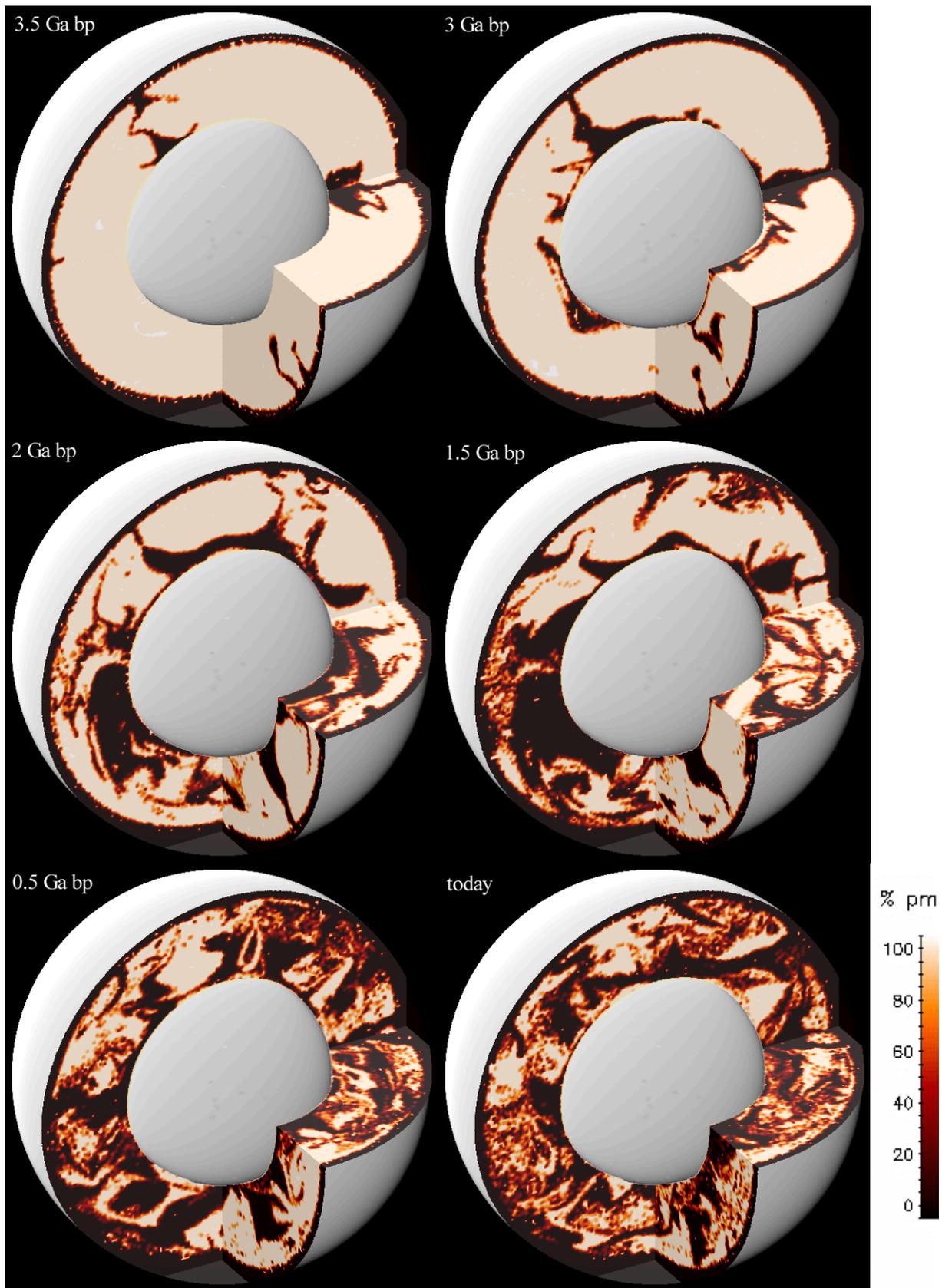


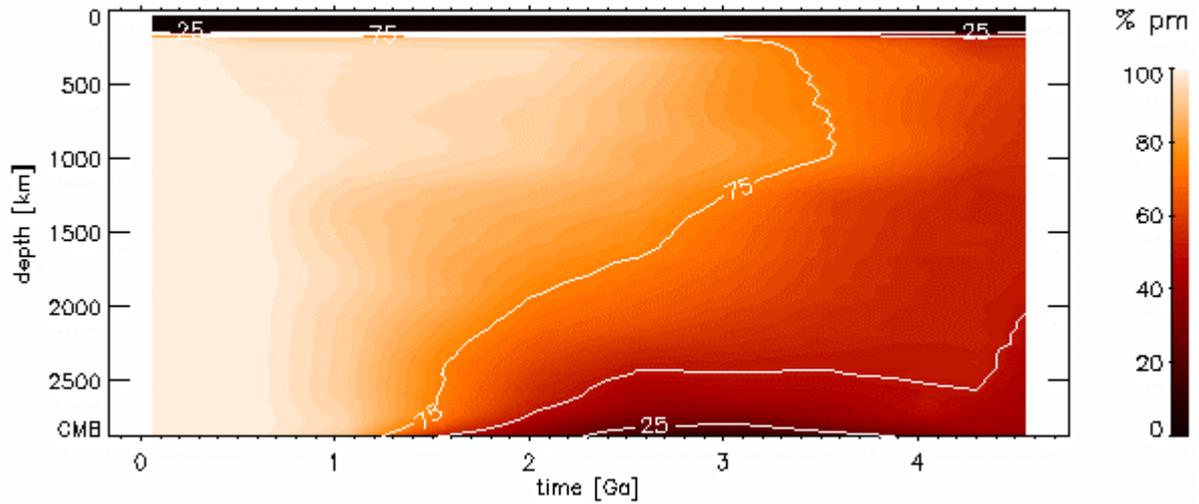
Abb. 5.14-21: Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung des toroidalen Anteils

5.14. Modell 656

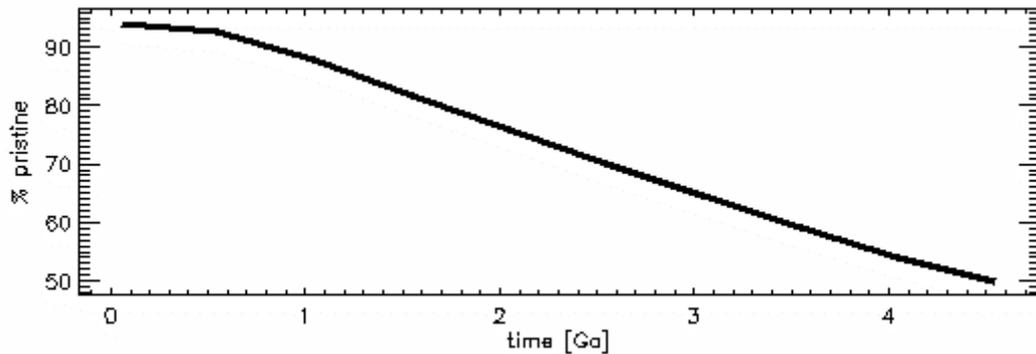


**Abb. 5.14-22:** Verteilung ursprünglichen Materials (pm) zu verschiedenen Zeiten

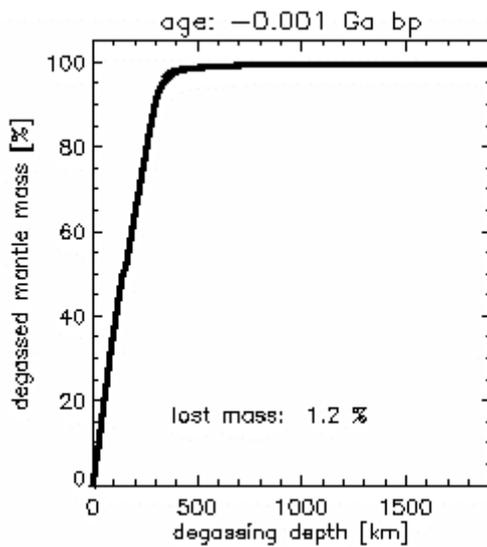
## 5.14. Modell 656



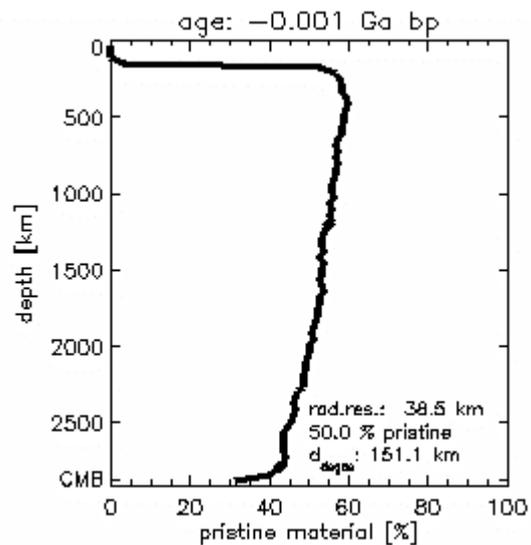
**Abb. 5.14-23:** Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung ursprünglichen Materials



**Abb. 5.14-24:** Abnahme ursprünglichen Materials im Mantel

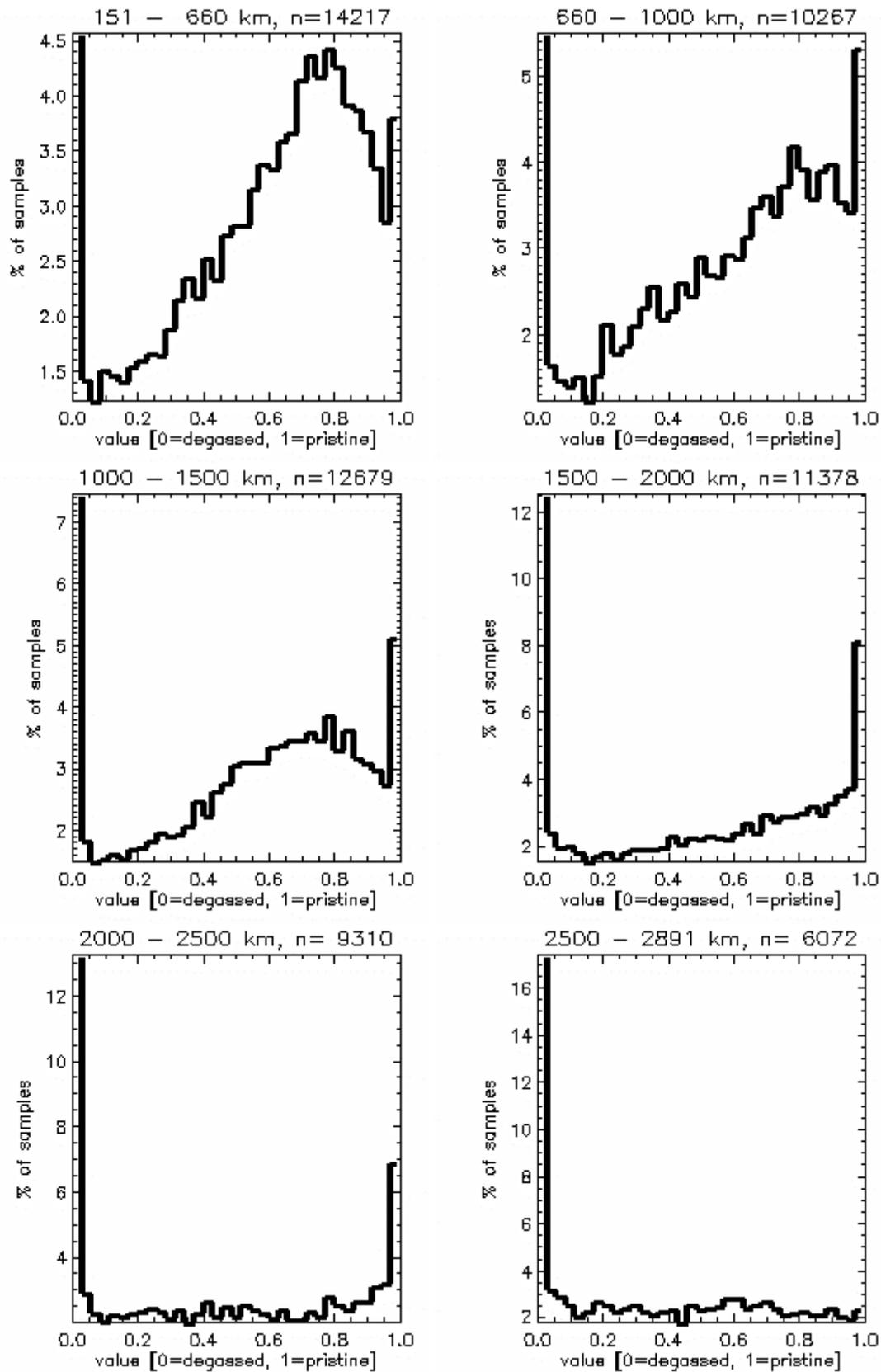


**Abb. 5.14-25:** Die Entgasungstiefe wird so festgelegt, dass am Ende der Rechnung 50 % des Mantels entgast sind



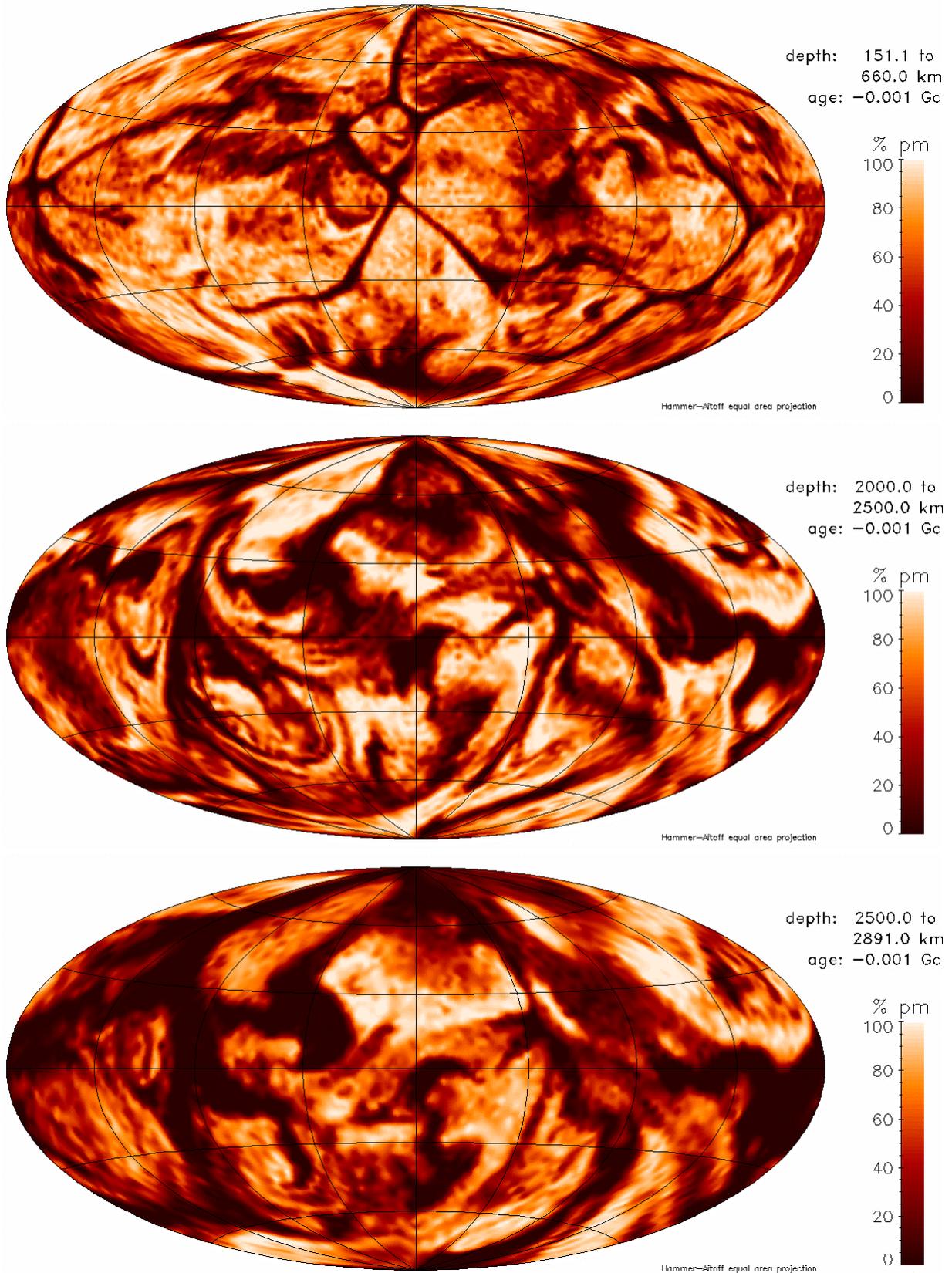
**Abb. 5.14-26:** Tiefenverteilung ursprünglichen Materials im heutigen Mantel

## 5.14. Modell 656



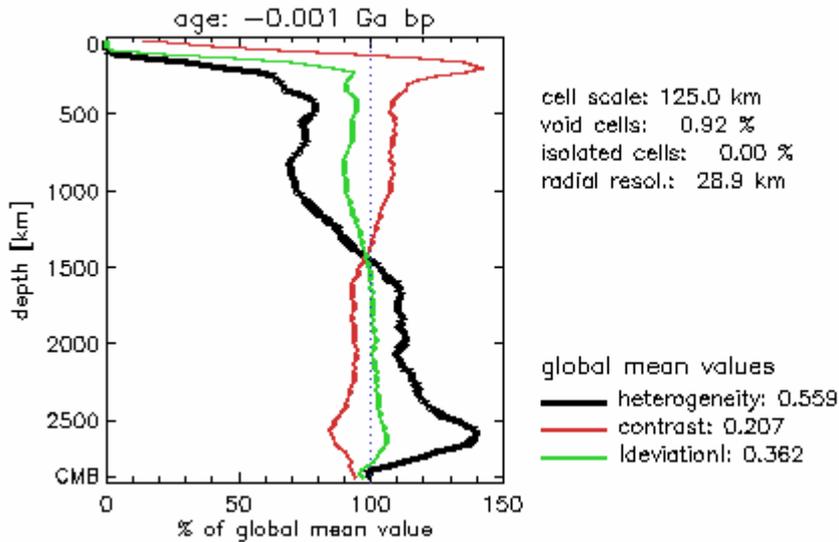
**Abb. 5.14-27:** Histogramme der Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Manteltiefen. Eine Probe repräsentiert den Mittelwert des gesamten radialen Intervalls. n ist die Anzahl der Unterteilungen der Kugelfläche in der jeweiligen Tiefe.

### 5.14. Modell 656

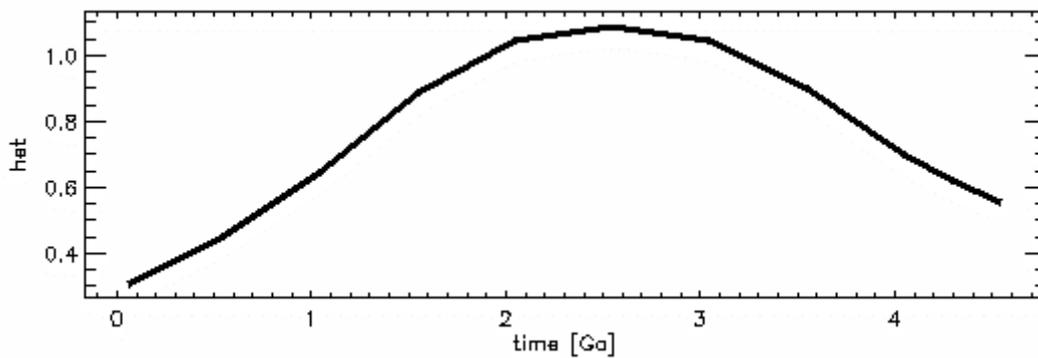


**Abb. 5.14-28:** Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Tiefenintervallen. Die laterale Auflösung entspricht der des jeweils passenden Histogramms in Abb. 5.14-27.

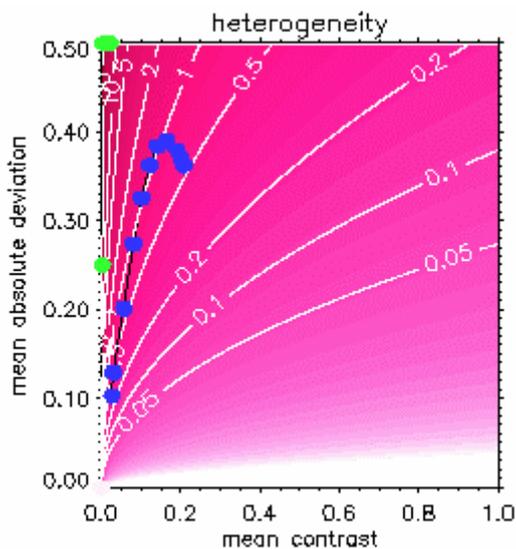
## 5.14. Modell 656



**Abb. 5.14-29:** Heutige Tiefenprofile der lateral gemittelten Werte von Heterogenität, Kontrast und mittlerer Absolutabweichung. Sie werden mit dem Mittelwert in der jeweiligen Kugelschale berechnet. Der globale Wert dient nur Skalierung der Abszisse.



**Abb. 5.14-30:** Zeitliche Entwicklung der Heterogenität



**Abb. 5.14-31:** Entwicklung der globalen Mittelwerte von Heterogenität, mittlerer Absolutabweichung und Kontrast.

Jeder blaue Punkt entspricht einem ausgewerteten Zeitschritt. Die schwarze Verbindungslinie folgt der zeitlichen Entwicklung. Der älteste Zeitschritt liegt näher am Koordinatenursprung als die jüngeren. Die grünen Punkte markieren die Lage der in Kapitel 4.2.3 vorgestellten Referenzmodelle. Die rötliche Farbkodierung mit Höhenlinien stellt den Wert der Heterogenität dar.

5.15. Modell 657

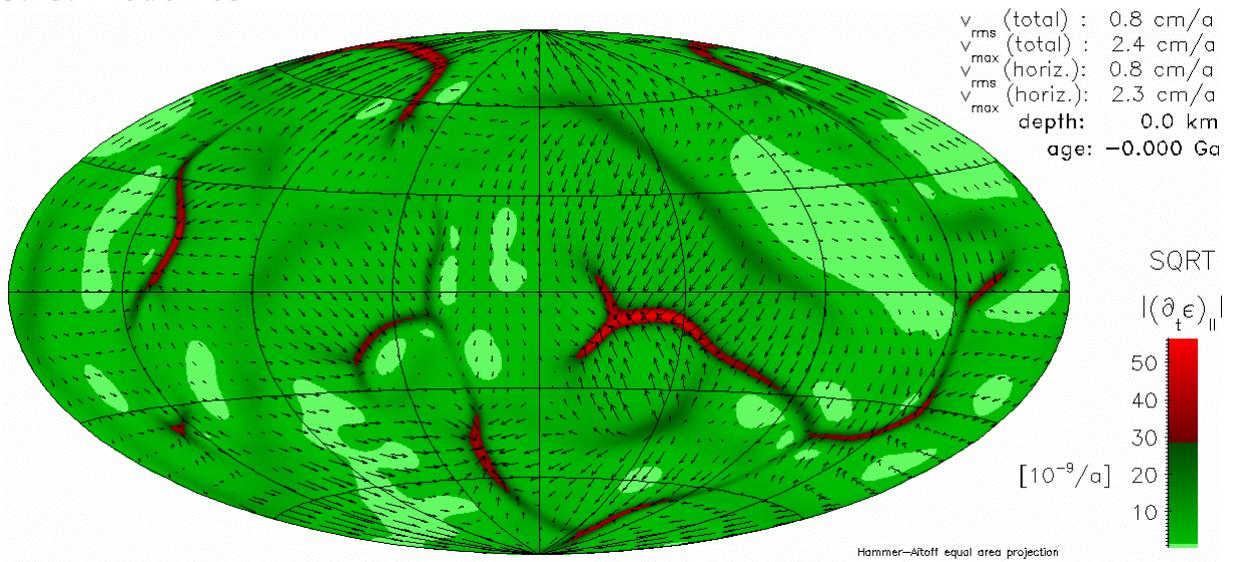


Abb. 5.15-53: Wurzel des Betrages der zweiten Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors

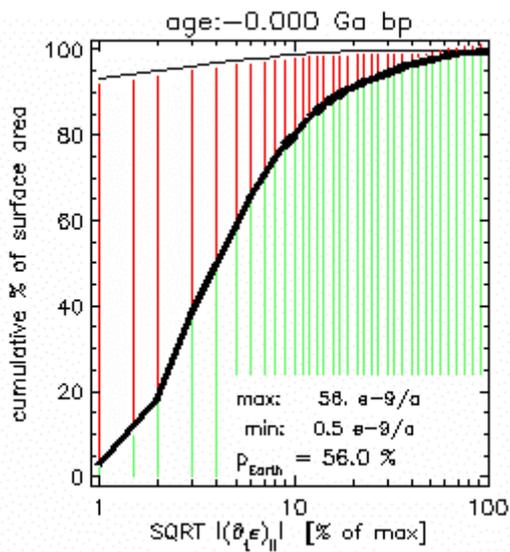


Abb. 5.15-54: Plattigkeit an der Oberfläche

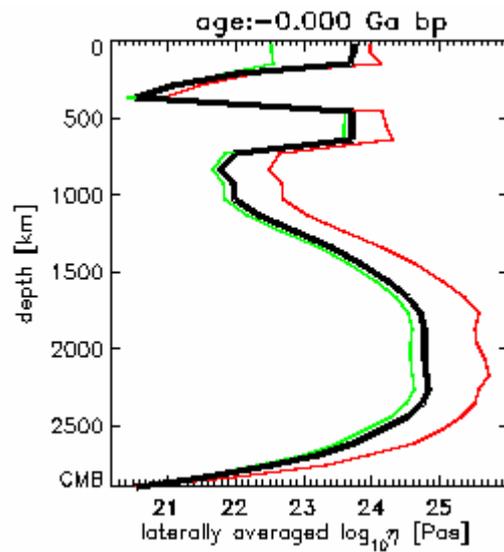


Abb. 5.15-55: Viskositätsprofil

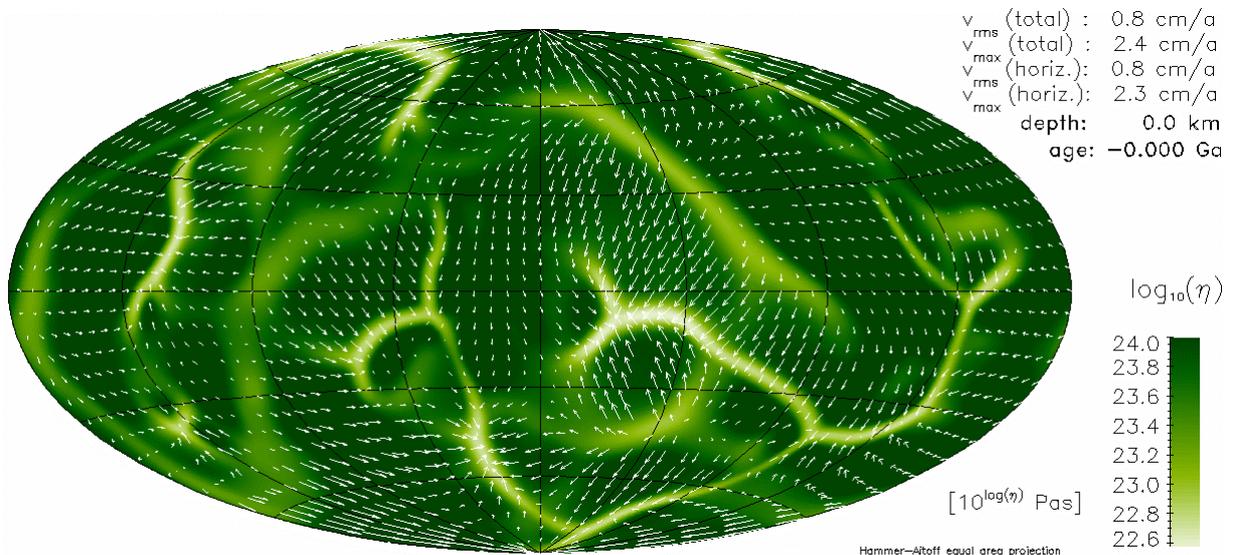
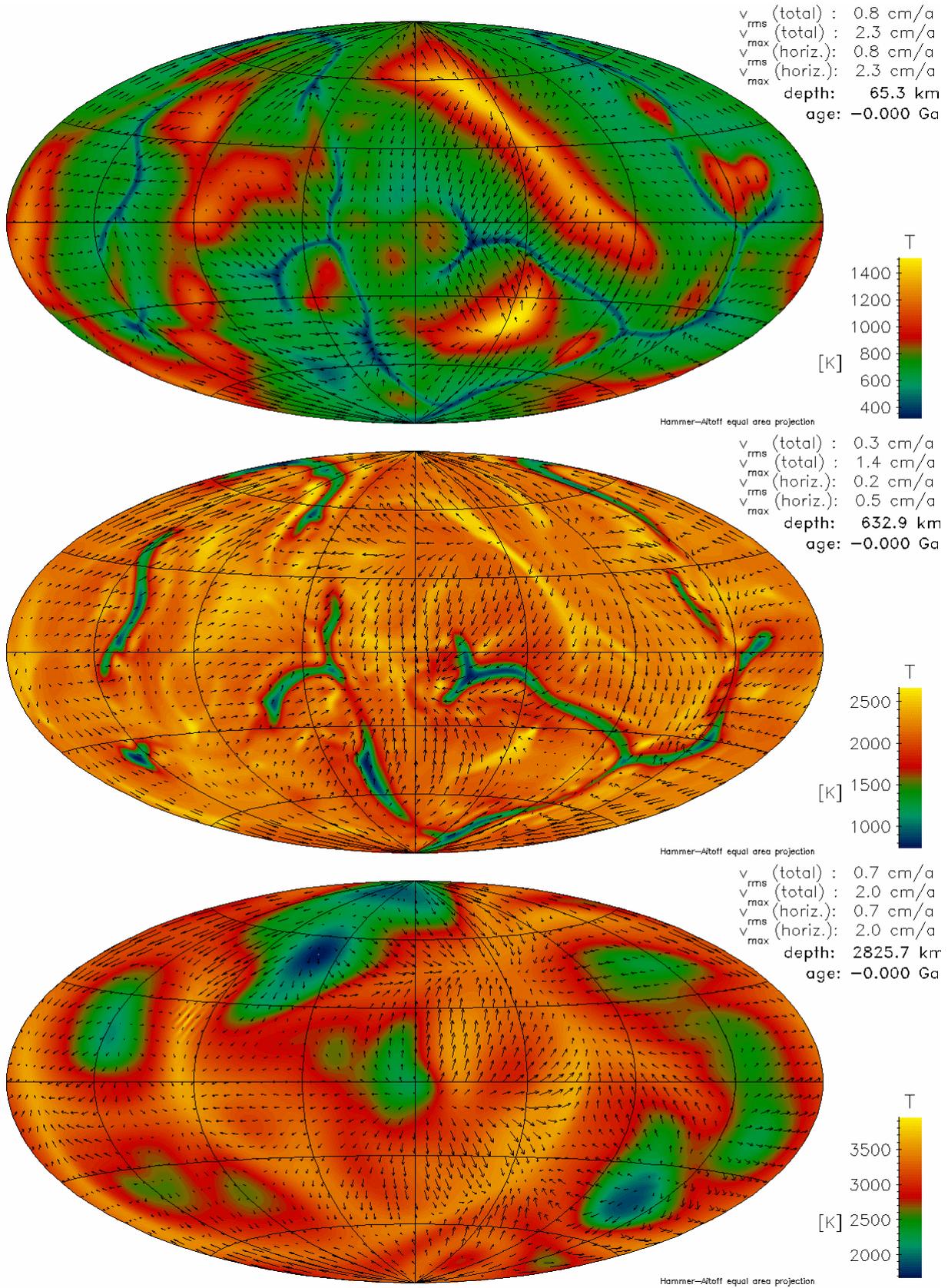


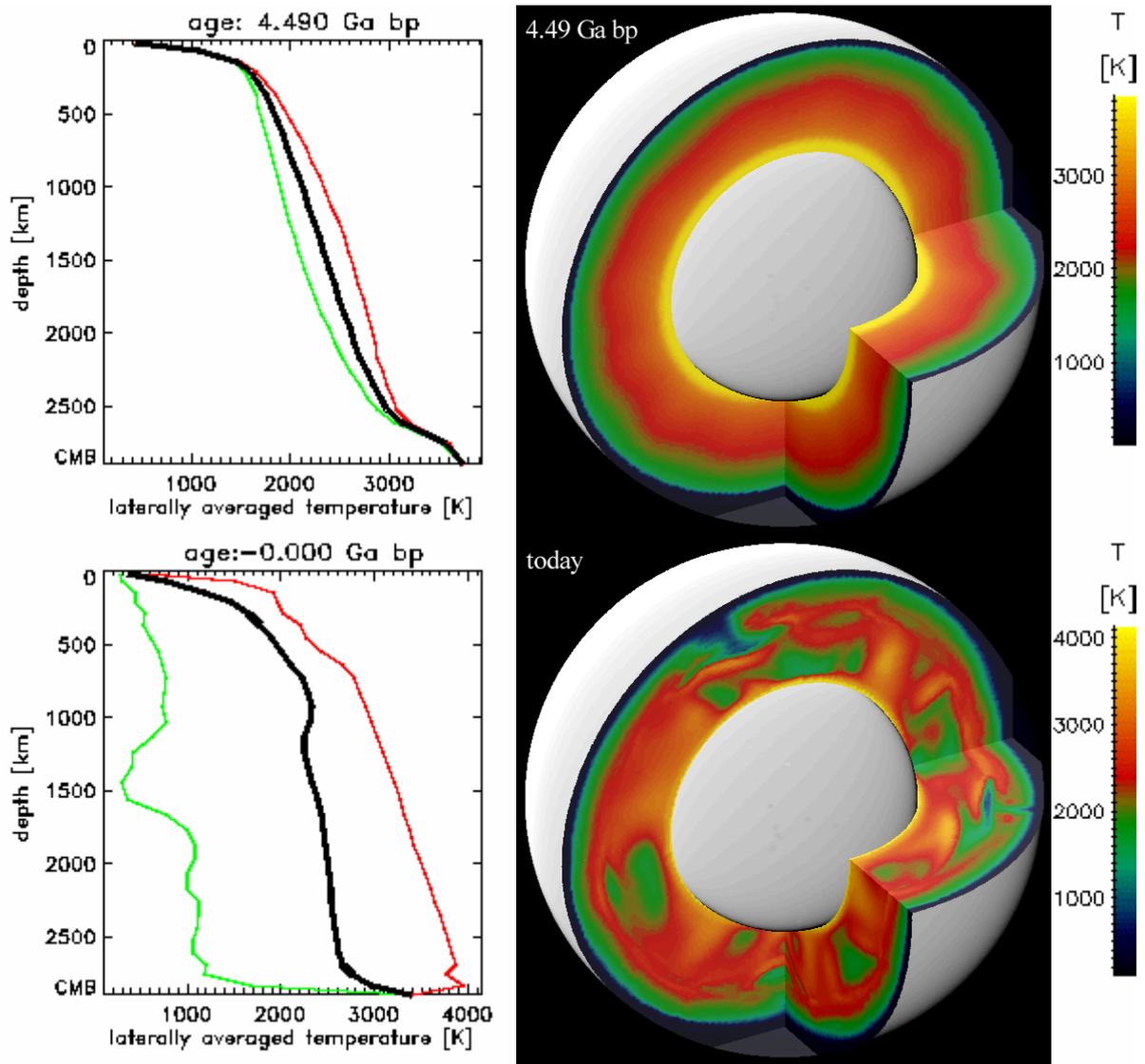
Abb. 5.15-56: Viskosität an der Oberfläche

### 5.15. Modell 657

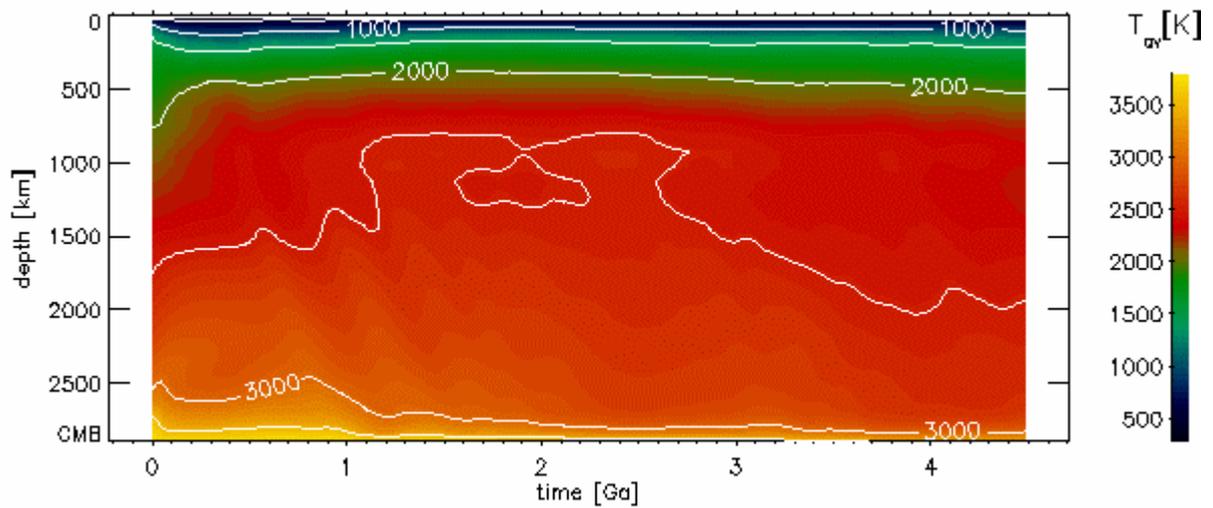


**Abb. 5.15-5: Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten in verschiedenen Manteltiefen**

### 5.15. Modell 657

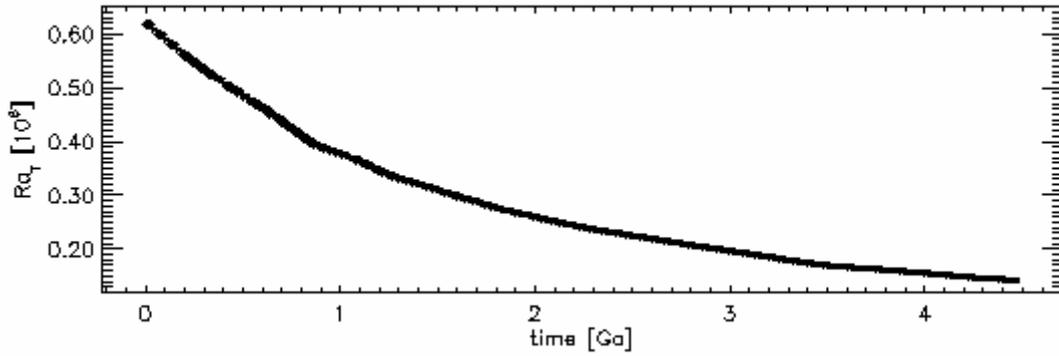


**Abb. 5.15-6:** Temperaturverteilung im Mantel am Anfang der Rechnung und heute

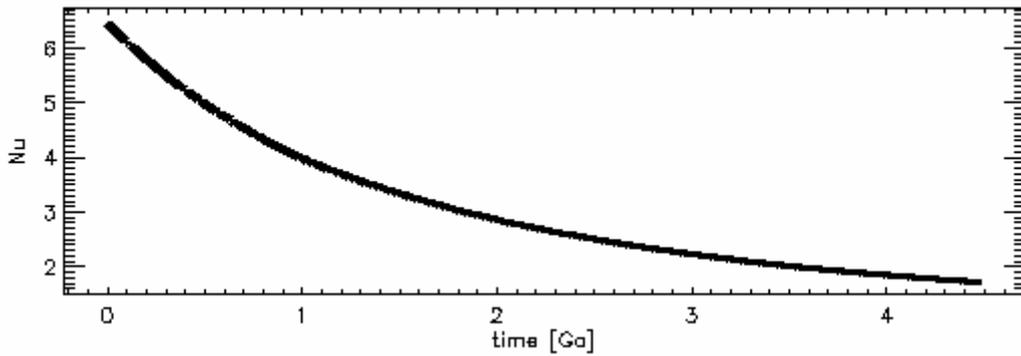


**Abb. 5.15-7:** Zeitliche Entwicklung des Temperaturprofils

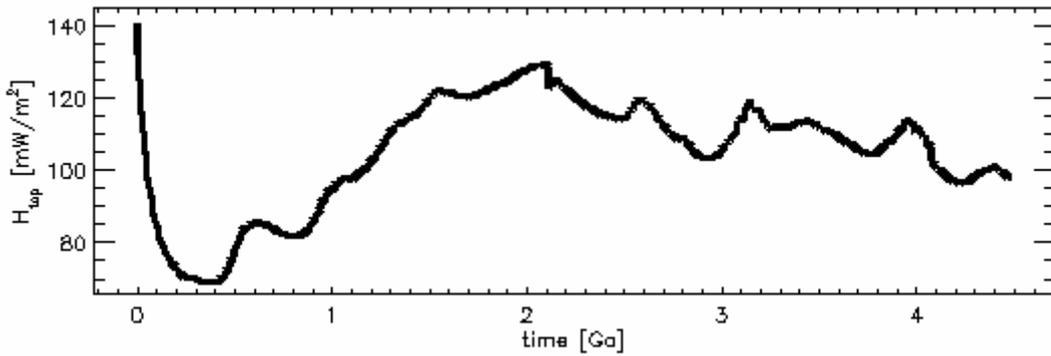
### 5.15. Modell 657



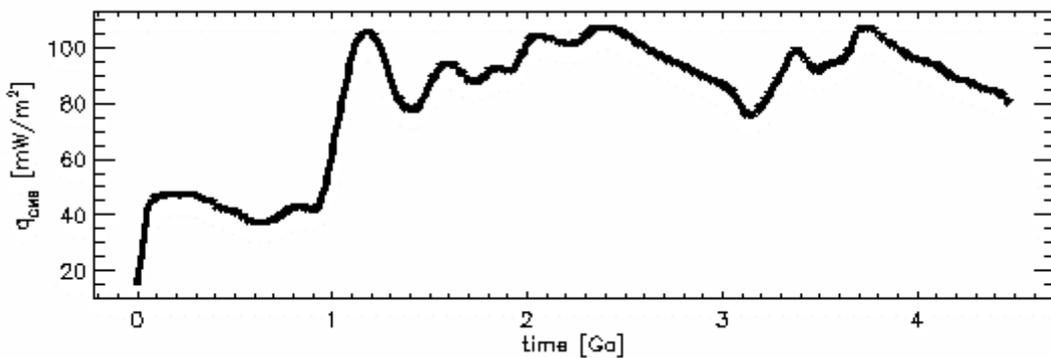
**Abb. 5.15-8:** Zeitliche Entwicklung der Rayleigh-Zahl



**Abb. 5.15-9:** Zeitliche Entwicklung der Nusselt-Zahl

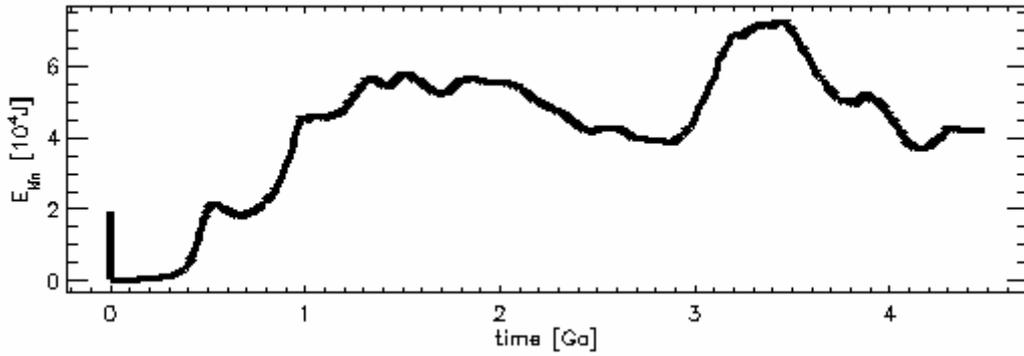


**Abb. 5.15-10:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Oberfläche

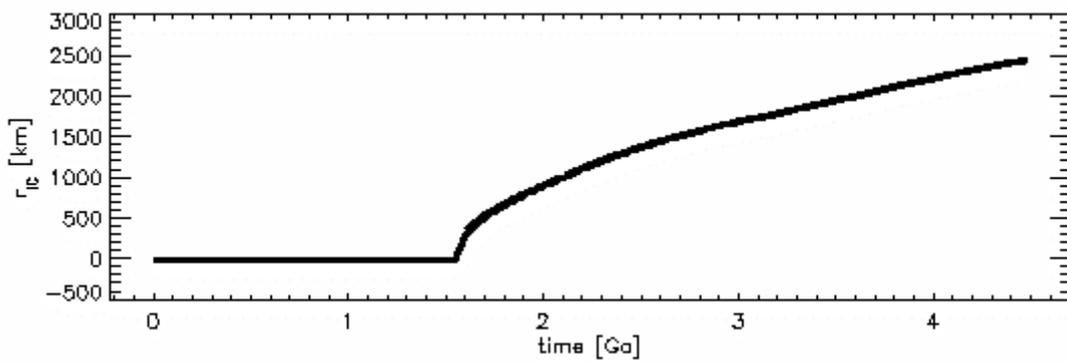


**Abb. 5.15-11:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Kern-Mantel-Grenze

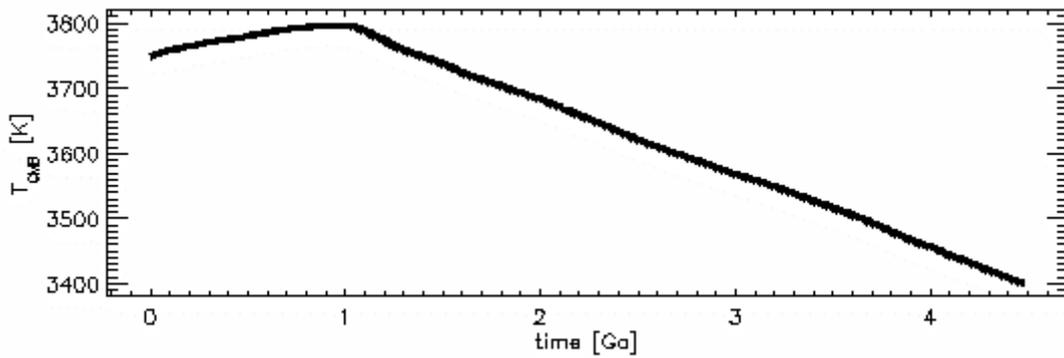
### 5.15. Modell 657



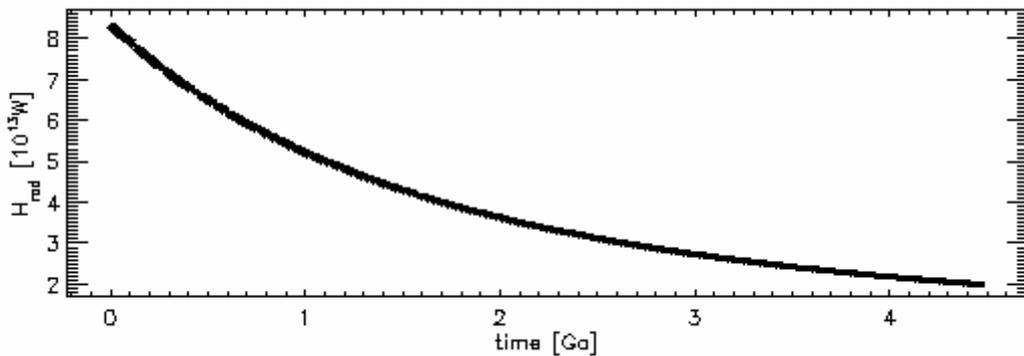
**Abb. 5.15-12:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des gesamten Mantels. Der hohe Wert am Anfang ist ein Artefakt.



**Abb. 5.15-13:** Zeitliche Entwicklung des Innenkernradius

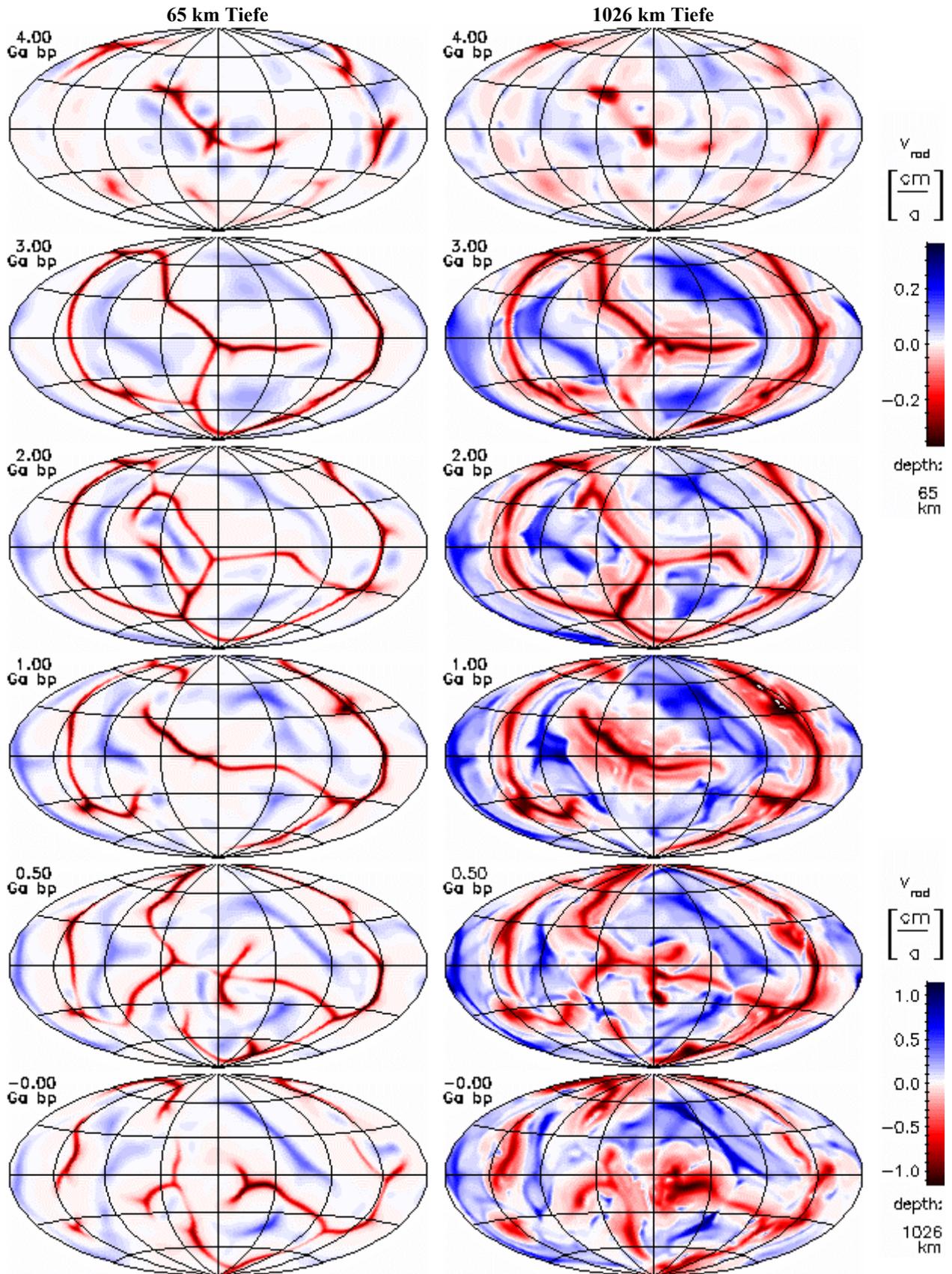


**Abb. 5.15-14:** Zeitliche Entwicklung der Temperatur an der CMB



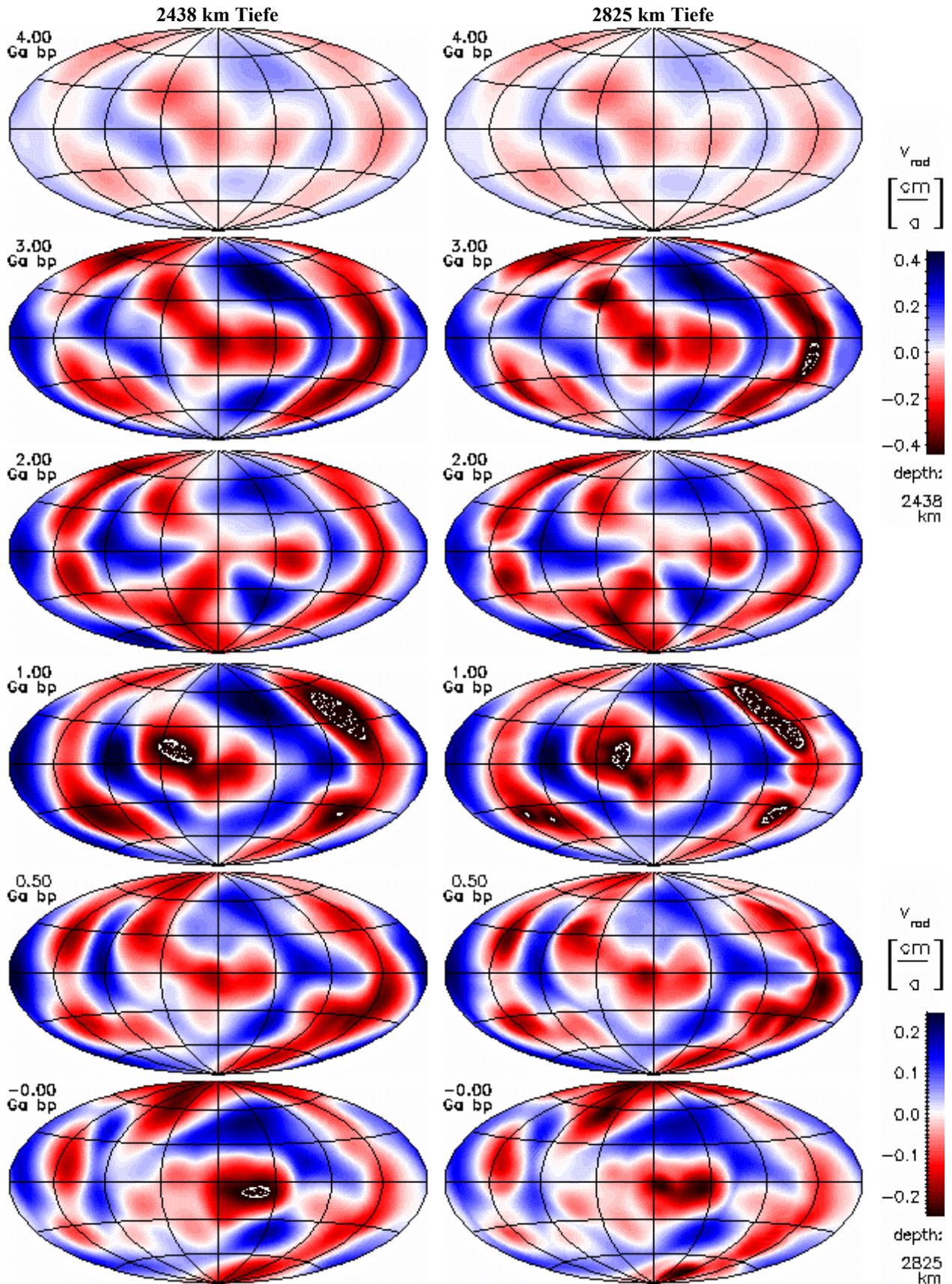
**Abb. 5.15-15:** Zeitliche Entwicklung der Heizleistung durch Zerfall von  $^{40}K$ ,  $^{42}Th$ ,  $^{235}U$  und  $^{238}U$  im Mantel

### 5.15. Modell 657



**Abb. 5.15-16:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente nahe der Oberfläche und im unteren Mantel. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind eventuell abgeschnitten.

### 5.15. Modell 657



**Abb. 5.15-17:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente im hochviskosen Teil des unteren Mantels und nahe der CMB. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind evtl. abgeschnitten.

## 5.15. Modell 657

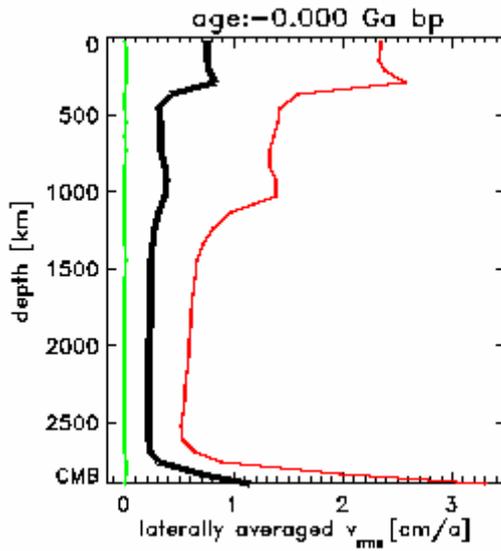


Abb. 5.15-18: Heutiges Geschwindigkeitsprofil

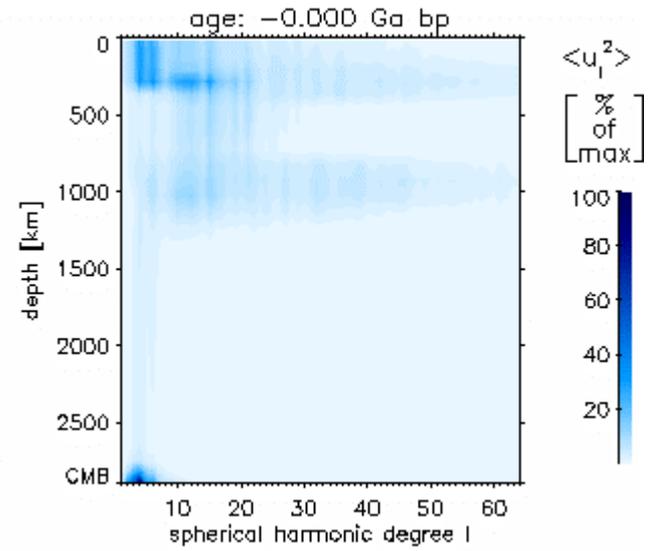


Abb. 5.15-19: Spektrum von toroidaler plus poloidaler kinetischer Energie

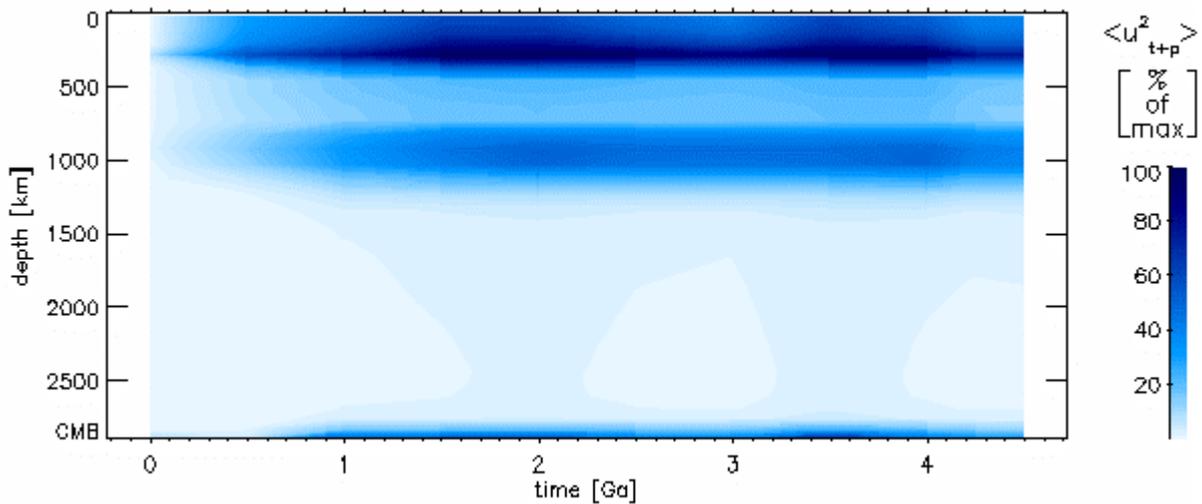


Abb. 5.15-20: Entwicklung der Tiefenverteilung der Summe von poloidaler und toroidaler Energie

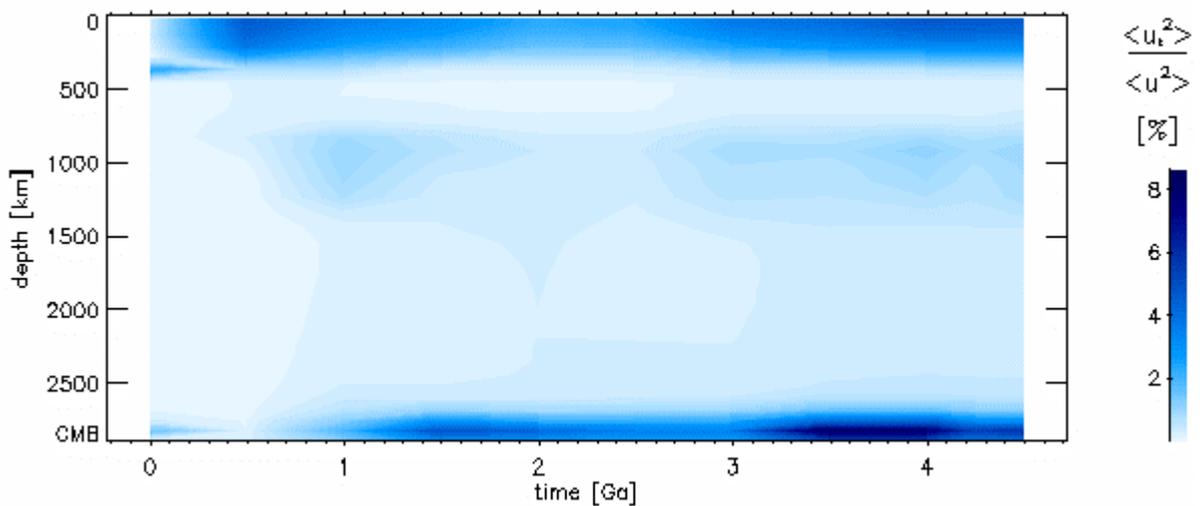


Abb. 5.15-21: Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung des toroidalen Anteils

5.15. Modell 657

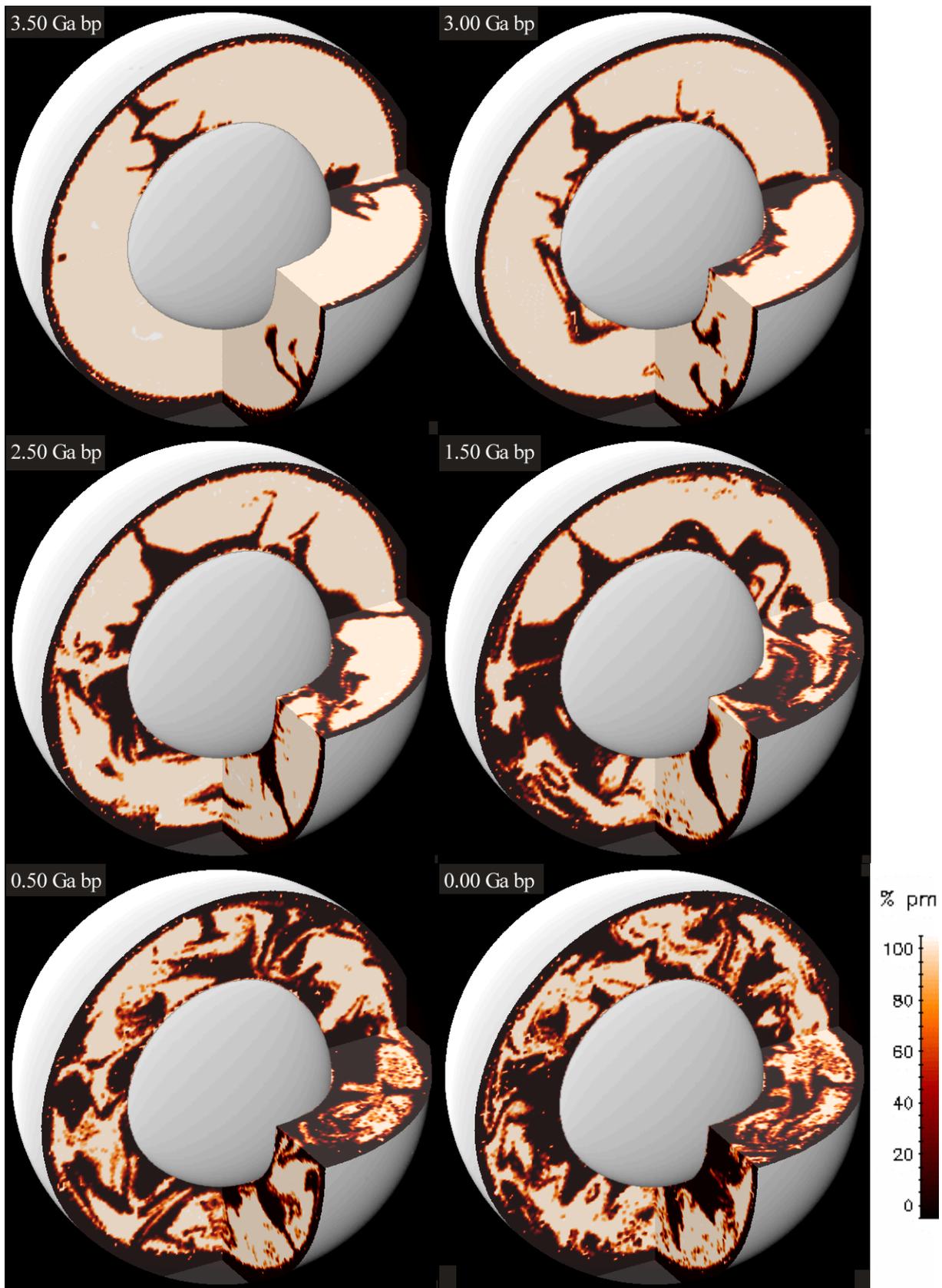
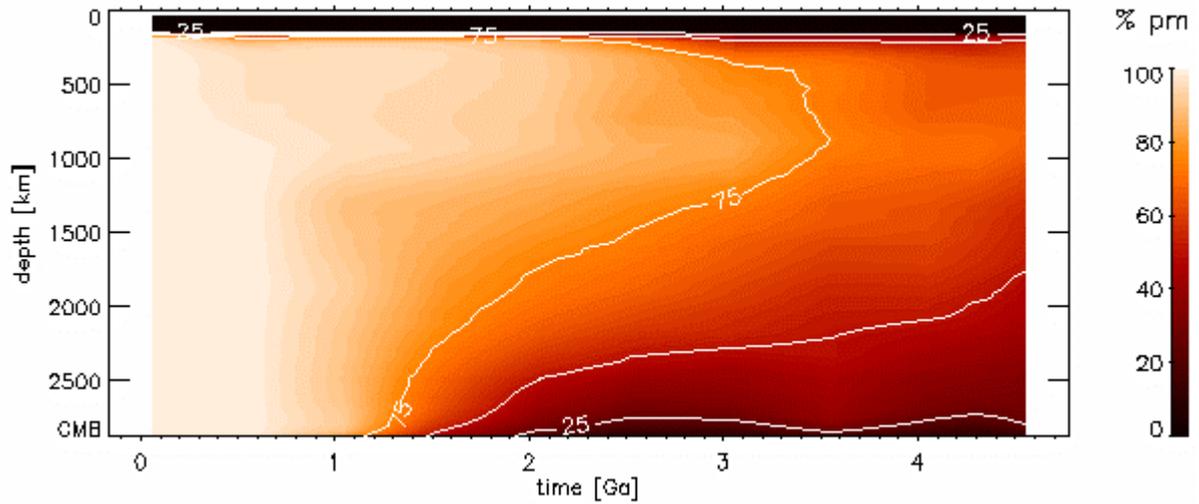
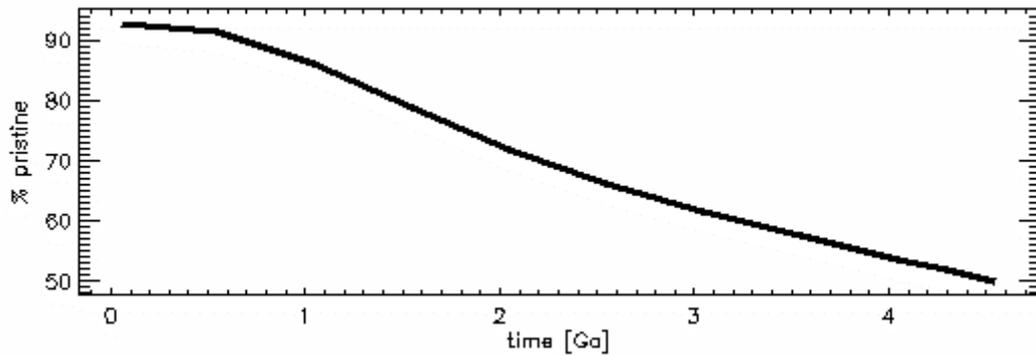


Abb. 5.15-22: Verteilung ursprünglichen Materials (pm) zu verschiedenen Zeiten

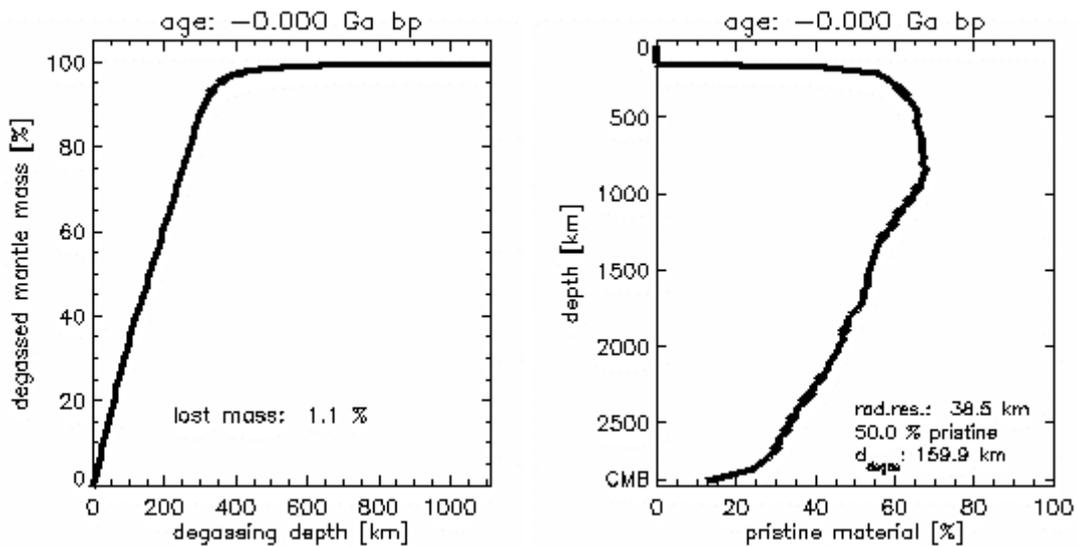
## 5.15. Modell 657



**Abb. 5.15-23:** Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung ursprünglichen Materials



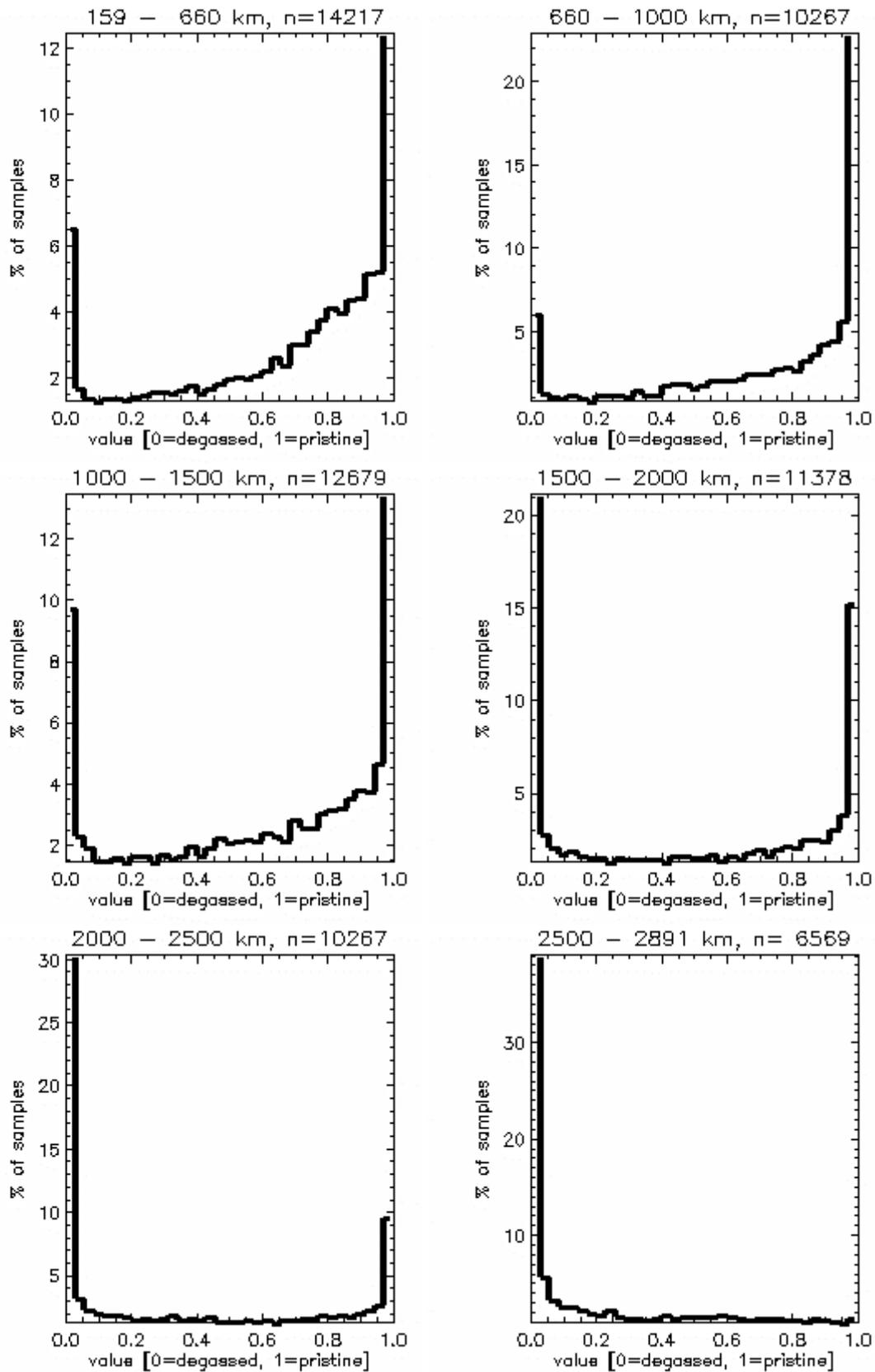
**Abb. 5.15-24:** Abnahme ursprünglichen Materials im Mantel



**Abb. 5.15-25:** Die Entgasungstiefe wird so festgelegt, dass am Ende der Rechnung 50 % des Mantels entgast sind

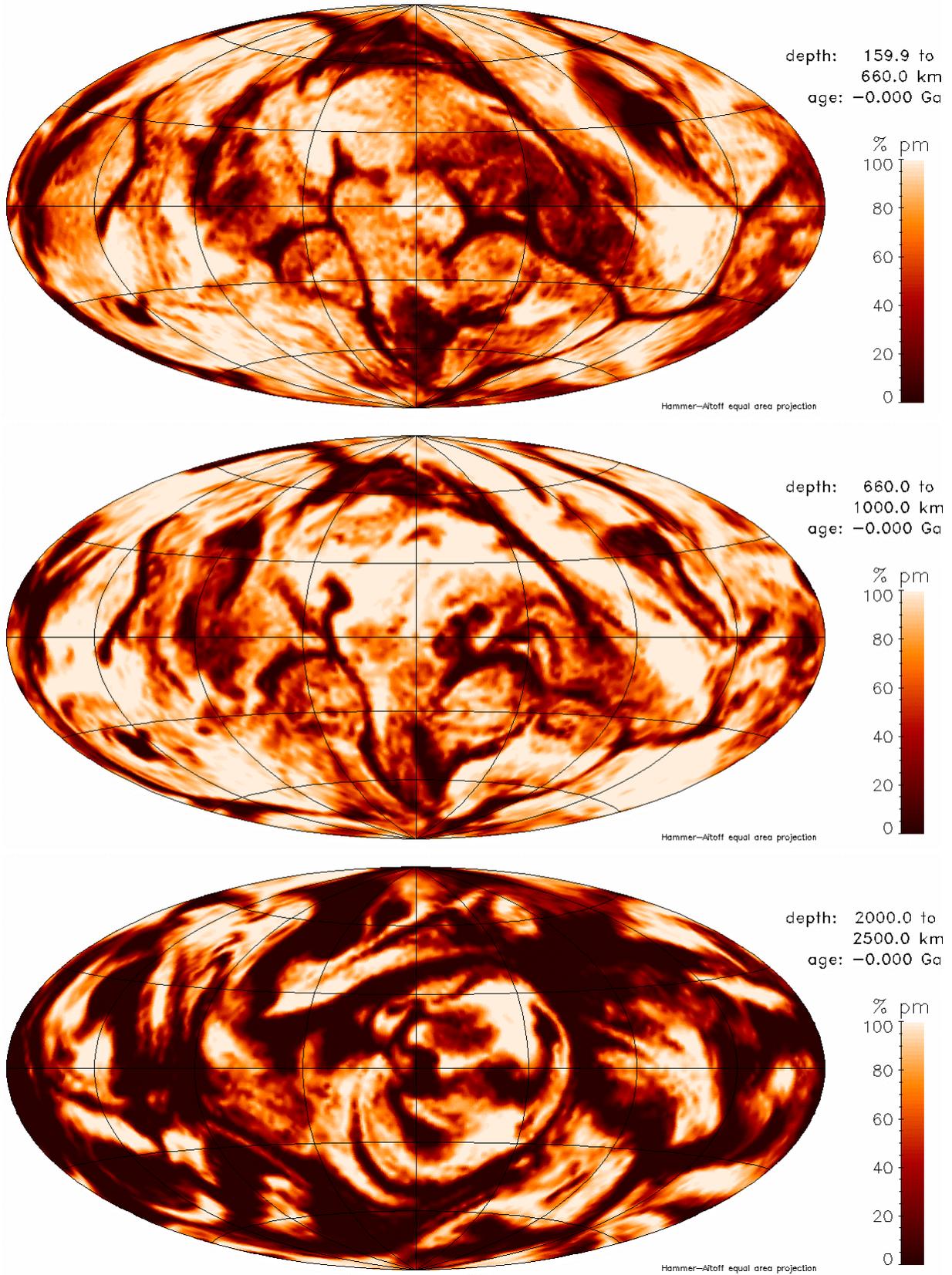
**Abb. 5.15-26:** Tiefenverteilung ursprünglichen Materials im heutigen Mantel

### 5.15. Modell 657



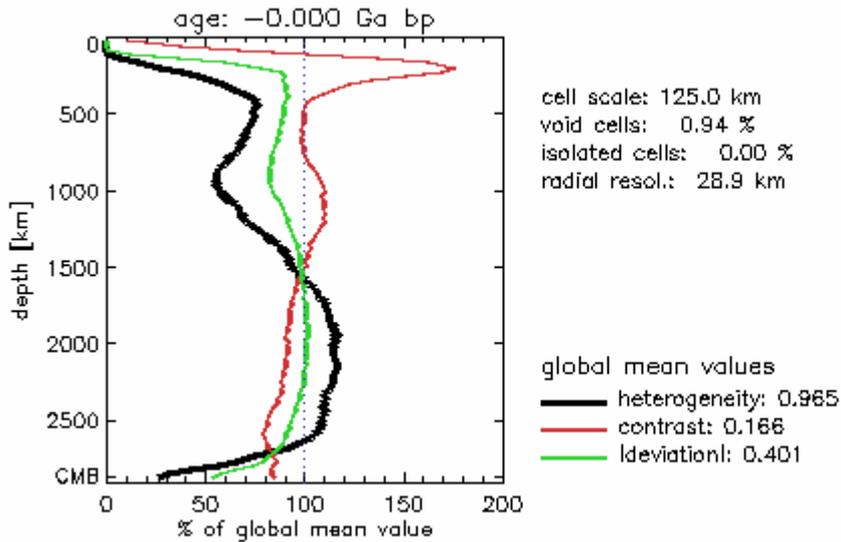
**Abb. 5.15-27:** Histogramme der Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Manteltiefen. Eine Probe repräsentiert den Mittelwert des gesamten radialen Intervalls. n ist die Anzahl der Unterteilungen der Kugelfläche in der jeweiligen Tiefe.

### 5.15. Modell 657

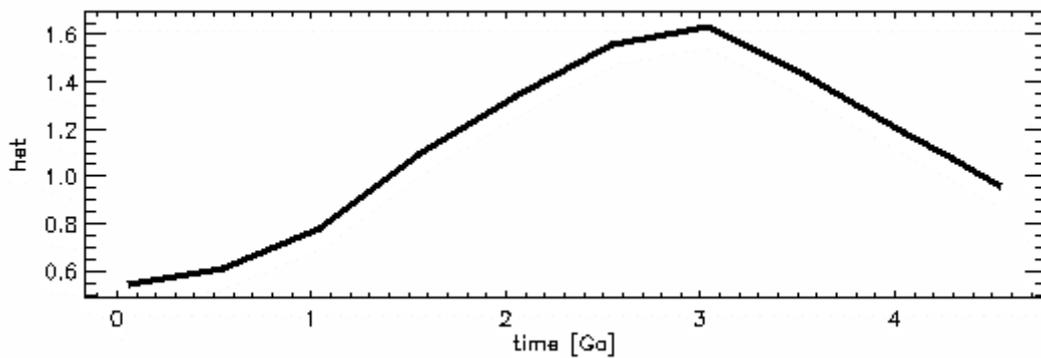


**Abb. 5.15-28:** Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Tiefenintervallen. Die laterale Auflösung entspricht der des jeweils passenden Histogramms in Abb. 5.15-27.

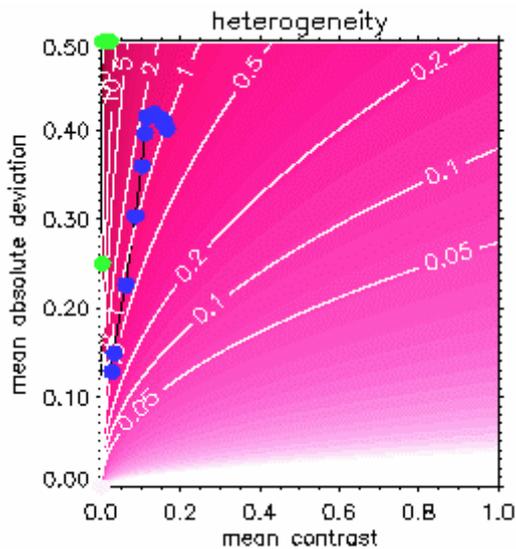
## 5.15. Modell 657



**Abb. 5.15-29:** Heutige Tiefenprofile der lateral gemittelten Werte von Heterogenität, Kontrast und mittlerer Absolutabweichung. Sie werden mit dem Mittelwert in der jeweiligen Kugelschale berechnet. Der globale Wert dient nur Skalierung der Abszisse.



**Abb. 5.15-30:** Zeitliche Entwicklung der Heterogenität



**Abb. 5.15-31:** Entwicklung der globalen Mittelwerte von Heterogenität, mittlerer Absolutabweichung und Kontrast.

Jeder blaue Punkt entspricht einem ausgewerteten Zeitschritt. Die schwarze Verbindungslinie folgt der zeitlichen Entwicklung. Der älteste Zeitschritt liegt näher am Koordinatenursprung als die jüngeren. Die grünen Punkte markieren die Lage der in Kapitel 4.2.3 vorgestellten Referenzmodelle. Die rötliche Farbkodierung mit Höhenlinien stellt den Wert der Heterogenität dar.

5.16. Modell 659

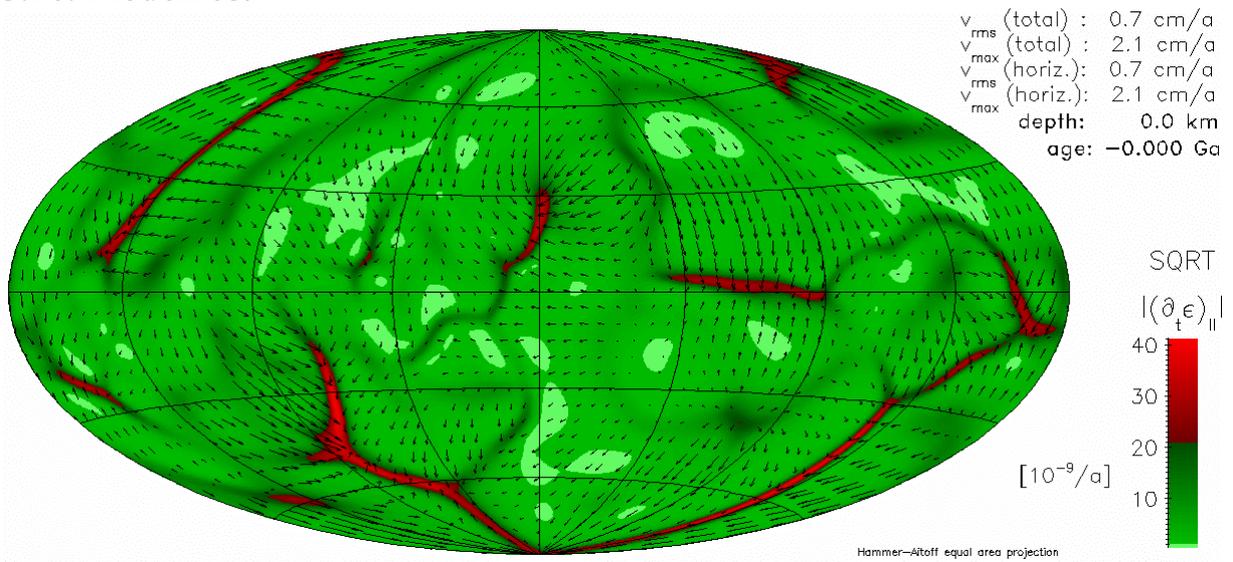


Abb. 5.16-57: Wurzel des Betrages der zweiten Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors

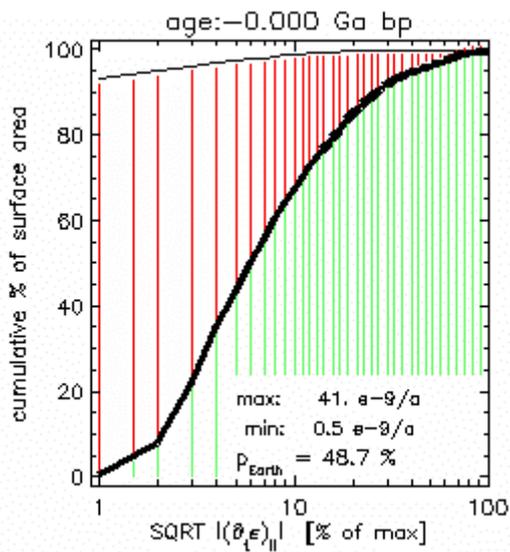


Abb. 5.16-58: Plattigkeit an der Oberfläche

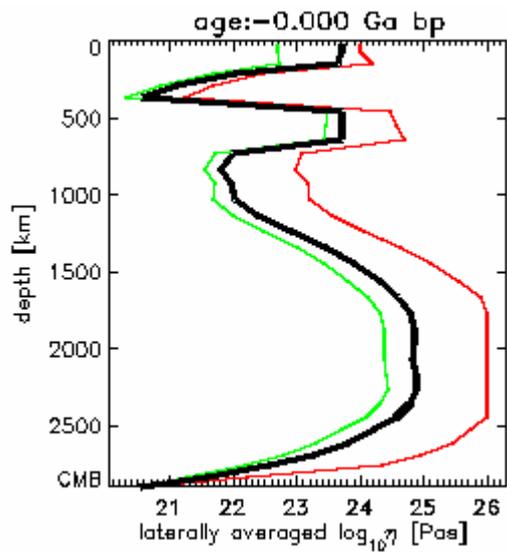


Abb. 5.16-59: Viskositätsprofil

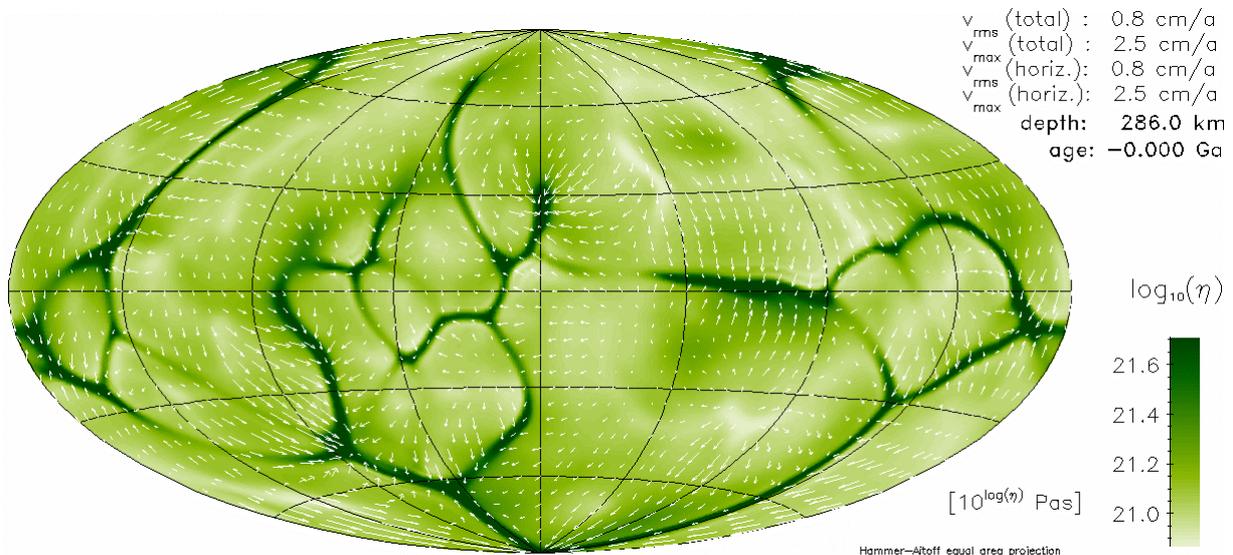
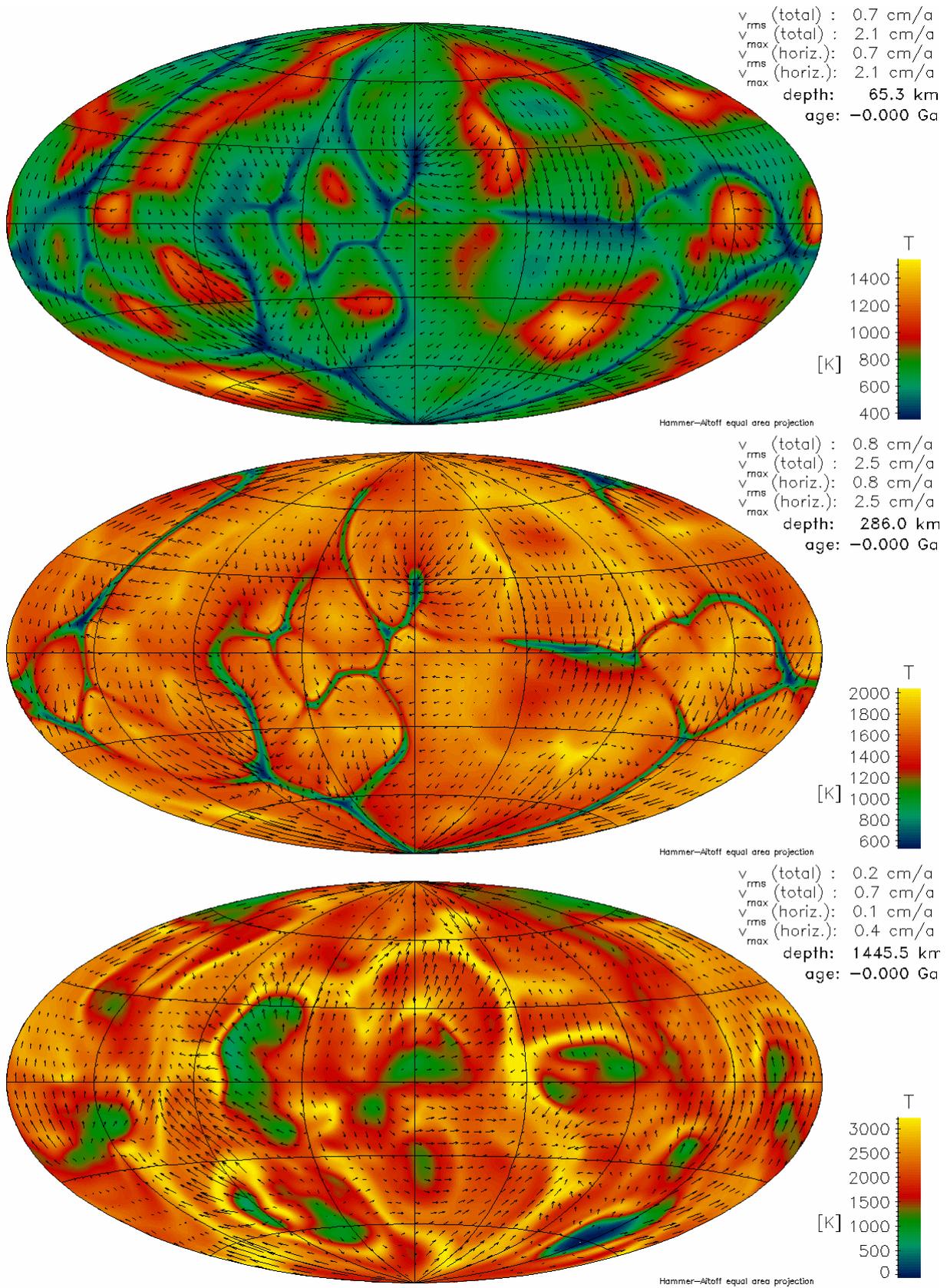


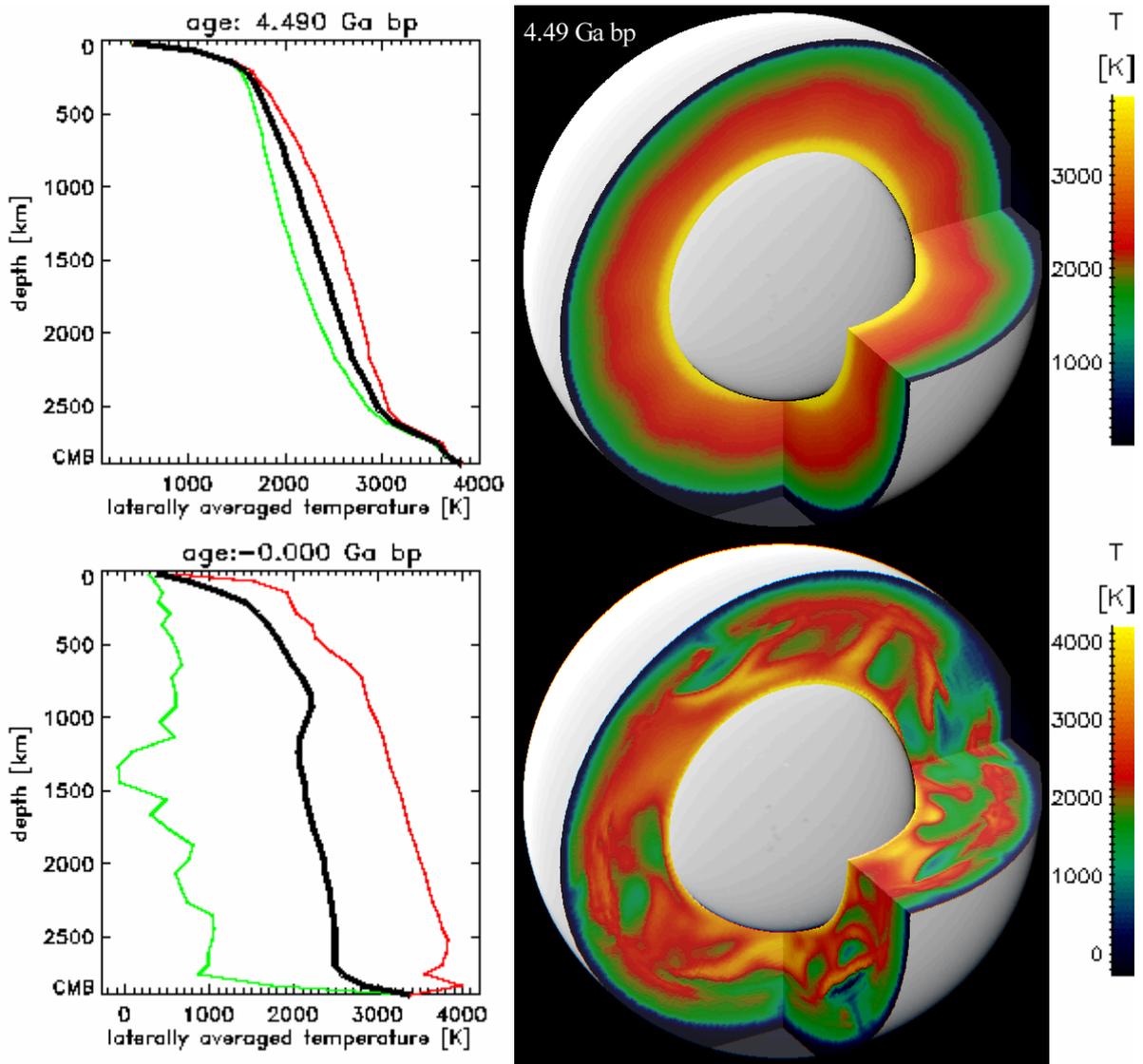
Abb. 5.16-60: Festere Abtauchzonen in der Asthenosphäre

## 5.16. Modell 659

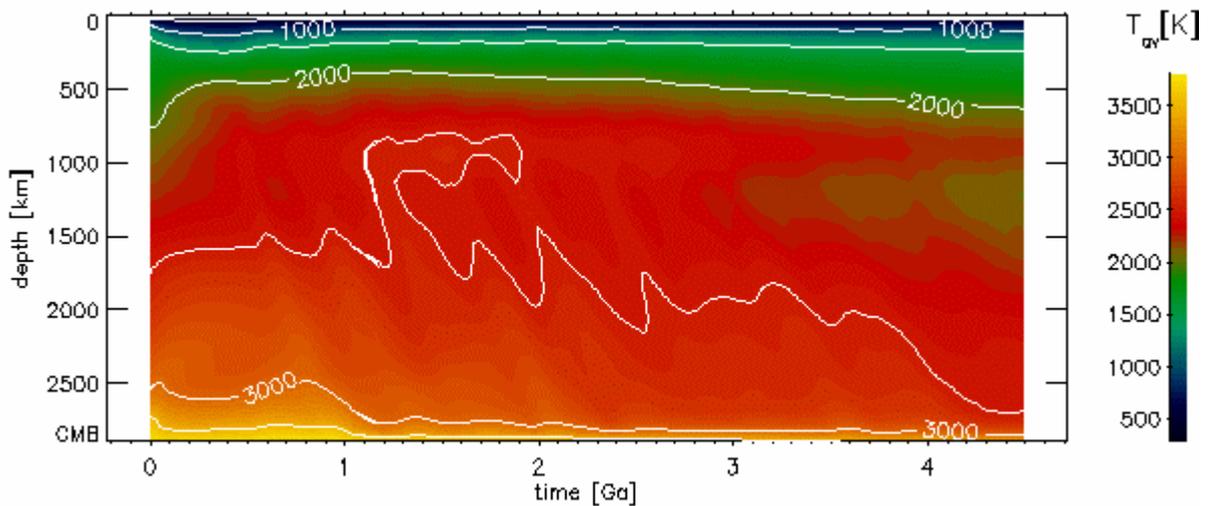


**Abb. 5.16-5:** Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten in verschiedenen Manteltiefen

## 5.16. Modell 659

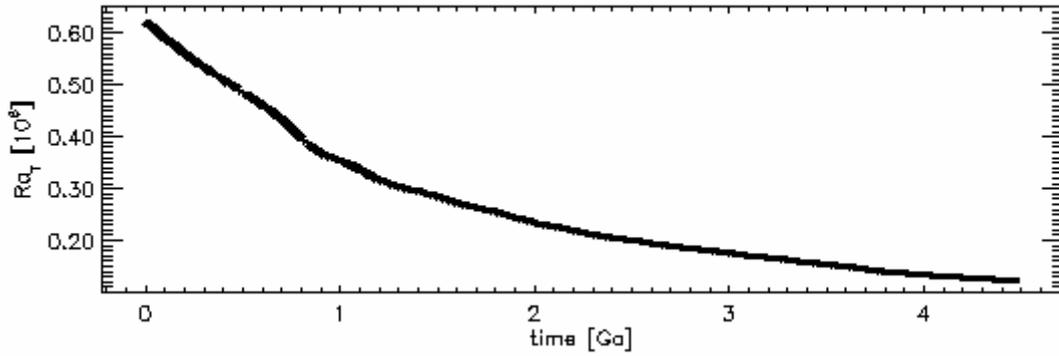


**Abb. 5.16-6:** Temperaturverteilung im Mantel am Anfang der Rechnung und heute

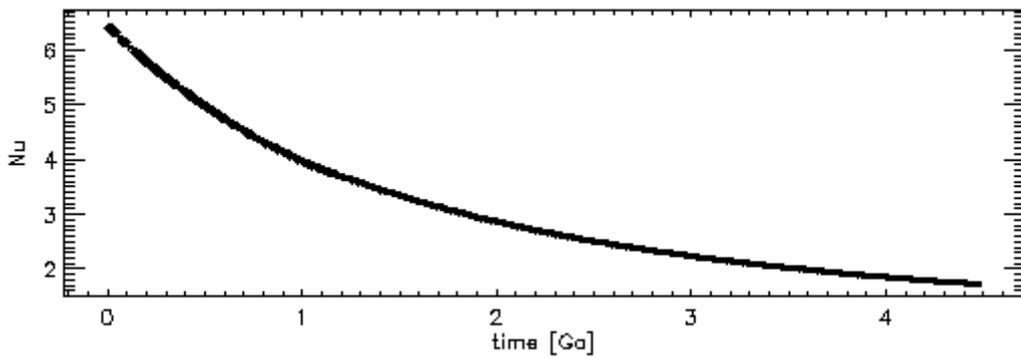


**Abb. 5.16-7:** Zeitliche Entwicklung des Temperaturprofils

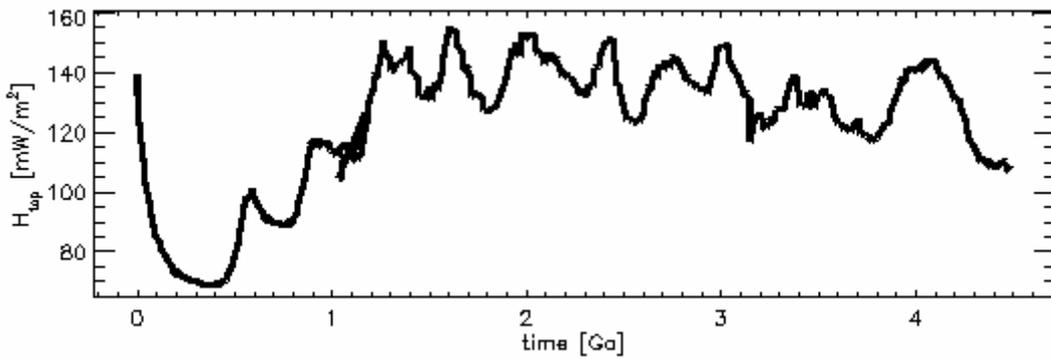
## 5.16. Modell 659



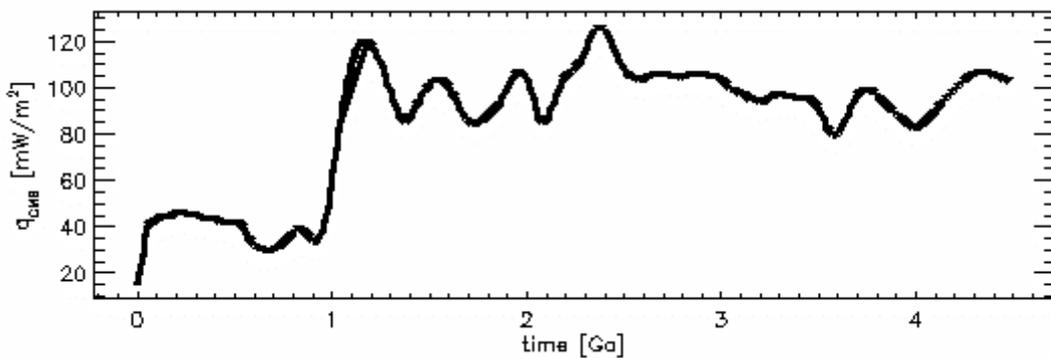
**Abb. 5.16-8:** Zeitliche Entwicklung der Rayleigh-Zahl



**Abb. 5.16-9:** Zeitliche Entwicklung der Nusselt-Zahl

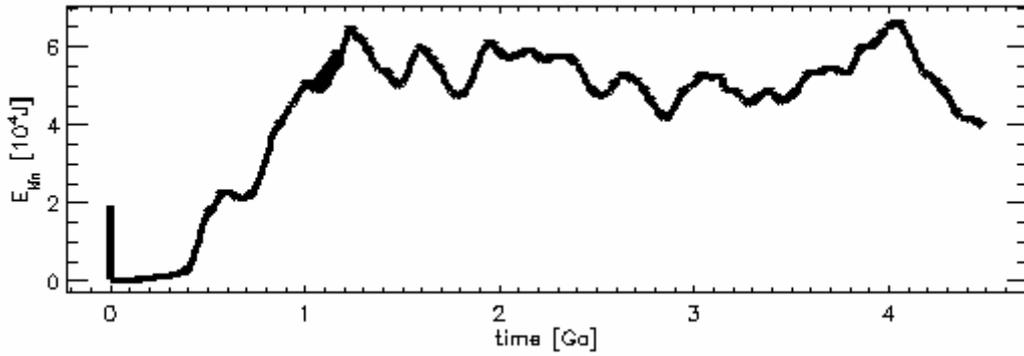


**Abb. 5.16-10:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Oberfläche

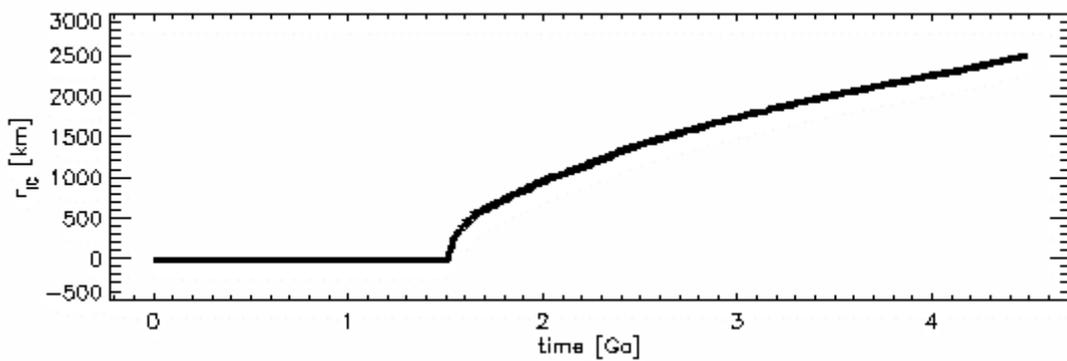


**Abb. 5.16-11:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Kern-Mantel-Grenze

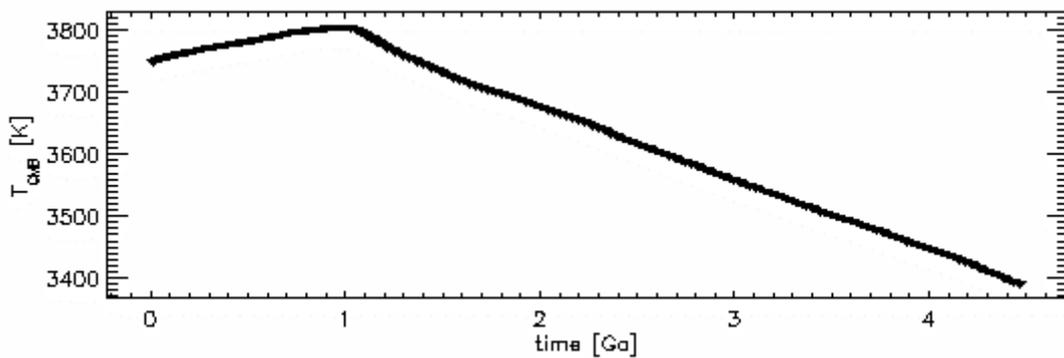
### 5.16. Modell 659



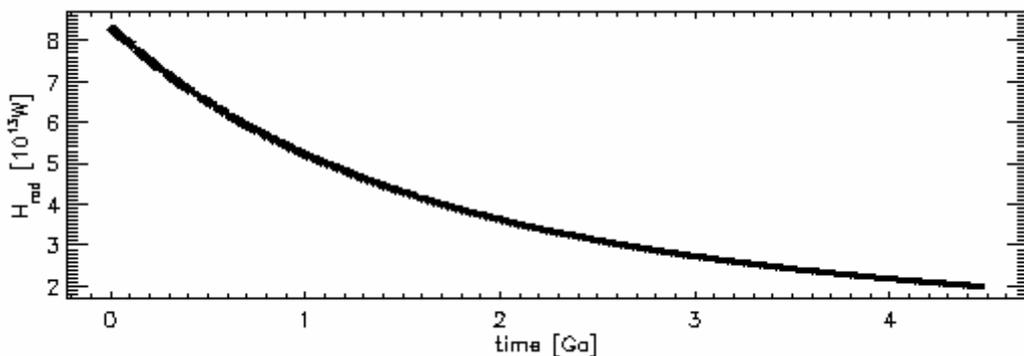
**Abb. 5.16-12:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des gesamten Mantels. Der hohe Wert am Anfang ist ein Artefakt.



**Abb. 5.16-13:** Zeitliche Entwicklung des Innenkernradius

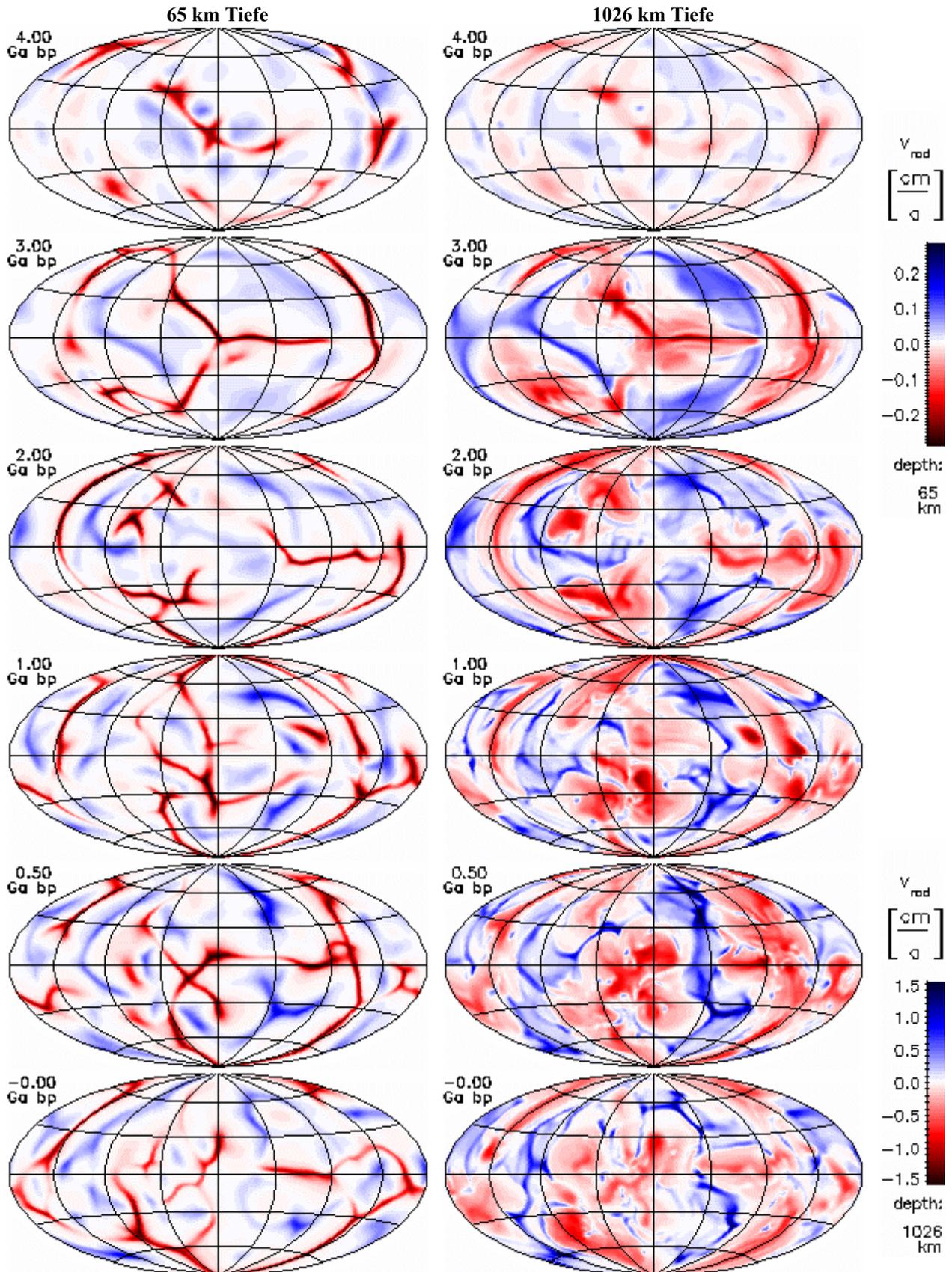


**Abb. 5.16-14:** Zeitliche Entwicklung der Temperatur an der CMB



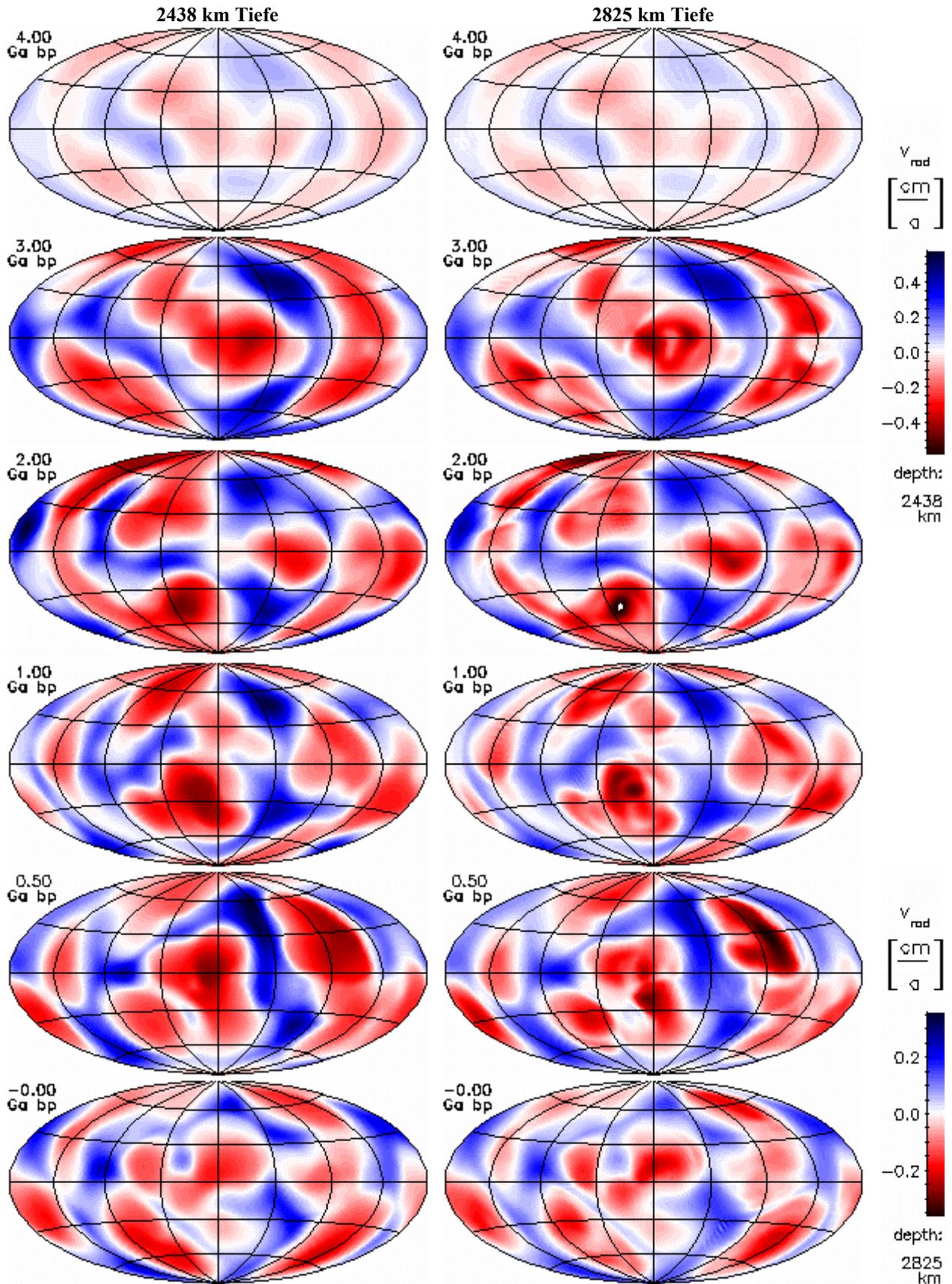
**Abb. 5.16-15:** Zeitliche Entwicklung der Heizleistung durch Zerfall von  $^{40}K$ ,  $^{42}Th$ ,  $^{235}U$  und  $^{238}U$  im Mantel

## 5.16. Modell 659



**Abb. 5.16-16:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente nahe der Oberfläche und im unteren Mantel. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind eventuell abgeschnitten.

## 5.16. Modell 659



**Abb. 5.16-17:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente im hochviskosen Teil des unteren Mantels und nahe der CMB. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind evtl. abgeschnitten.

## 5.16. Modell 659

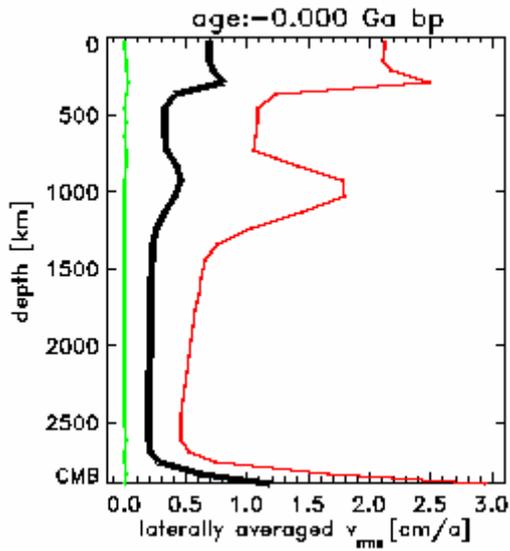


Abb. 5.16-18: Heutiges Geschwindigkeitsprofil

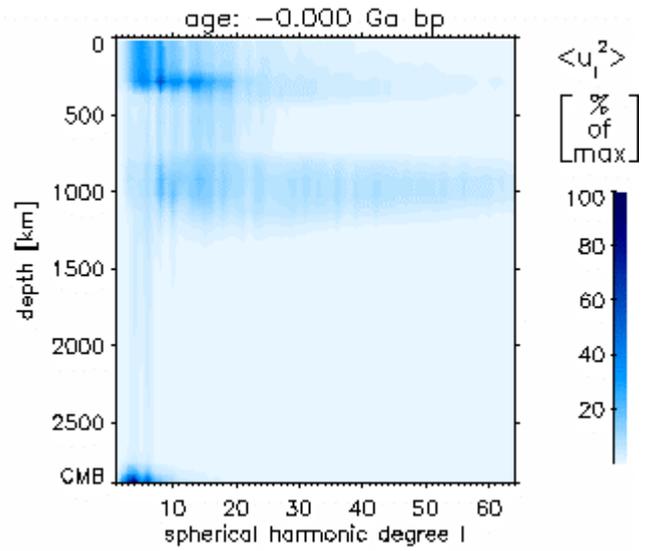


Abb. 5.16-19: Spektrum von toroidaler plus poloidaler kinetischer Energie

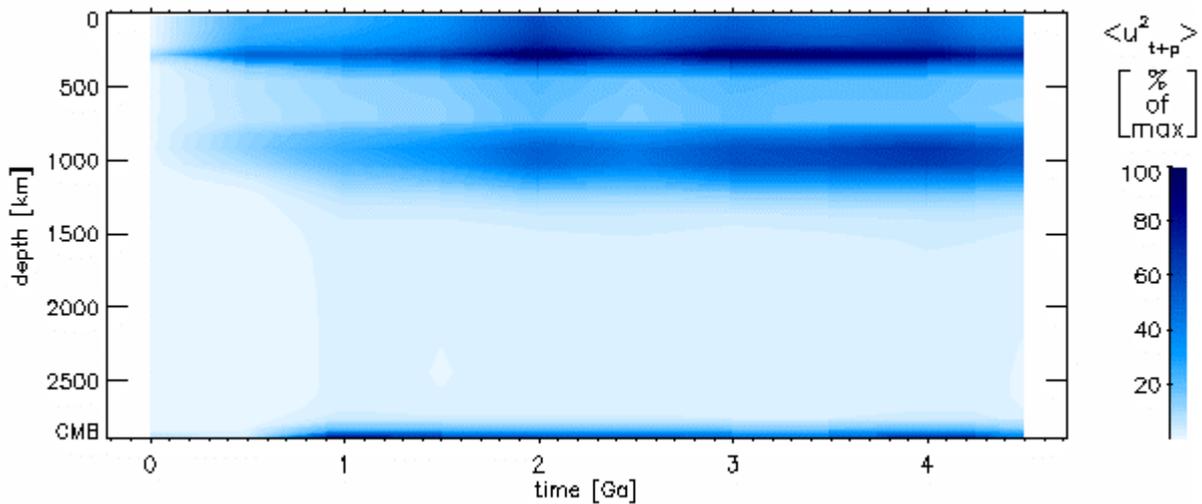


Abb. 5.16-20: Entwicklung der Tiefenverteilung der Summe von poloidaler und toroidaler Energie

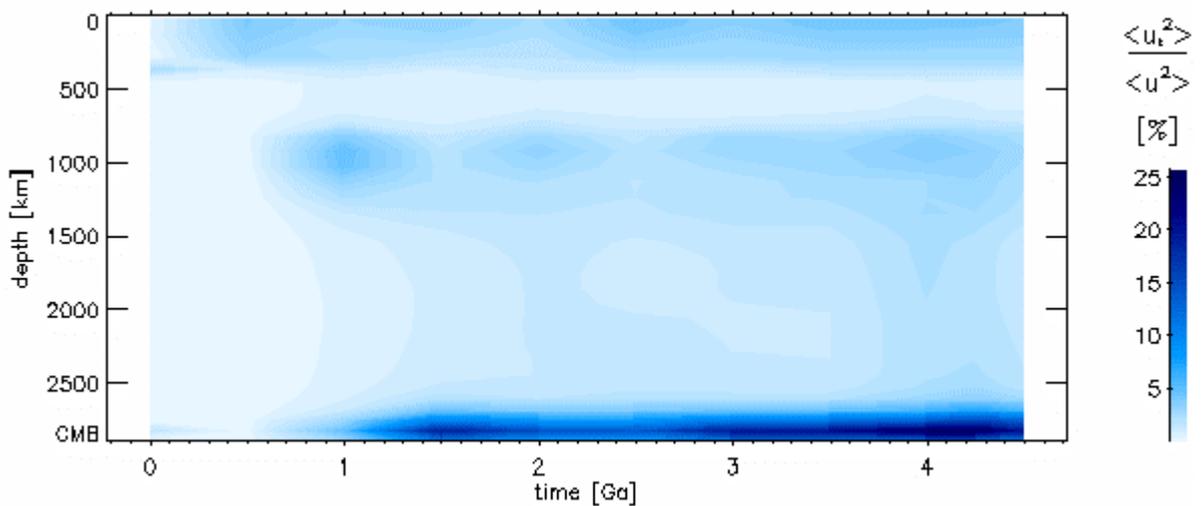
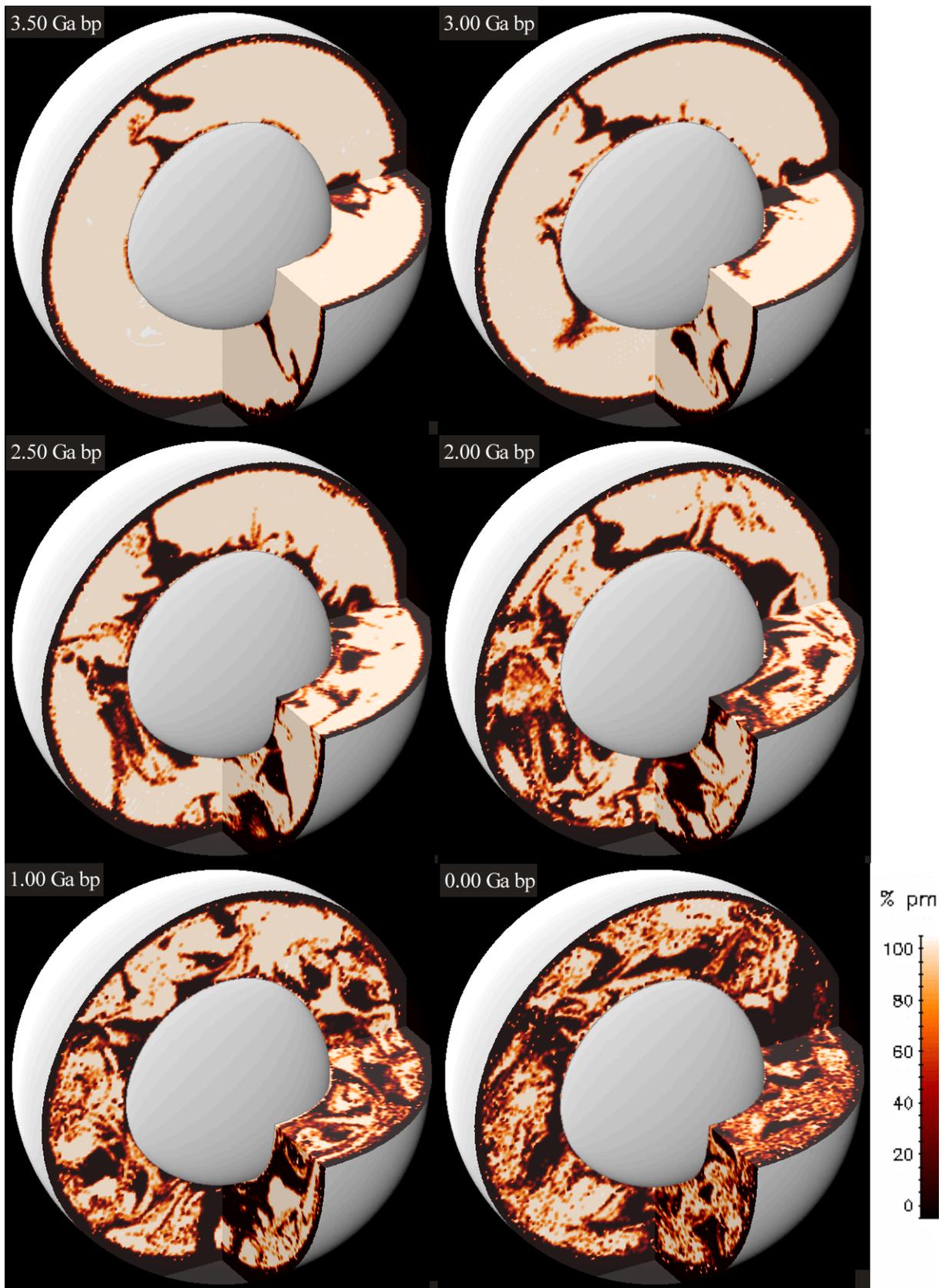


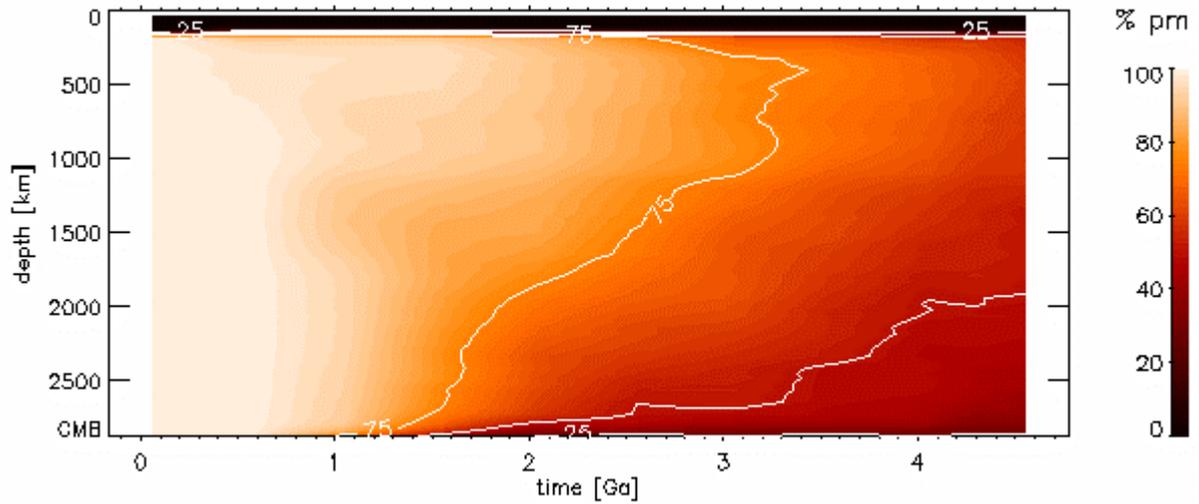
Abb. 5.16-21: Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung des toroidalen Anteils

### 5.16. Modell 659

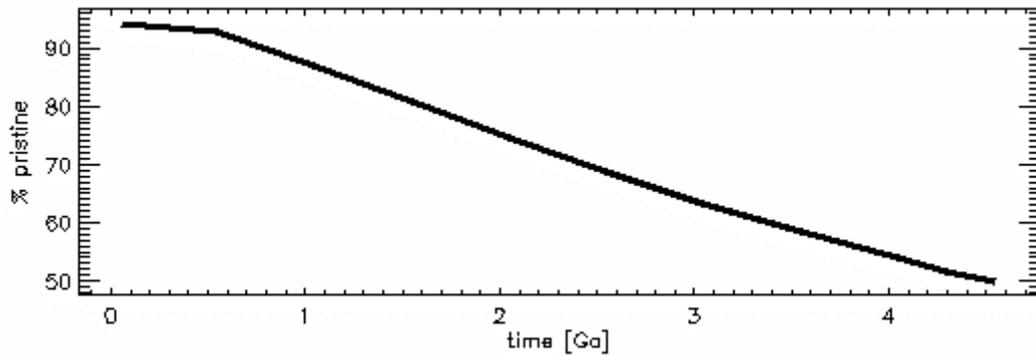


**Abb. 5.16-22:** Verteilung ursprünglichen Materials (pm) zu verschiedenen Zeiten

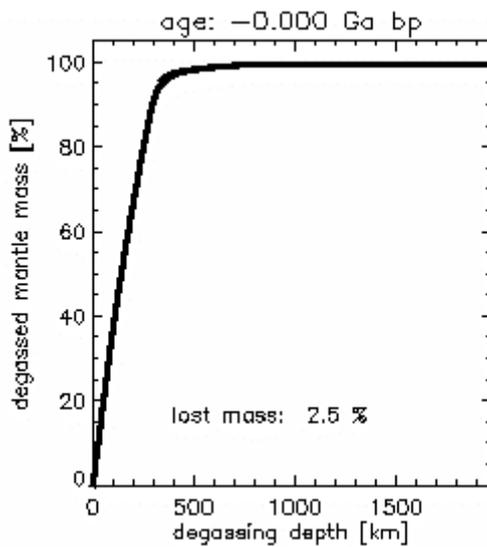
## 5.16. Modell 659



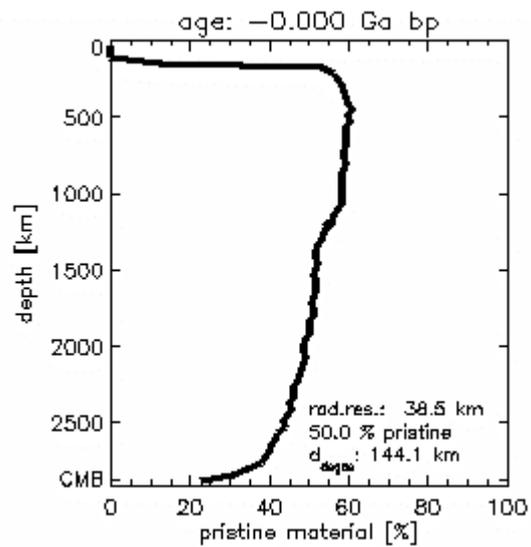
**Abb. 5.16-23:** Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung ursprünglichen Materials



**Abb. 5.16-24:** Abnahme ursprünglichen Materials im Mantel

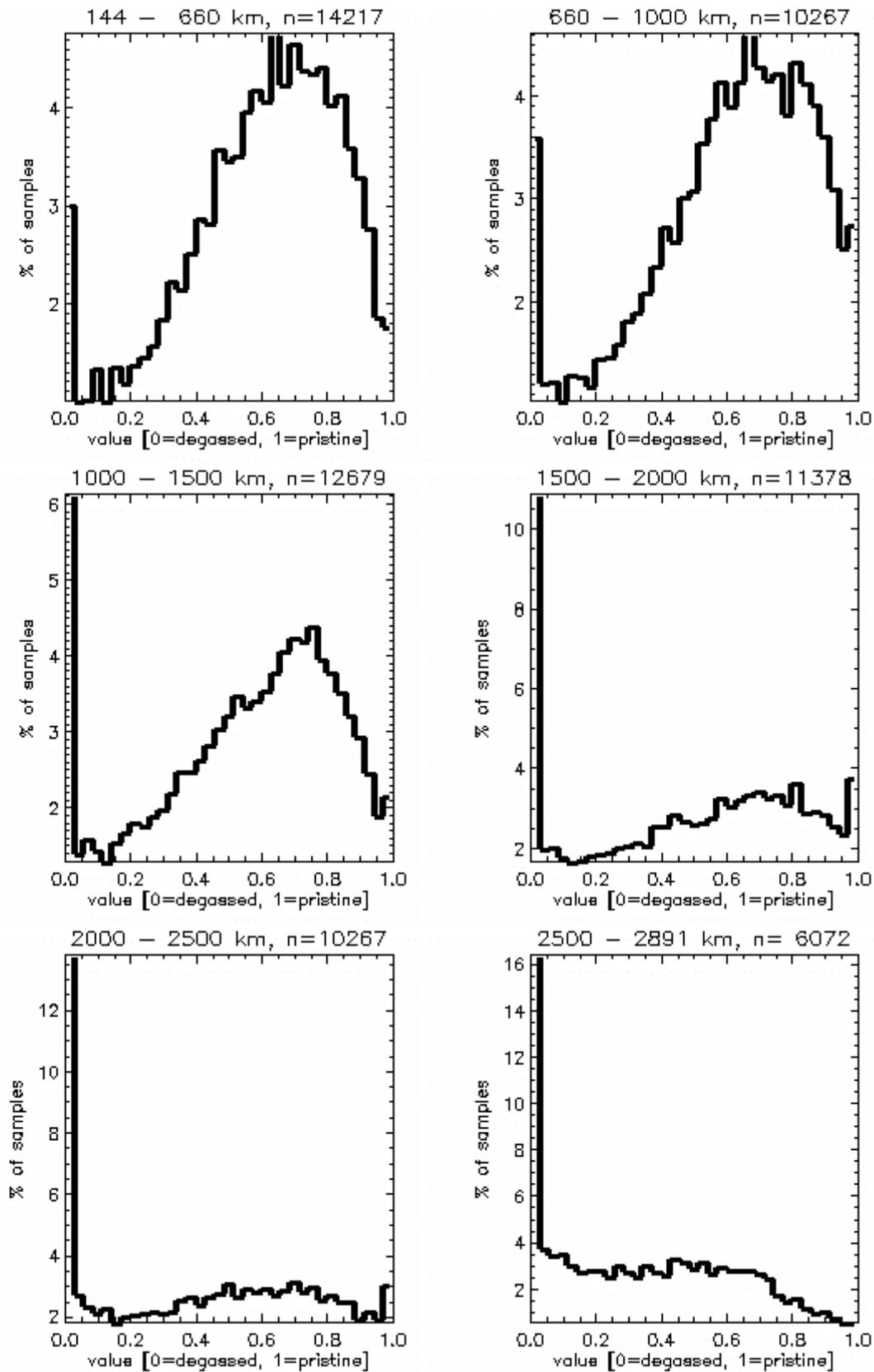


**Abb. 5.16-25:** Die Entgasungstiefe wird so festgelegt, dass am Ende der Rechnung 50 % des Mantels entgast sind



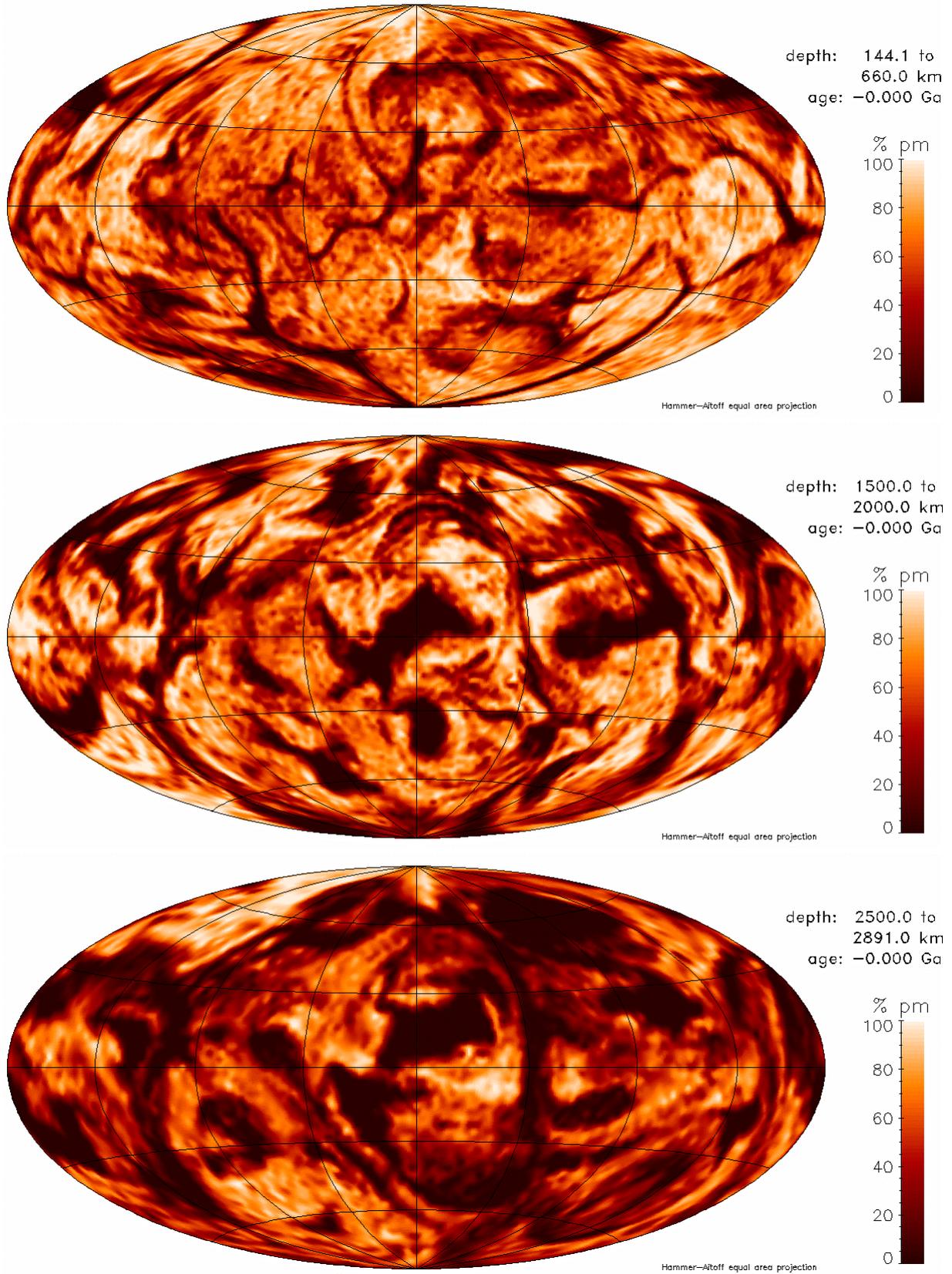
**Abb. 5.16-26:** Tiefenverteilung ursprünglichen Materials im heutigen Mantel

## 5.16. Modell 659



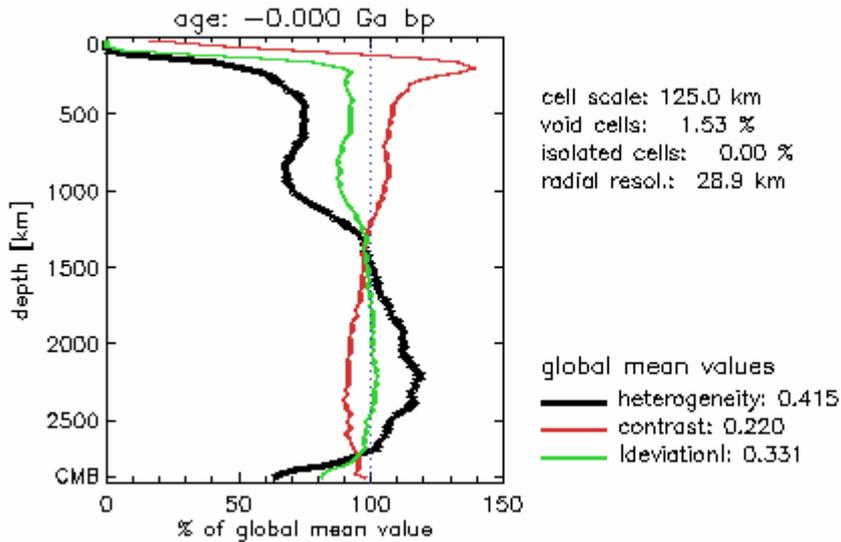
**Abb. 5.16-27:** Histogramme der Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Manteltiefen. Eine Probe repräsentiert den Mittelwert des gesamten radialen Intervalls. n ist die Anzahl der Unterteilungen der Kugelfläche in der jeweiligen Tiefe.

### 5.16. Modell 659

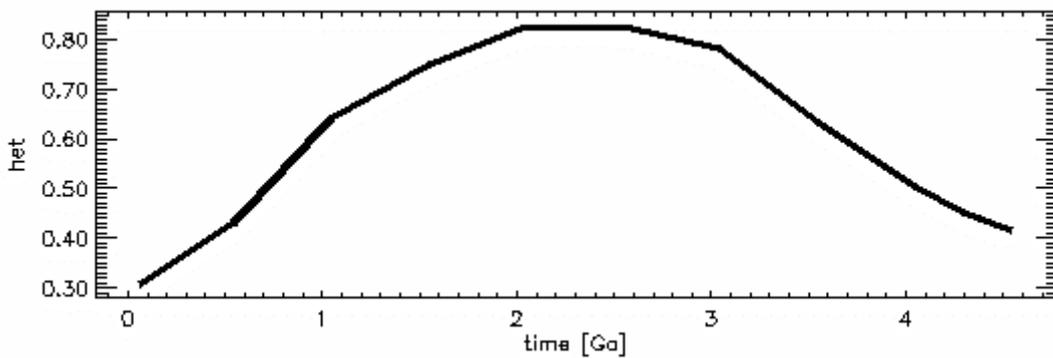


**Abb. 5.16-28:** Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Tiefenintervallen. Die laterale Auflösung entspricht der des jeweils passenden Histogramms in Abb. 5.16-27.

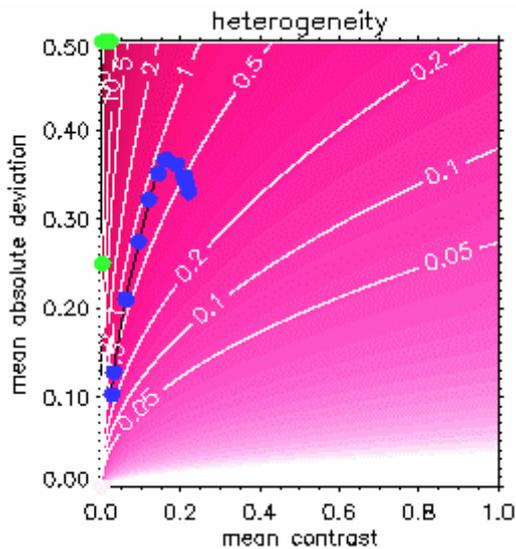
## 5.16. Modell 659



**Abb. 5.16-29:** Heutige Tiefenprofile der lateral gemittelten Werte von Heterogenität, Kontrast und mittlerer Absolutabweichung. Sie werden mit dem Mittelwert in der jeweiligen Kugelschale berechnet. Der globale Wert dient nur Skalierung der Abszisse.



**Abb. 5.16-30:** Zeitliche Entwicklung der Heterogenität



**Abb. 5.16-31:** Entwicklung der globalen Mittelwerte von Heterogenität, mittlerer Absolutabweichung und Kontrast.

Jeder blaue Punkt entspricht einem ausgewerteten Zeitschritt. Die schwarze Verbindungslinie folgt der zeitlichen Entwicklung. Der älteste Zeitschritt liegt näher am Koordinatenursprung als die jüngeren. Die grünen Punkte markieren die Lage der in Kapitel 4.2.3 vorgestellten Referenzmodelle. Die rötliche Farbkodierung mit Höhenlinien stellt den Wert der Heterogenität dar.

5.17. Modell 660

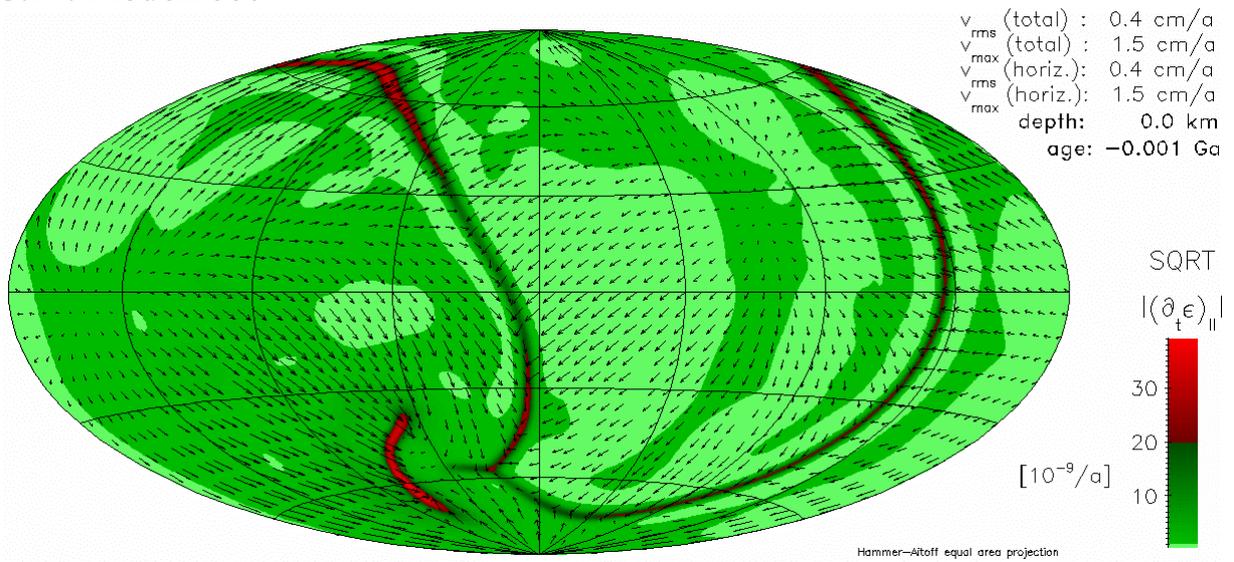


Abb. 5.17-61: Wurzel des Betrages der zweiten Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors

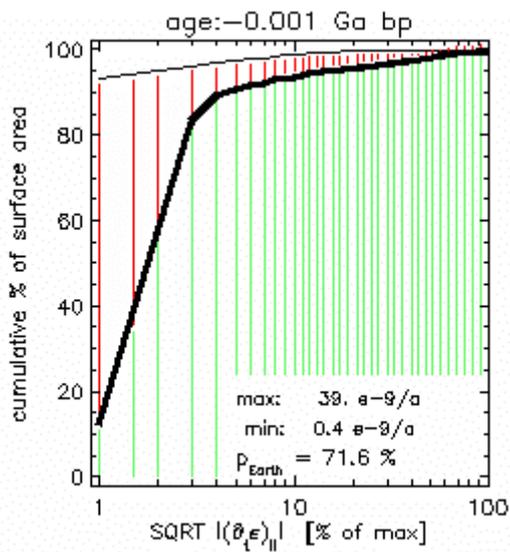


Abb. 5.17-62: Plattigkeit an der Oberfläche

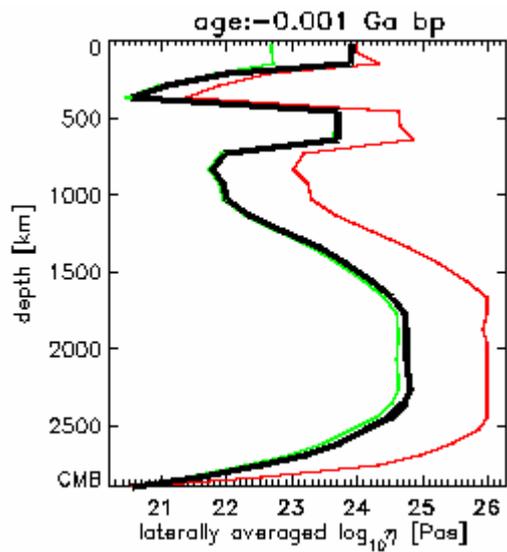


Abb. 5.17-63: Viskositätsprofil

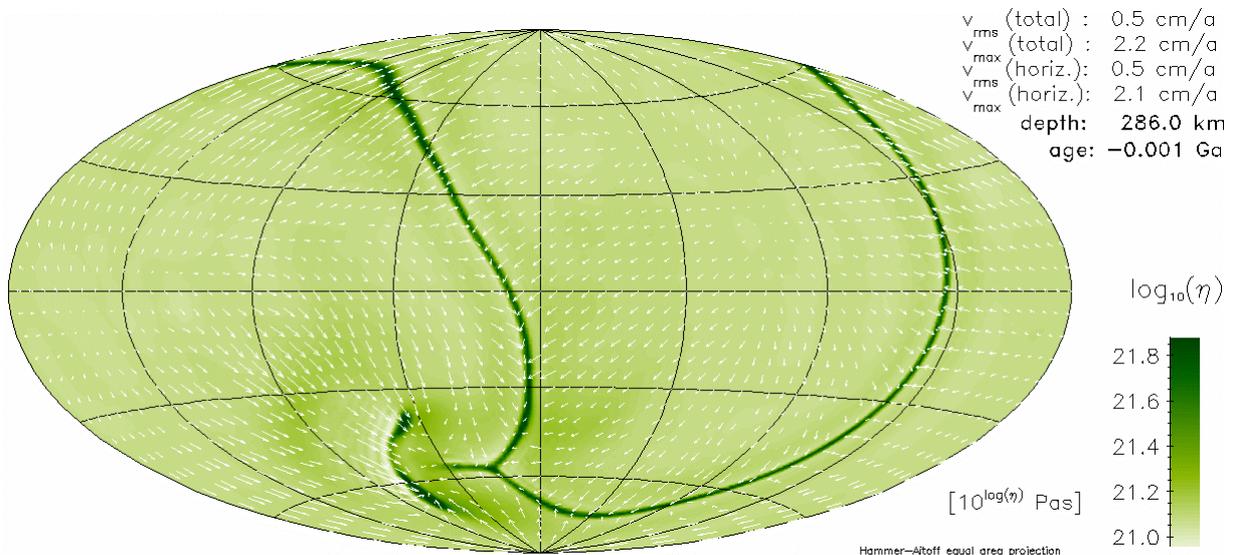
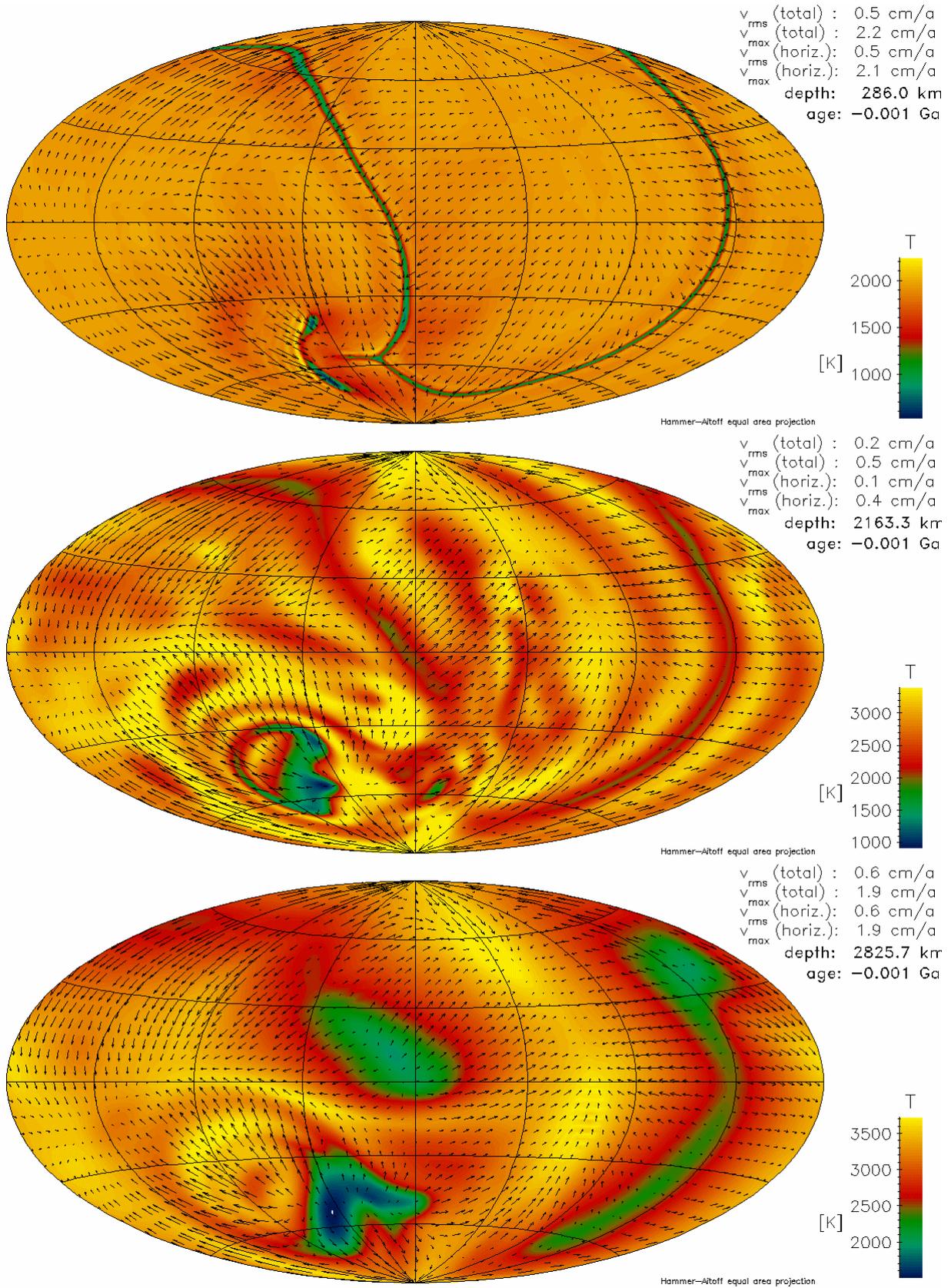


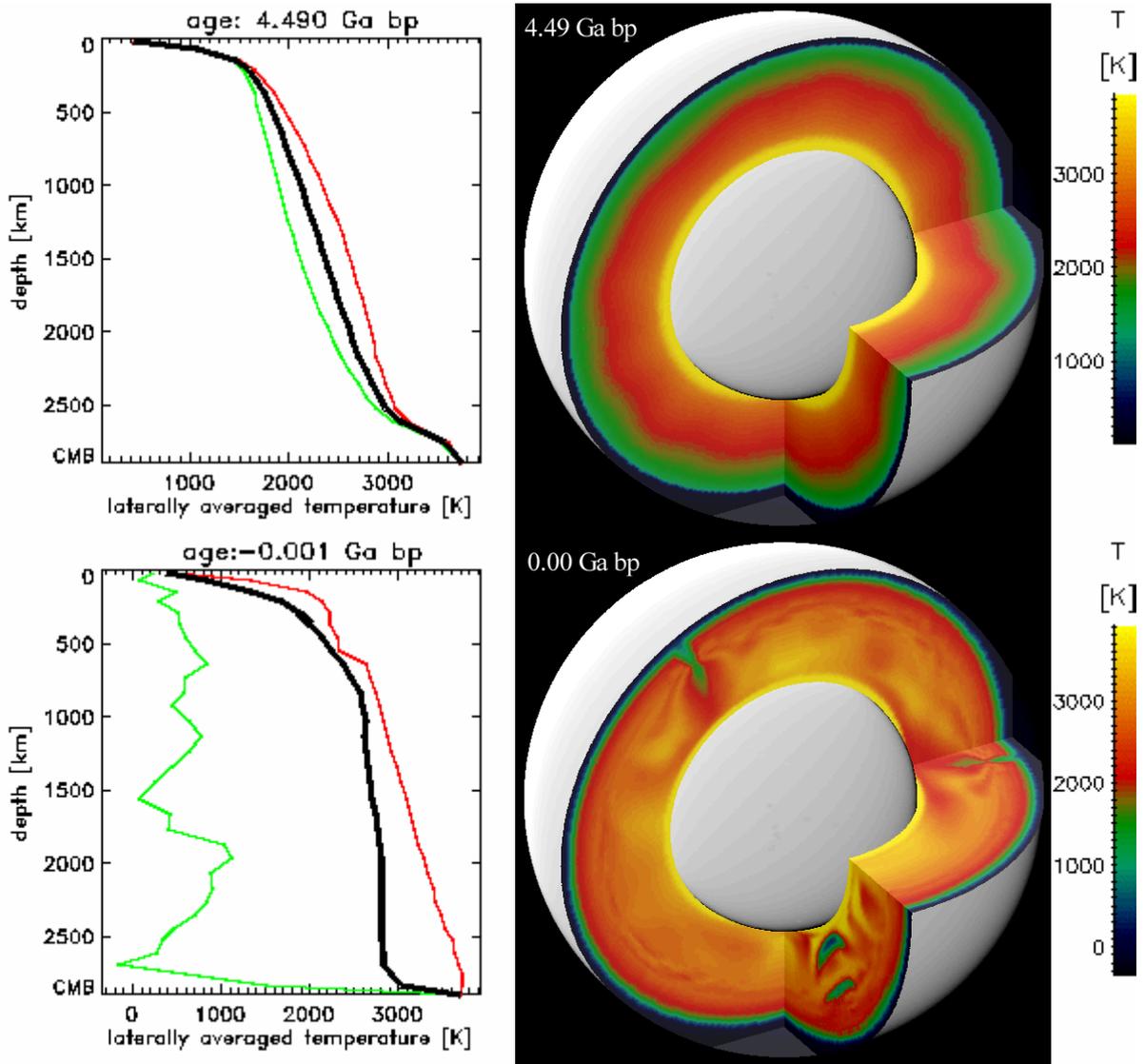
Abb. 5.17-64: Festere Abtauchzonen in der Asthenosphäre

### 5.17. Modell 660

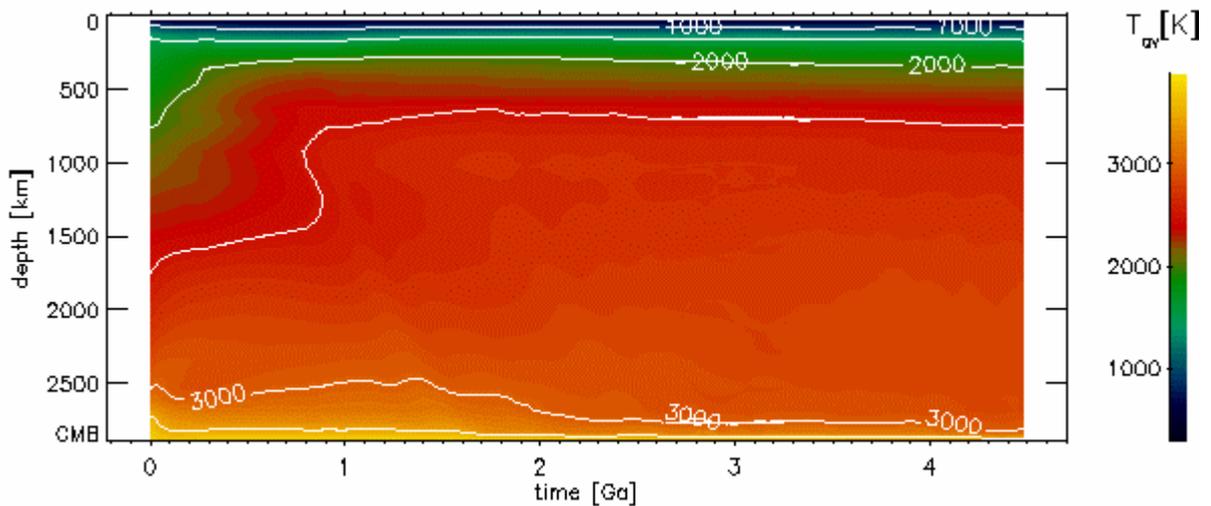


**Abb. 5.17-5: Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten in verschiedenen Manteltiefen**

### 5.17. Modell 660

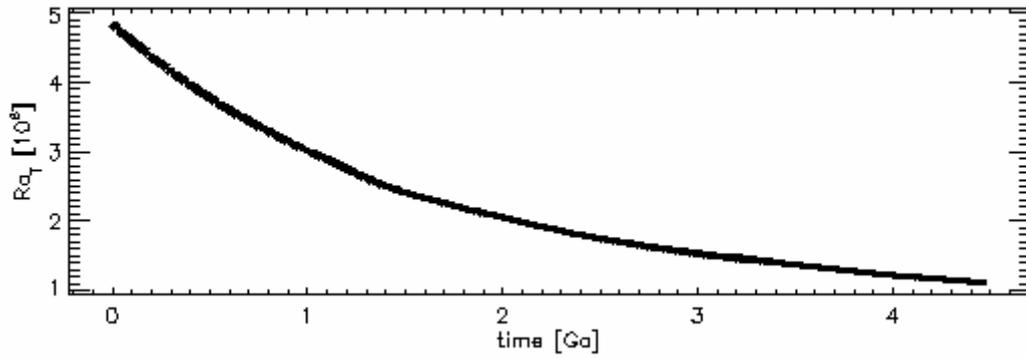


**Abb. 5.17-6:** Temperaturverteilung im Mantel am Anfang der Rechnung und heute

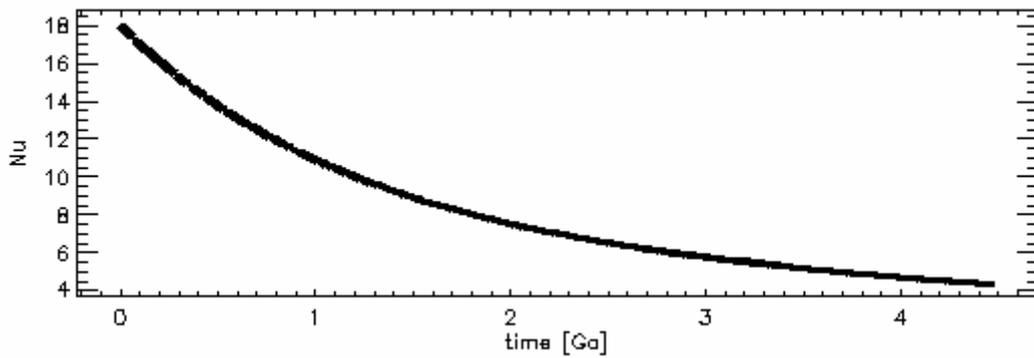


**Abb. 5.17-7:** Zeitliche Entwicklung des Temperaturprofils

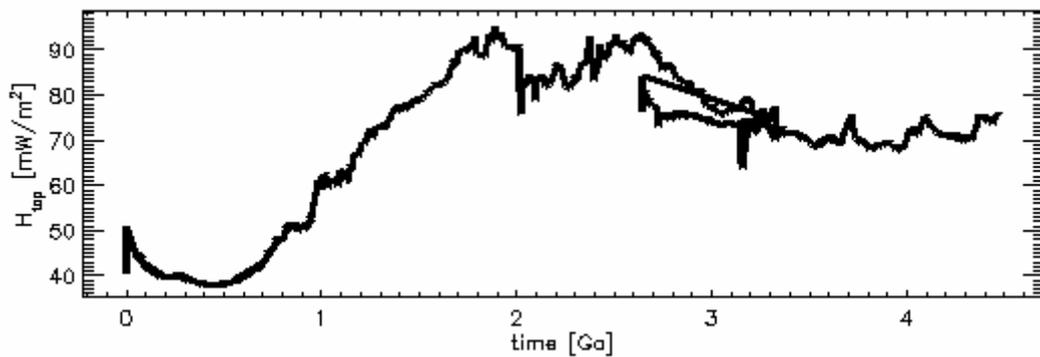
### 5.17. Modell 660



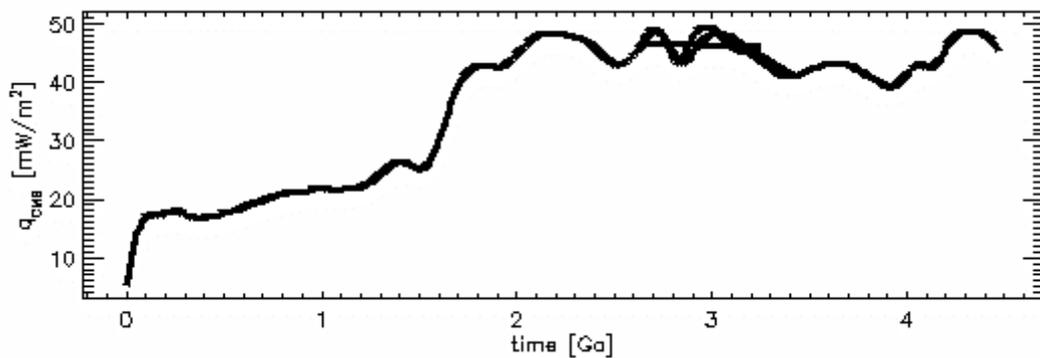
**Abb. 5.17-8:** Zeitliche Entwicklung der Rayleigh-Zahl



**Abb. 5.17-9:** Zeitliche Entwicklung der Nusselt-Zahl

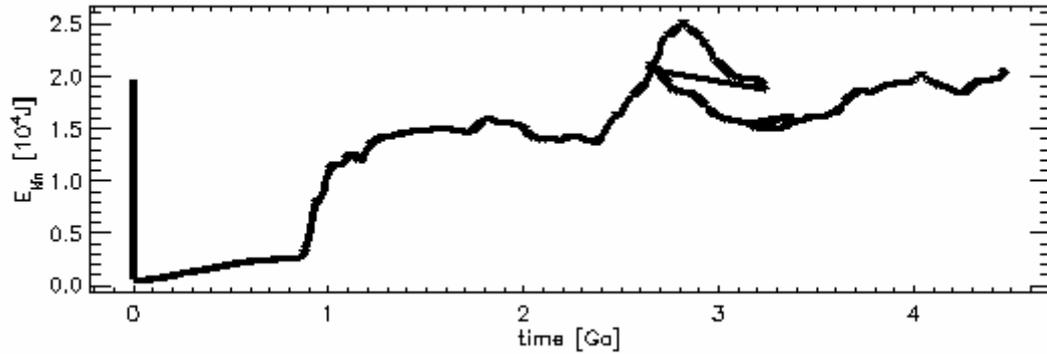


**Abb. 5.17-10:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Oberfläche

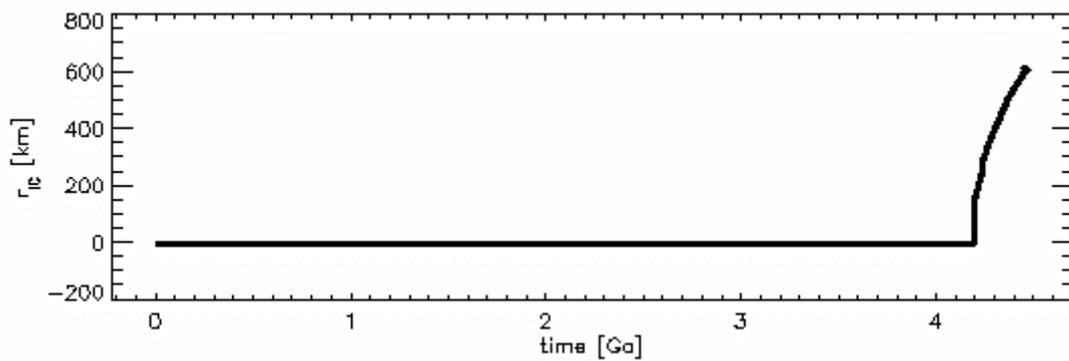


**Abb. 5.17-11:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Kern-Mantel-Grenze

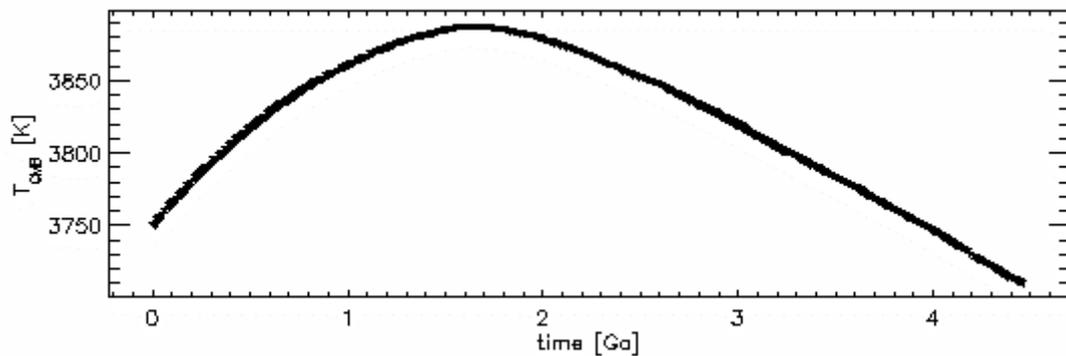
### 5.17. Modell 660



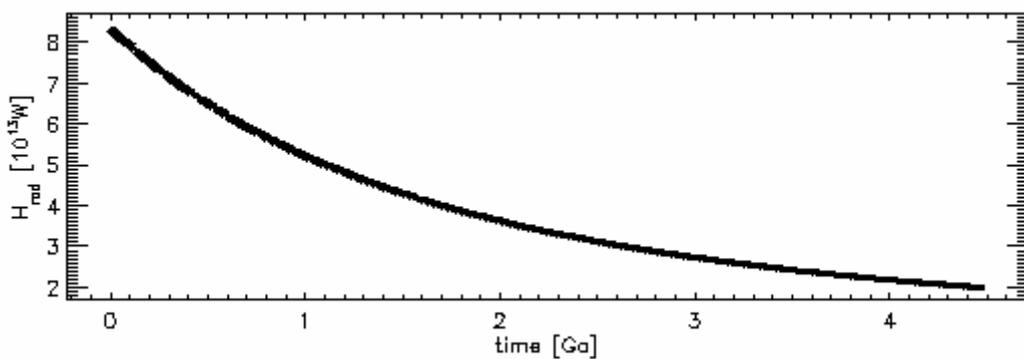
**Abb. 5.17-12:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des gesamten Mantels. Der hohe Wert am Anfang ist ein Artefakt., die Diskontinuität bei 3 Ga zeigt numerische Instabilitäten nach dem Neustart des abgestürzten Laufes.



**Abb. 5.17-13:** Zeitliche Entwicklung des Innenkernradius

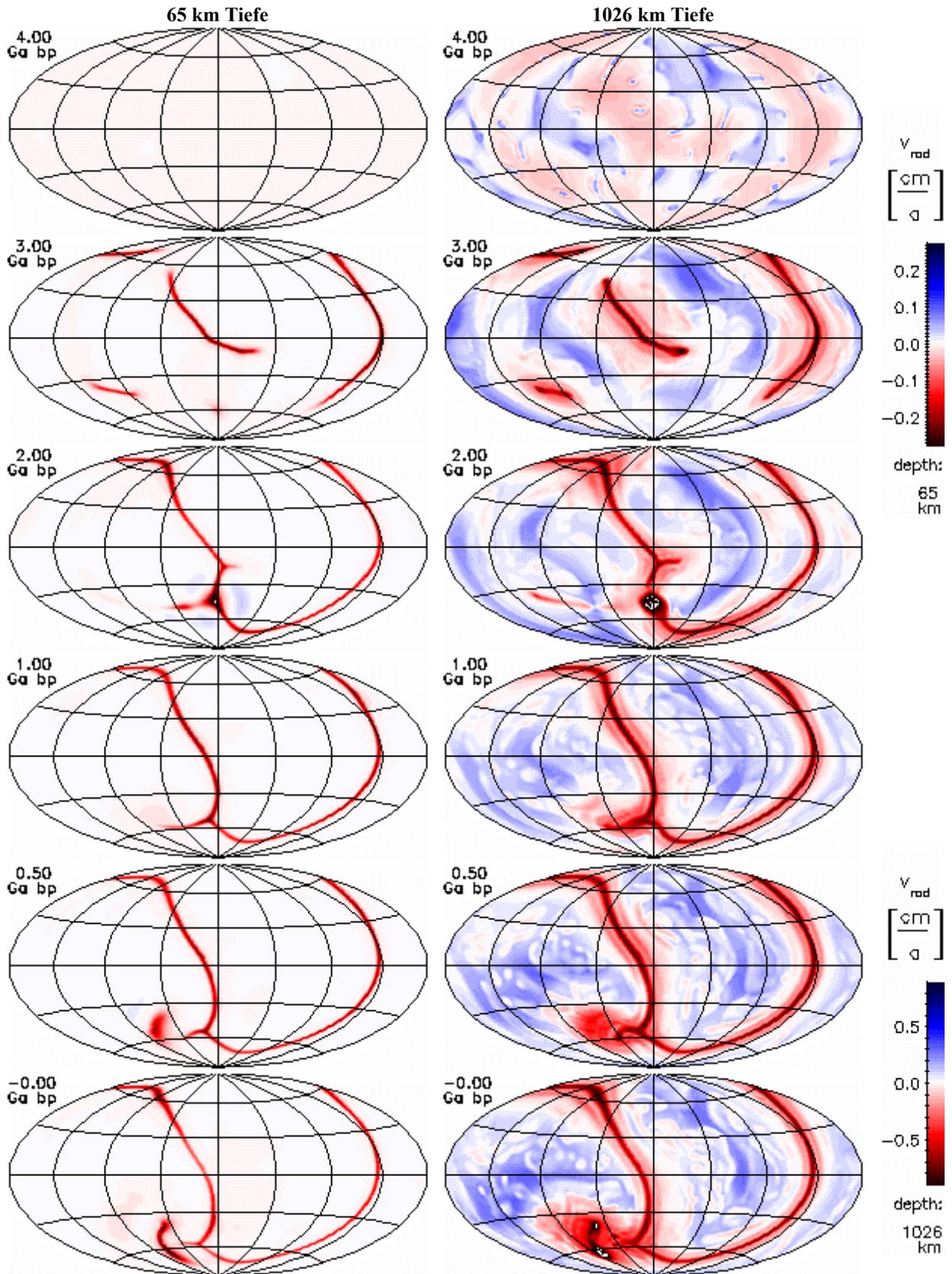


**Abb. 5.17-14:** Zeitliche Entwicklung der Temperatur an der CMB



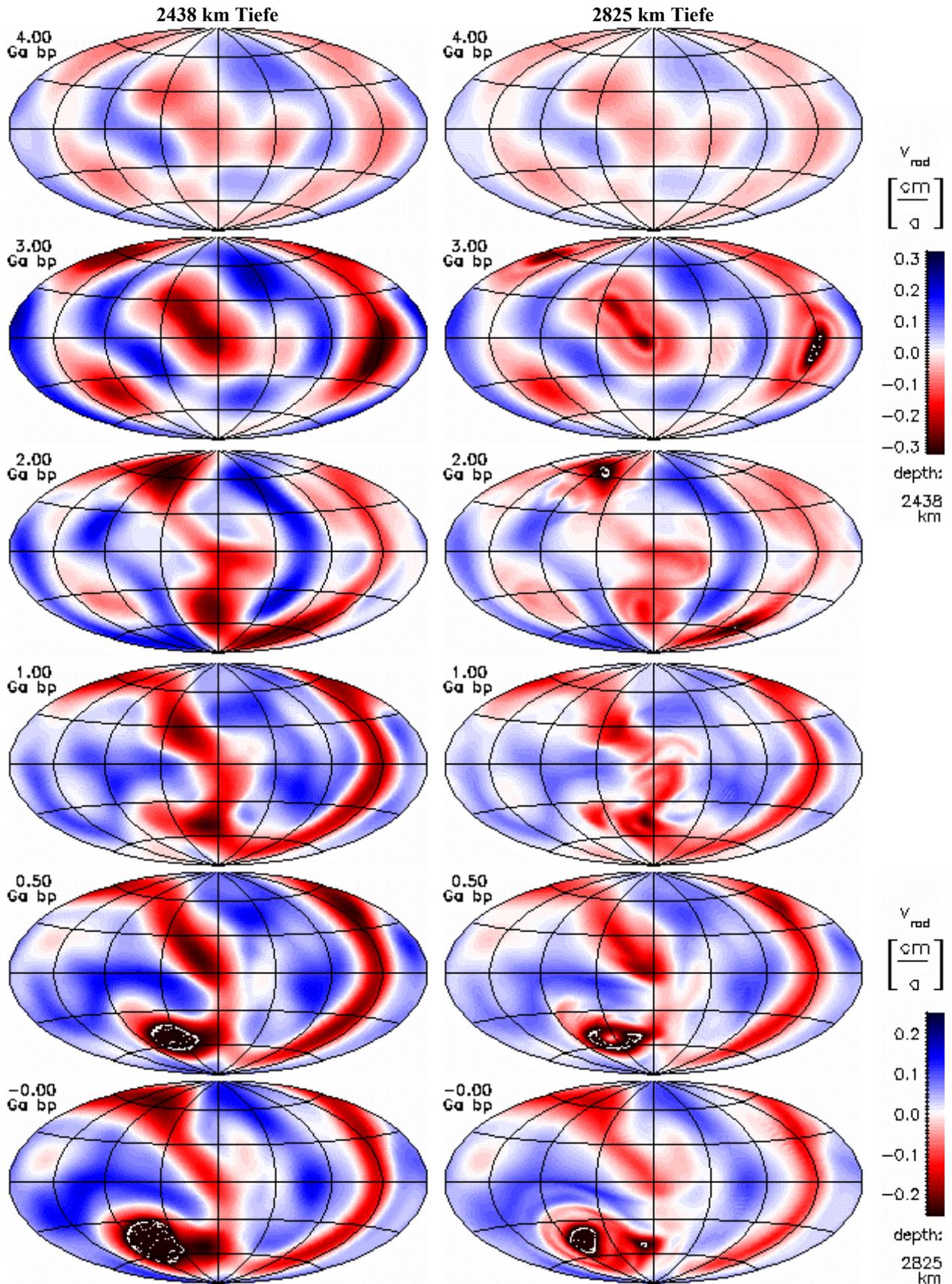
**Abb. 5.17-15:** Zeitliche Entwicklung der Heizleistung durch Zerfall von  $^{40}\text{K}$ ,  $^{42}\text{Th}$ ,  $^{235}\text{U}$  und  $^{238}\text{U}$  im Mantel

### 5.17. Modell 660



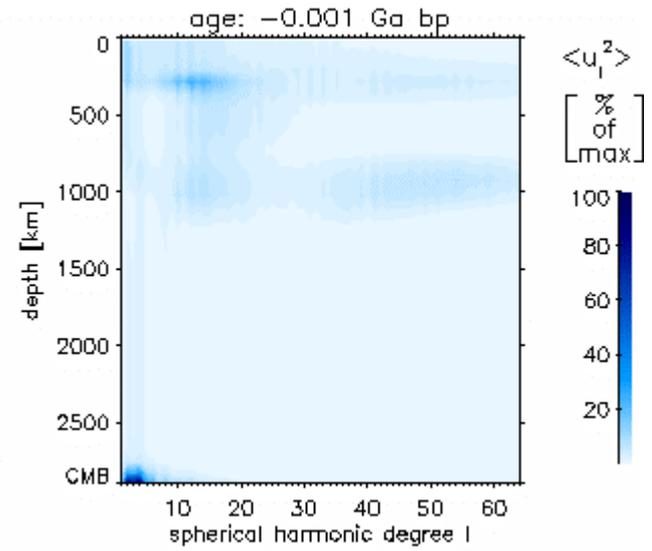
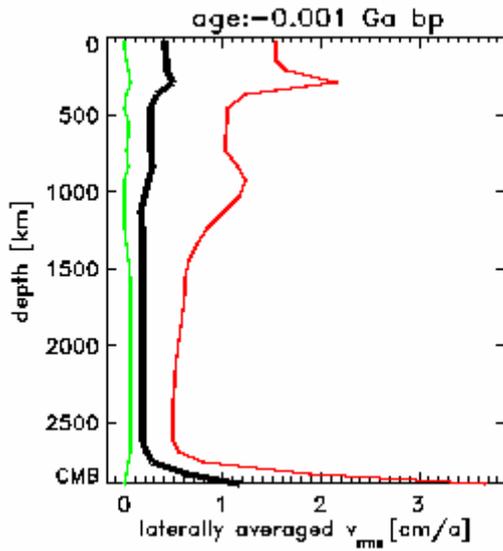
**Abb. 5.17-16:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente nahe der Oberfläche und im unteren Mantel. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind eventuell abgeschnitten.

### 5.17. Modell 660

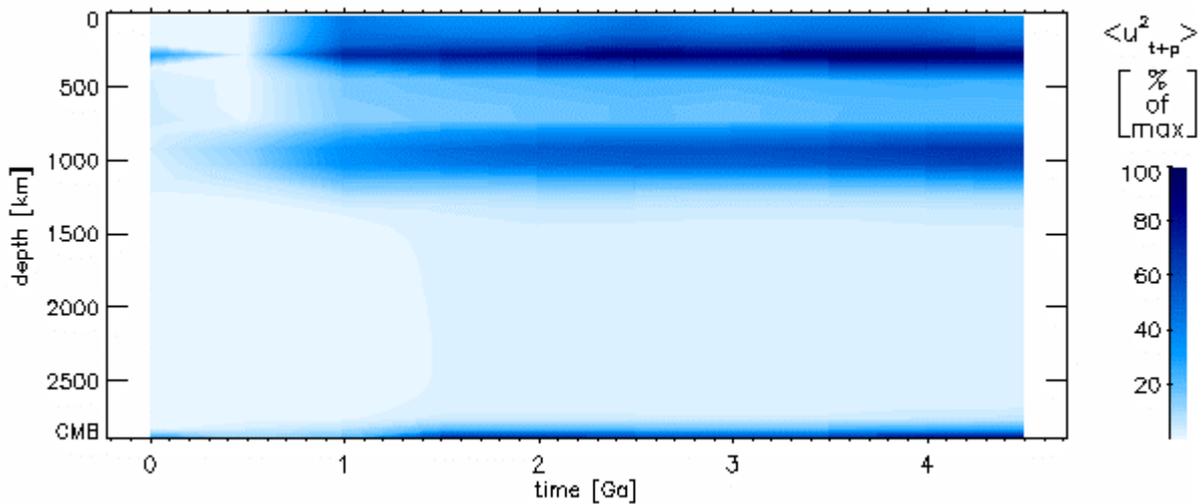


**Abb. 5.17-17:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente im hochviskosen Teil des unteren Mantels und nahe der CMB. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind evtl. abgeschnitten.

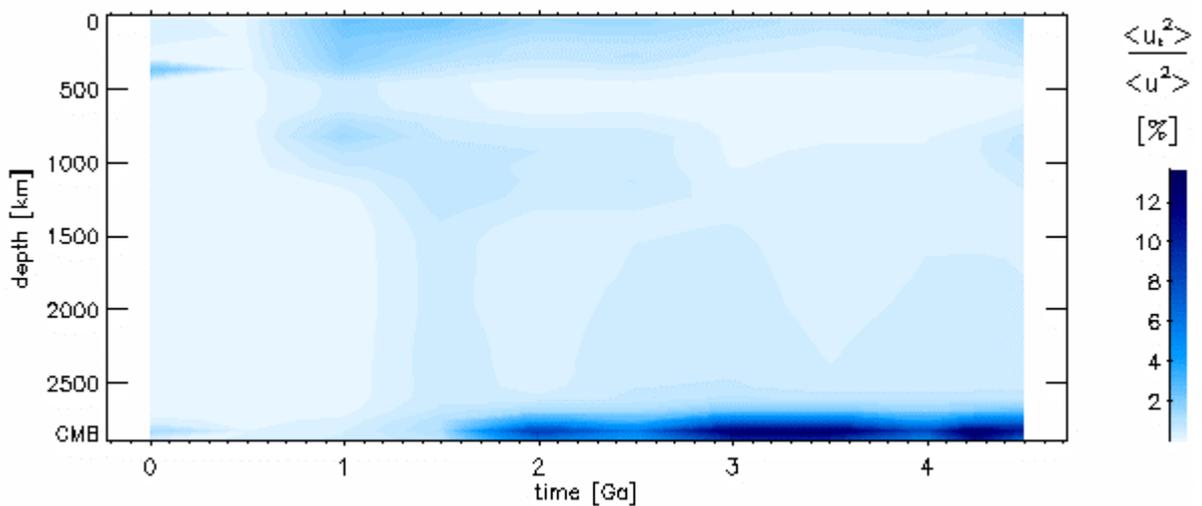
## 5.17. Modell 660



**Abb. 5.17-18:** Heutiges Geschwindigkeitsprofil **Abb. 5.17-19:** Spektrum von toroidaler plus poloidaler kinetischer Energie



**Abb. 5.17-20:** Entwicklung der Tiefenverteilung der Summe von poloidaler und toroidaler Energie



**Abb. 5.17-21:** Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung des toroidalen Anteils

5.17. Modell 660

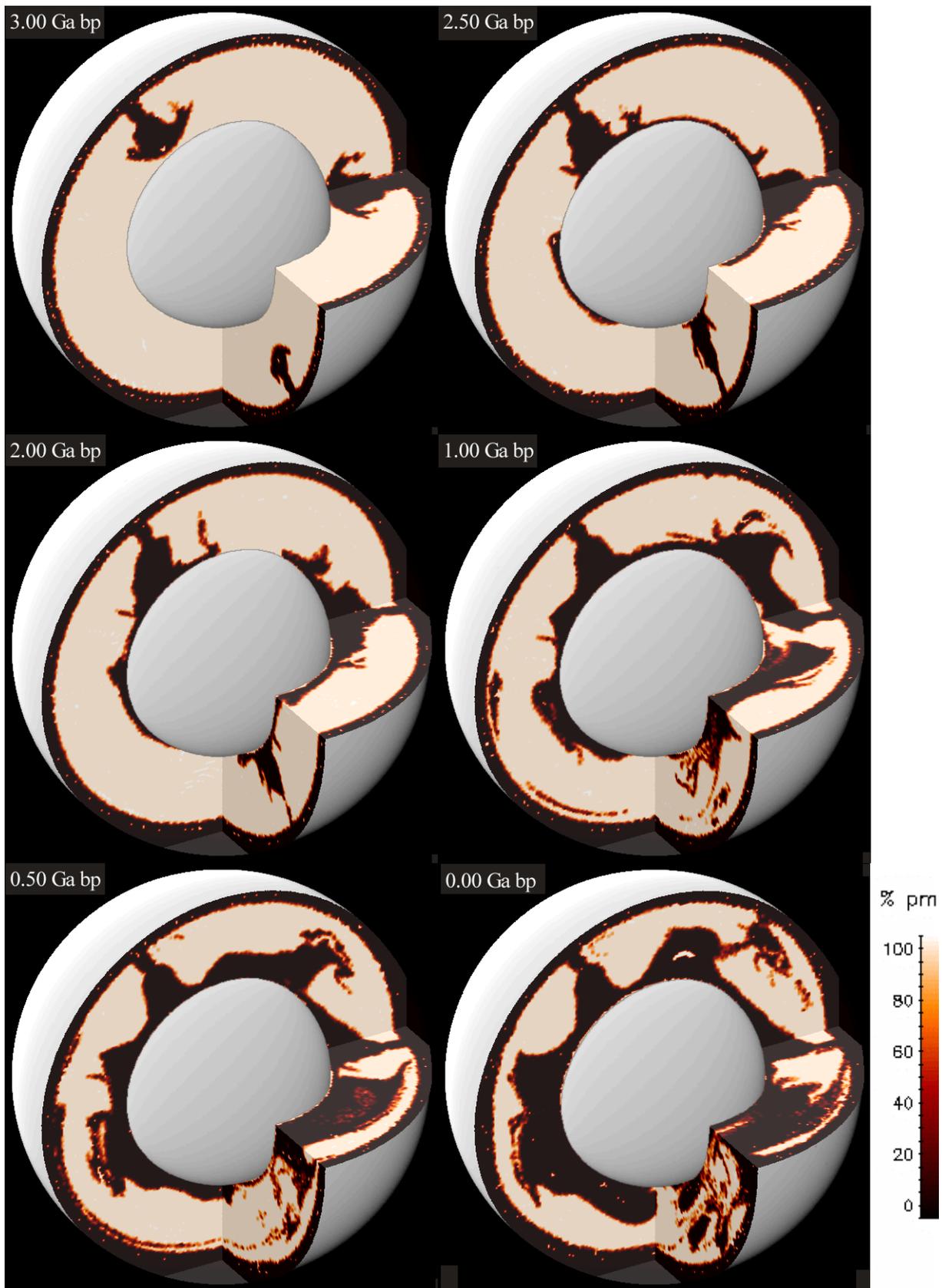
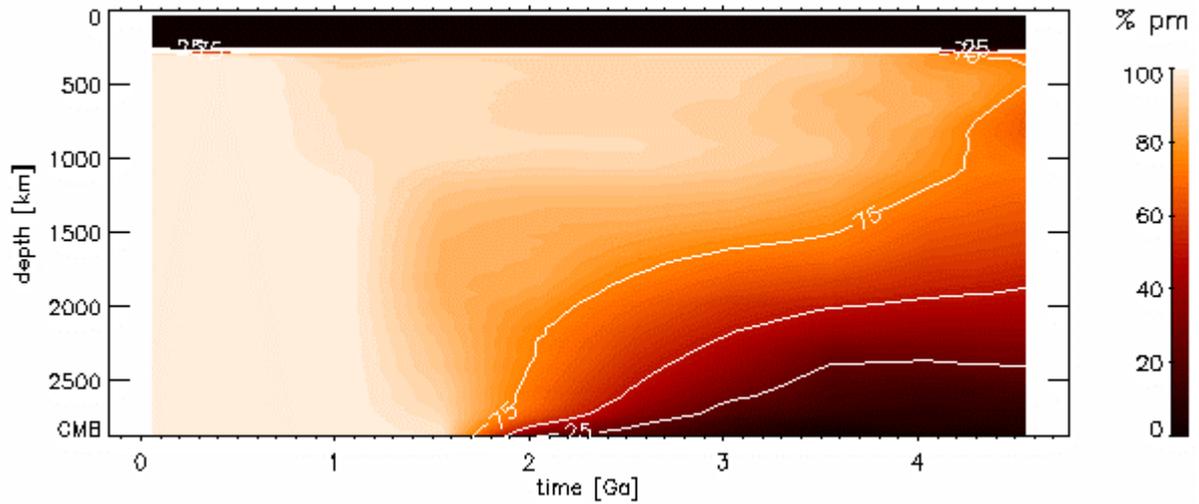
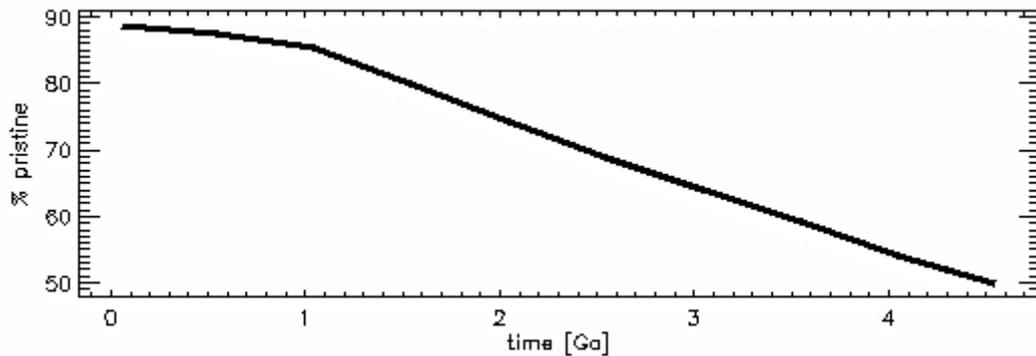


Abb. 5.17-22: Verteilung ursprünglichen Materials (pm) zu verschiedenen Zeiten

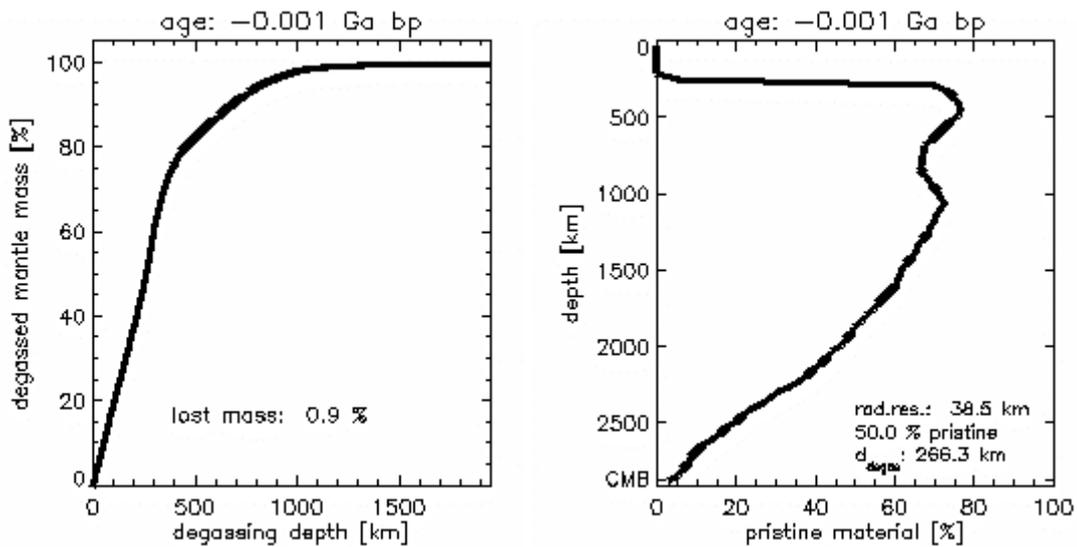
## 5.17. Modell 660



**Abb. 5.17-23:** Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung ursprünglichen Materials



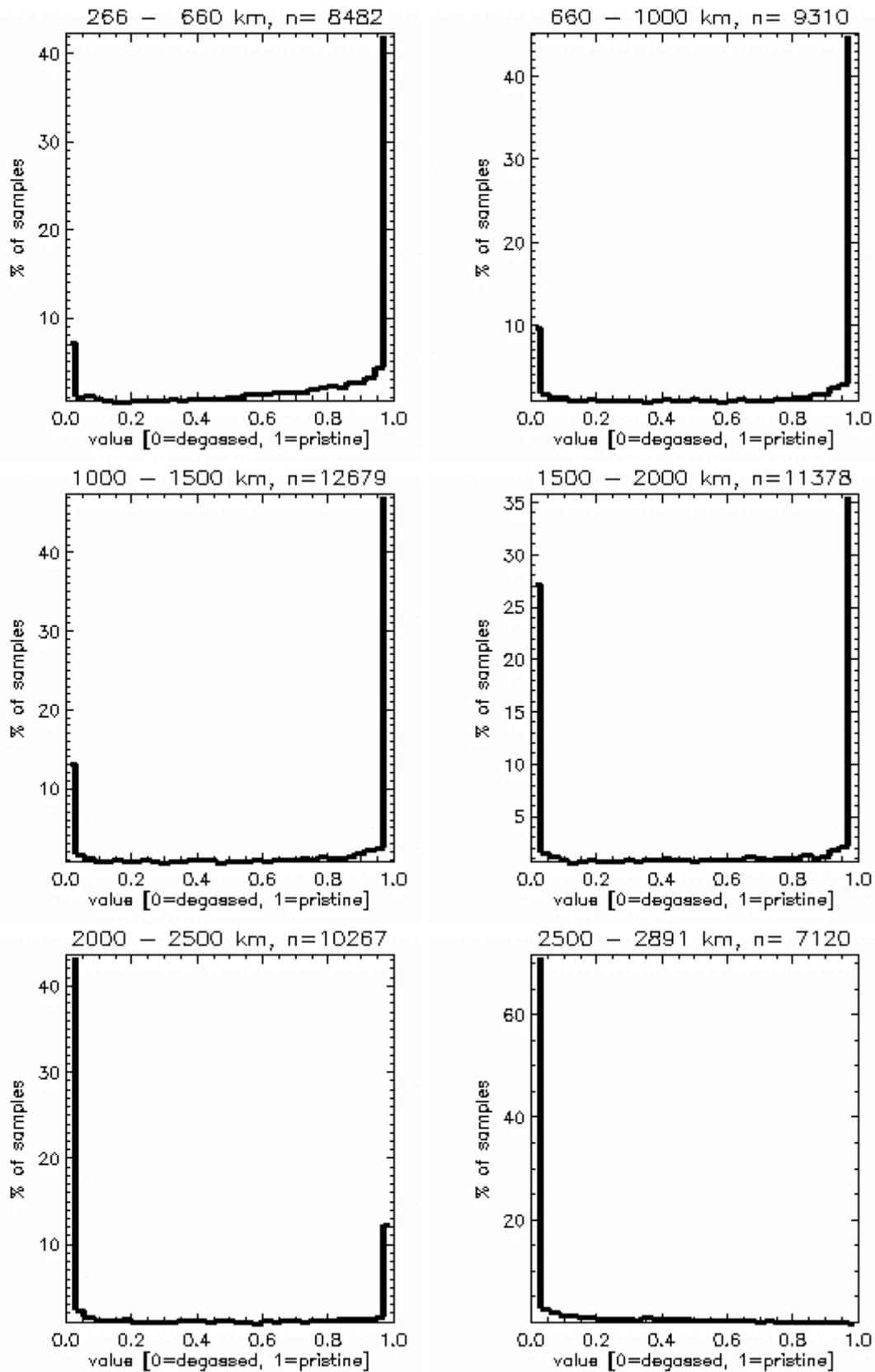
**Abb. 5.17-24:** Abnahme ursprünglichen Materials im Mantel



**Abb. 5.17-25:** Die Entgasungstiefe wird so festgelegt, dass am Ende der Rechnung 50 % des Mantels entgast sind

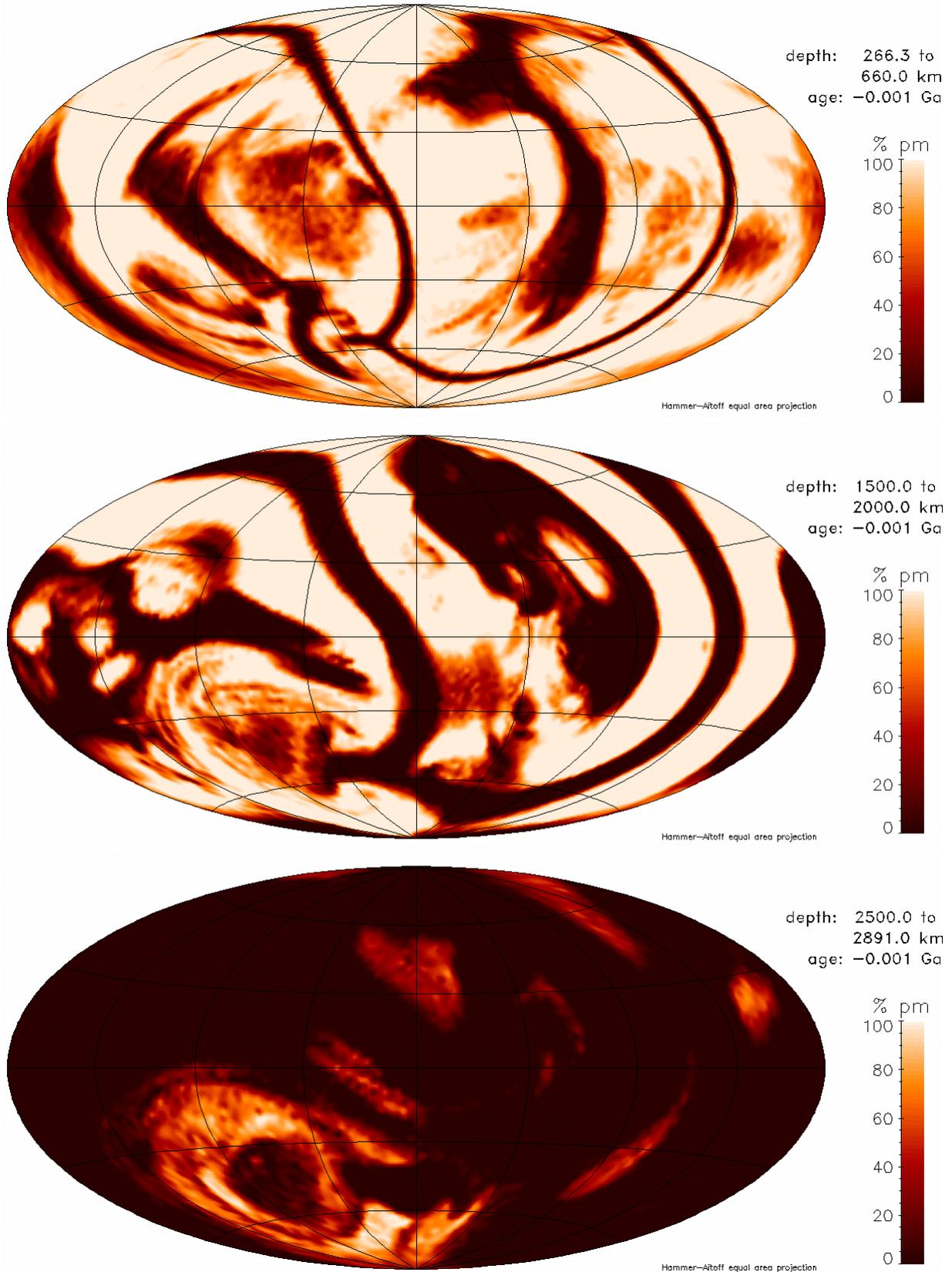
**Abb. 5.17-26:** Tiefenverteilung ursprünglichen Materials im heutigen Mantel

### 5.17. Modell 660



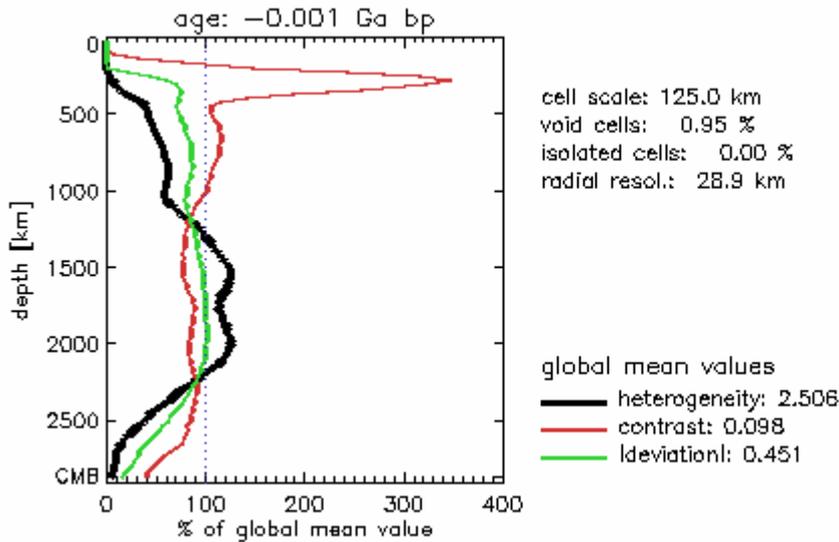
**Abb. 5.17-27:** Histogramme der Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Manteltiefen. Eine Probe repräsentiert den Mittelwert des gesamten radialen Intervalls. n ist die Anzahl der Unterteilungen der Kugelfläche in der jeweiligen Tiefe.

### 5.17. Modell 660

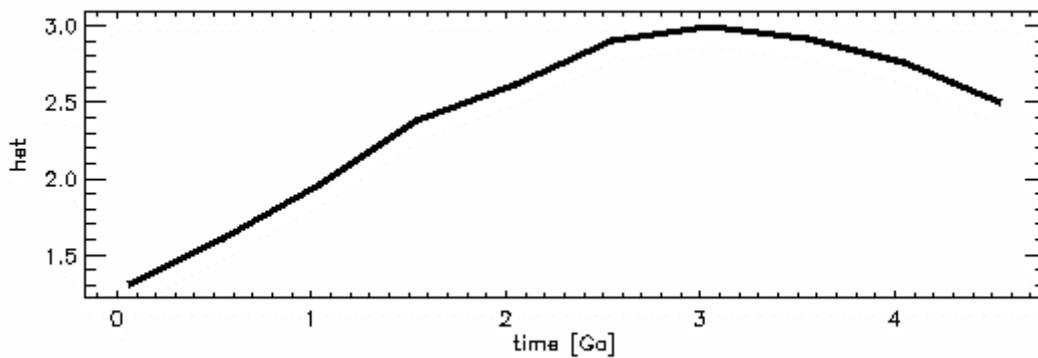


**Abb. 5.17-28:** Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Tiefenintervallen. Die laterale Auflösung entspricht der des jeweils passenden Histogramms in Abb. 5.17-27.

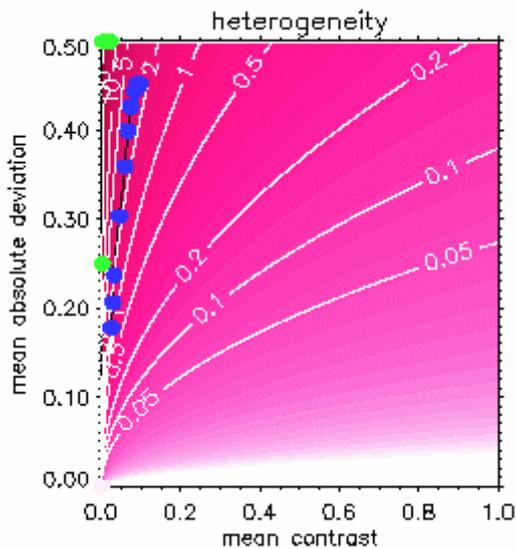
## 5.17. Modell 660



**Abb. 5.17-29:** Heutige Tiefenprofile der lateral gemittelten Werte von Heterogenität, Kontrast und mittlerer Absolutabweichung. Sie werden mit dem Mittelwert in der jeweiligen Kugelschale berechnet. Der globale Wert dient nur Skalierung der Abszisse.



**Abb. 5.17-30:** Zeitliche Entwicklung der Heterogenität



**Abb. 5.17-31:** Entwicklung der globalen Mittelwerte von Heterogenität, mittlerer Absolutabweichung und Kontrast.

Jeder blaue Punkt entspricht einem ausgewerteten Zeitschritt. Die schwarze Verbindungslinie folgt der zeitlichen Entwicklung. Der älteste Zeitschritt liegt näher am Koordinatenursprung als die jüngeren. Die grünen Punkte markieren die Lage der in Kapitel 4.2.3 vorgestellten Referenzmodelle. Die rötliche Farbkodierung mit Höhenlinien stellt den Wert der Heterogenität dar.

5.18. Modell 661

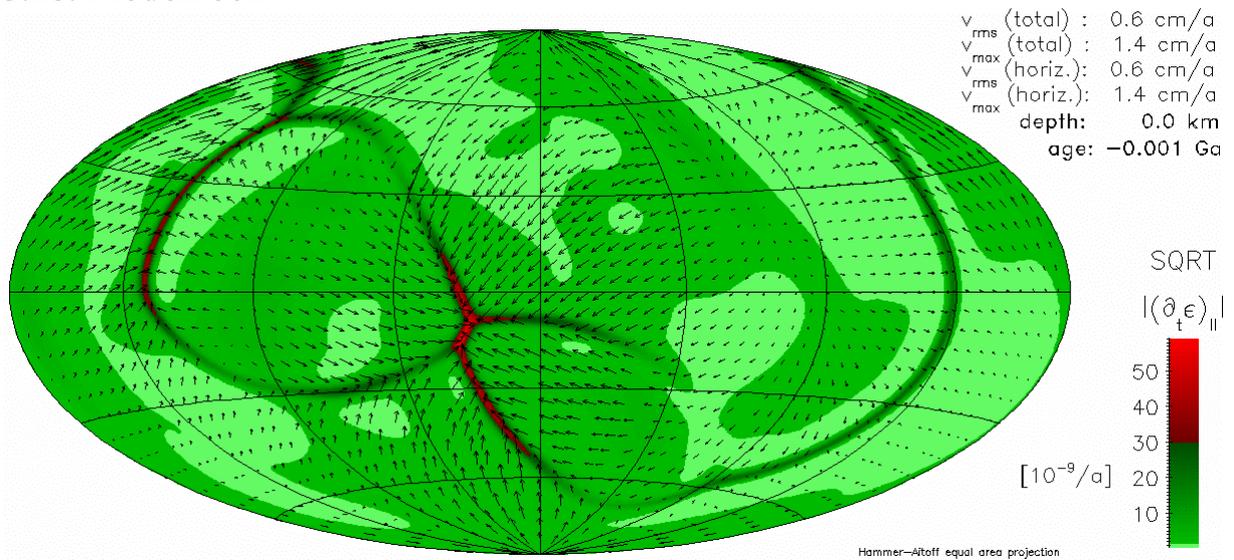


Abb. 5.18-65: Wurzel des Betrages der zweiten Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors

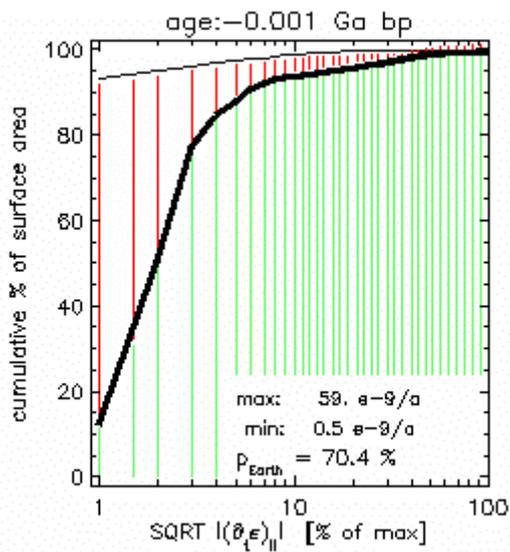


Abb. 5.18-66: Plattigkeit an der Oberfläche

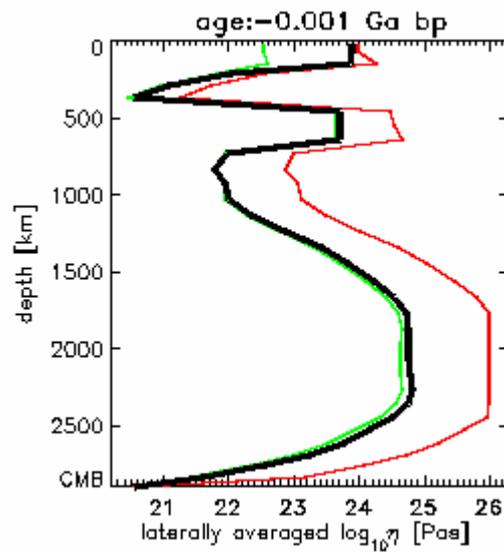


Abb. 5.18-67: Viskositätsprofil

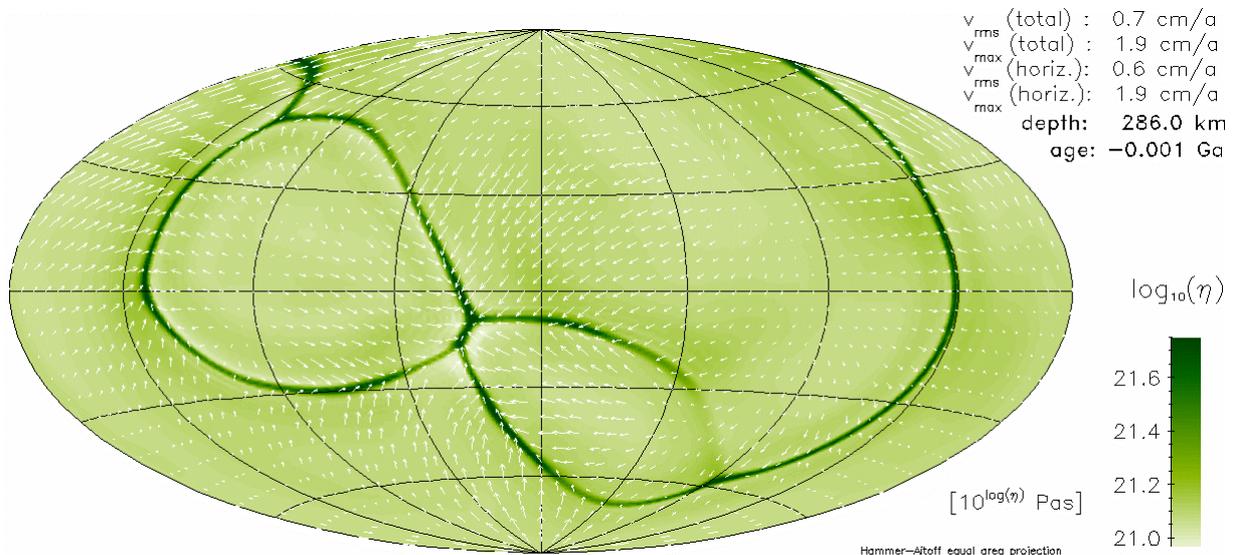
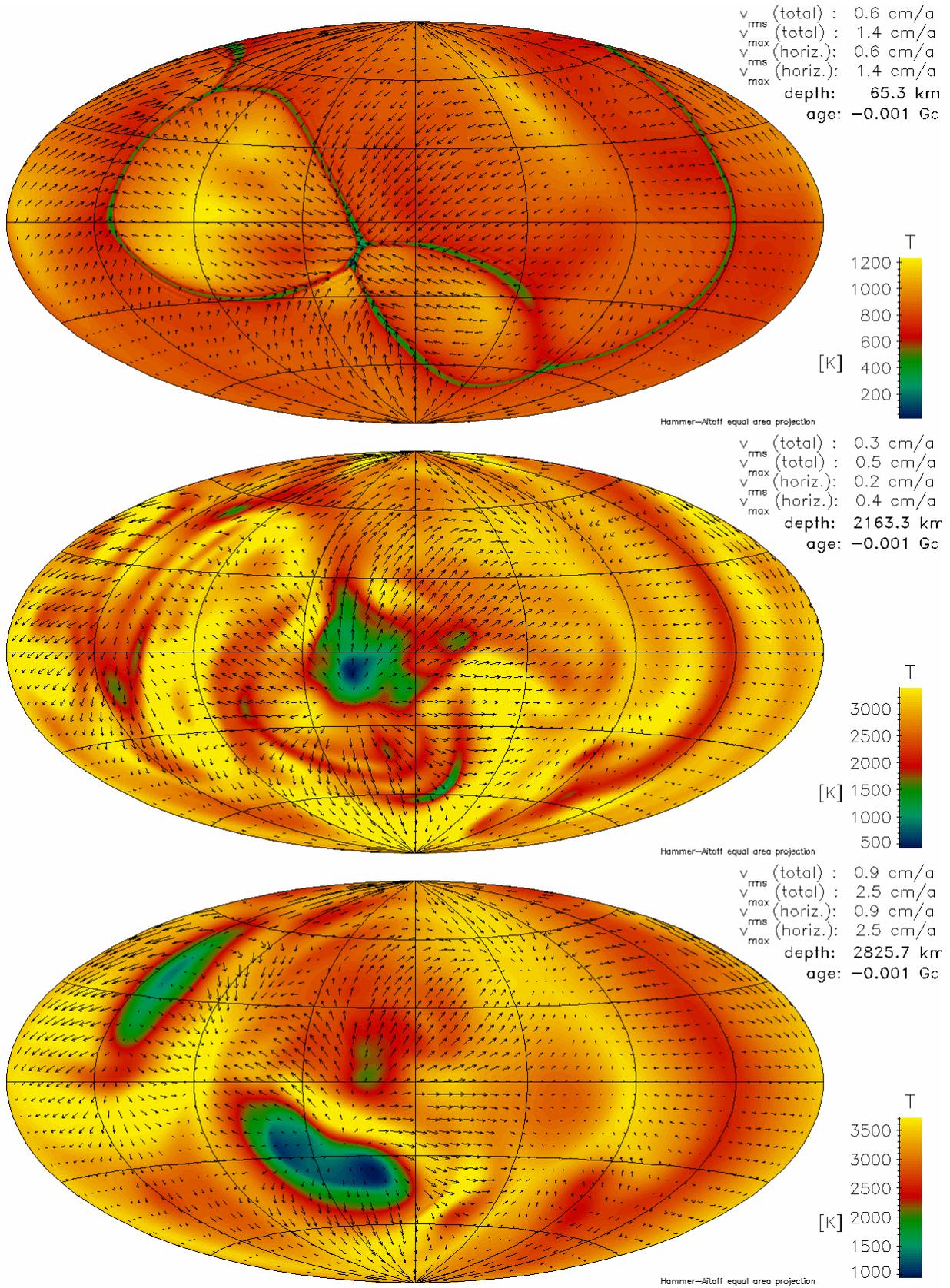


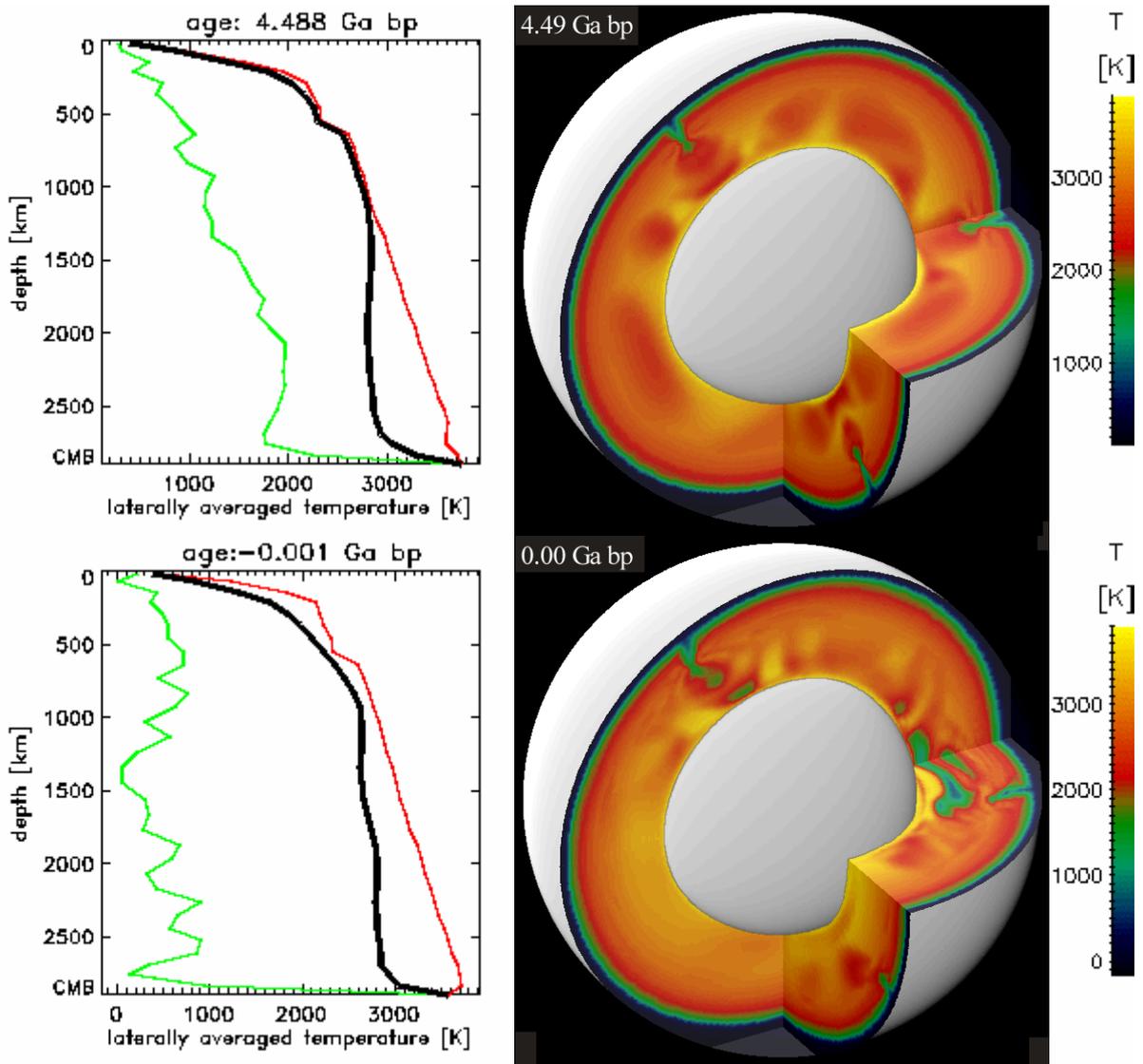
Abb. 5.18-68: Festere Abtauchzonen in der Asthenosphäre

## 5.18. Modell 661

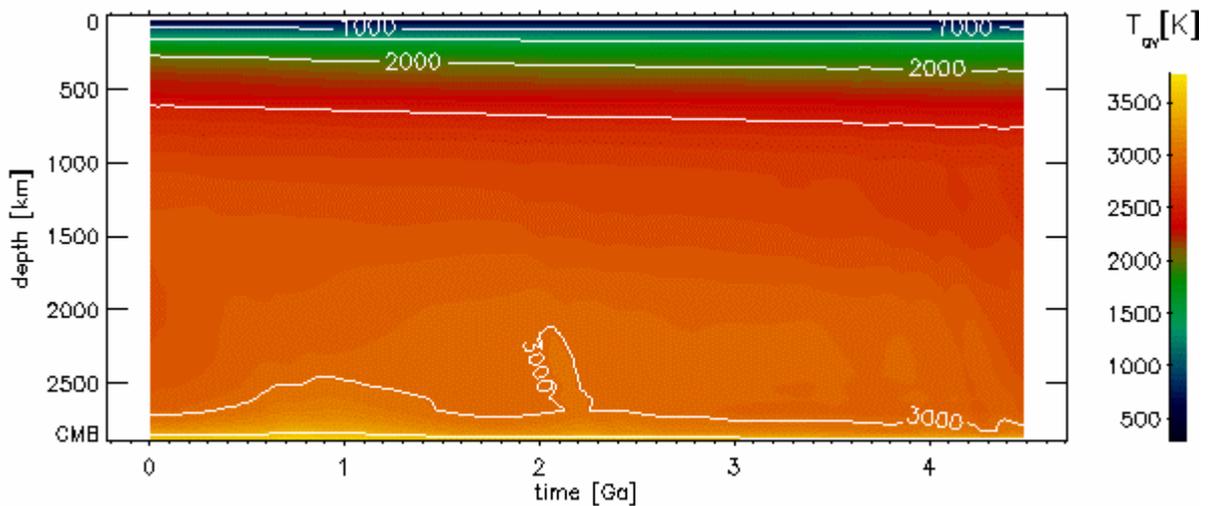


**Abb. 5.18-5:** Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten in verschiedenen Manteltiefen

## 5.18. Modell 661

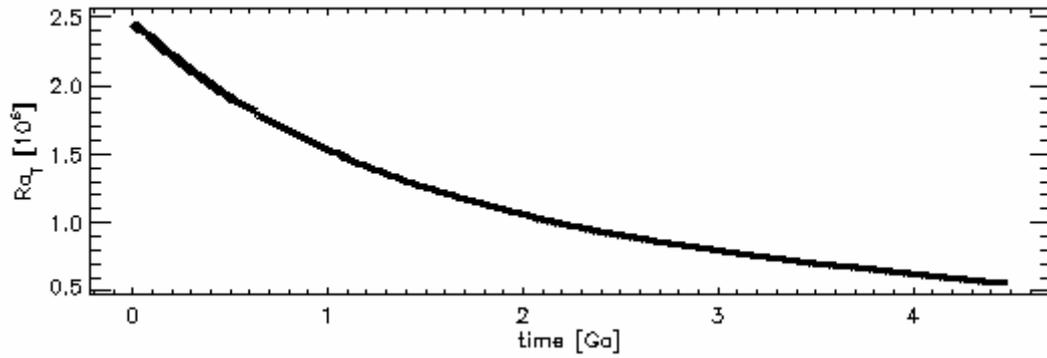


**Abb. 5.18-6:** Temperaturverteilung im Mantel am Anfang der Rechnung und heute

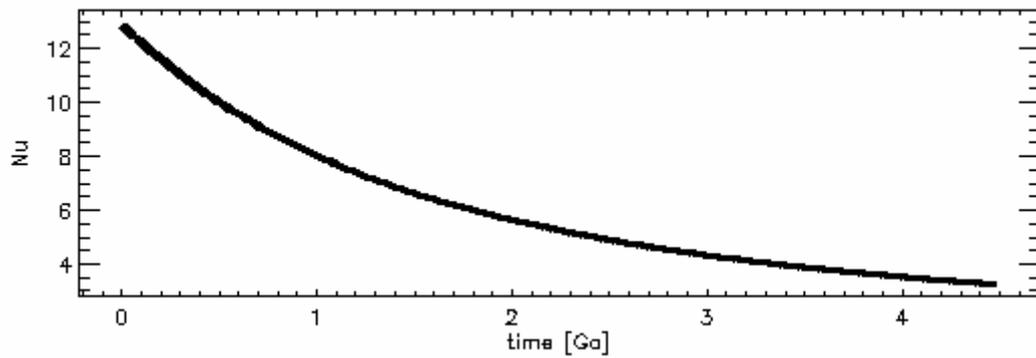


**Abb. 5.18-7:** Zeitliche Entwicklung des Temperaturprofils

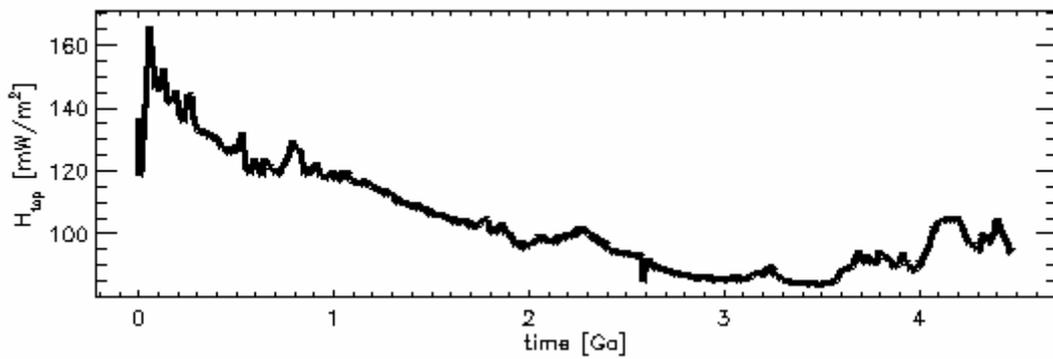
## 5.18. Modell 661



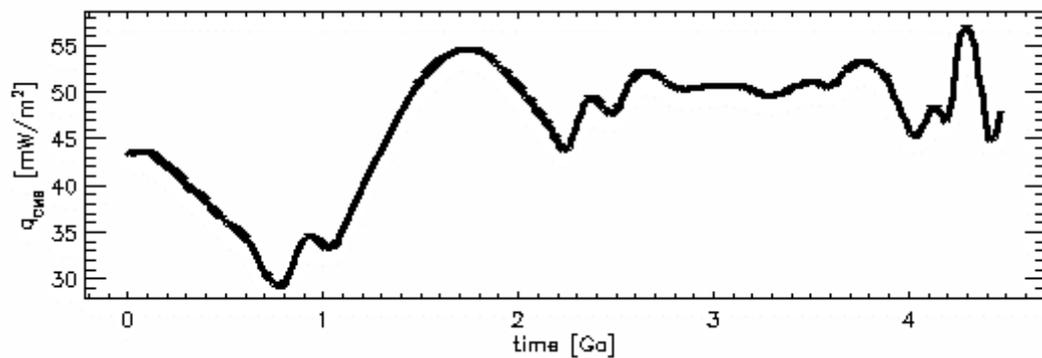
**Abb. 5.18-8:** Zeitliche Entwicklung der Rayleigh-Zahl



**Abb. 5.18-9:** Zeitliche Entwicklung der Nusselt-Zahl

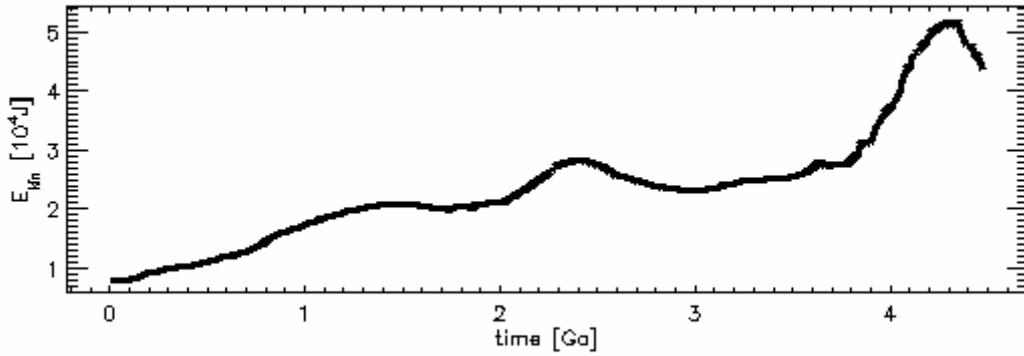


**Abb. 5.18-10:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Oberfläche

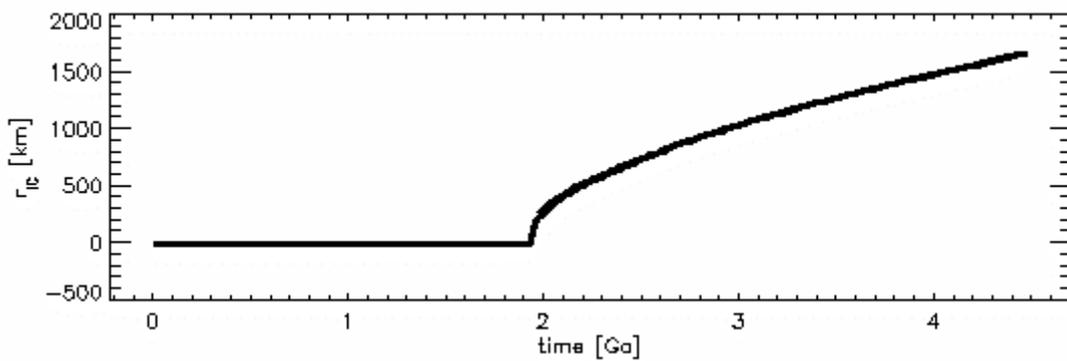


**Abb. 5.18-11:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Kern-Mantel-Grenze

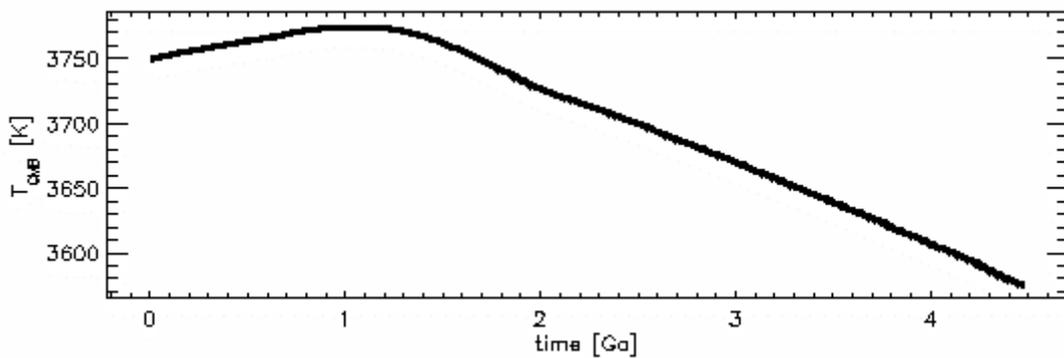
## 5.18. Modell 661



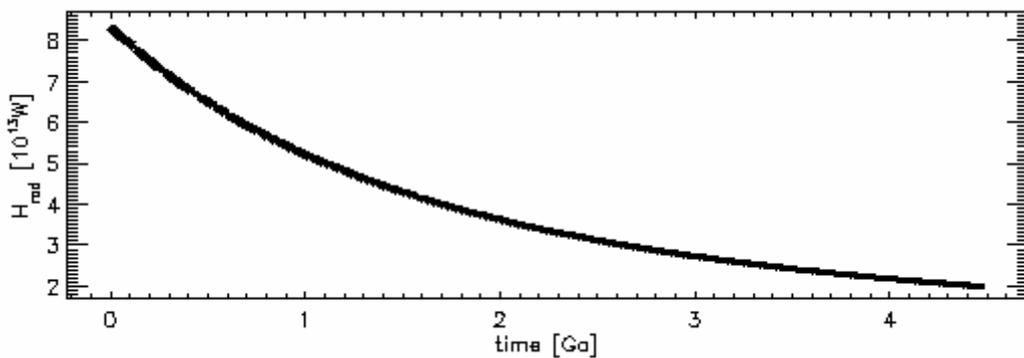
**Abb. 5.18-12:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des gesamten Mantels. Der hohe Wert am Anfang ist ein Artefakt.



**Abb. 5.18-13:** Zeitliche Entwicklung des Innenkernradius

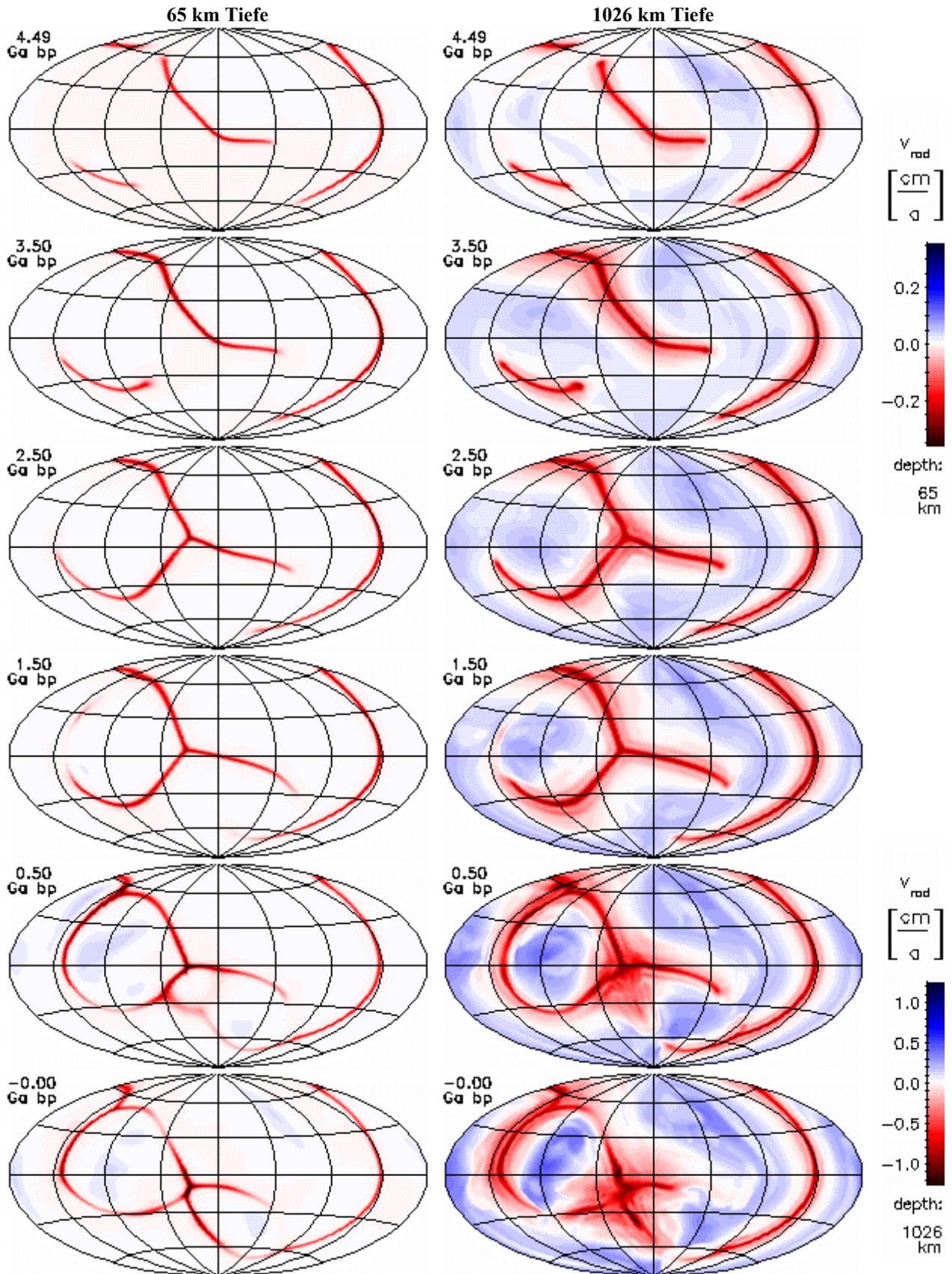


**Abb. 5.18-14:** Zeitliche Entwicklung der Temperatur an der CMB



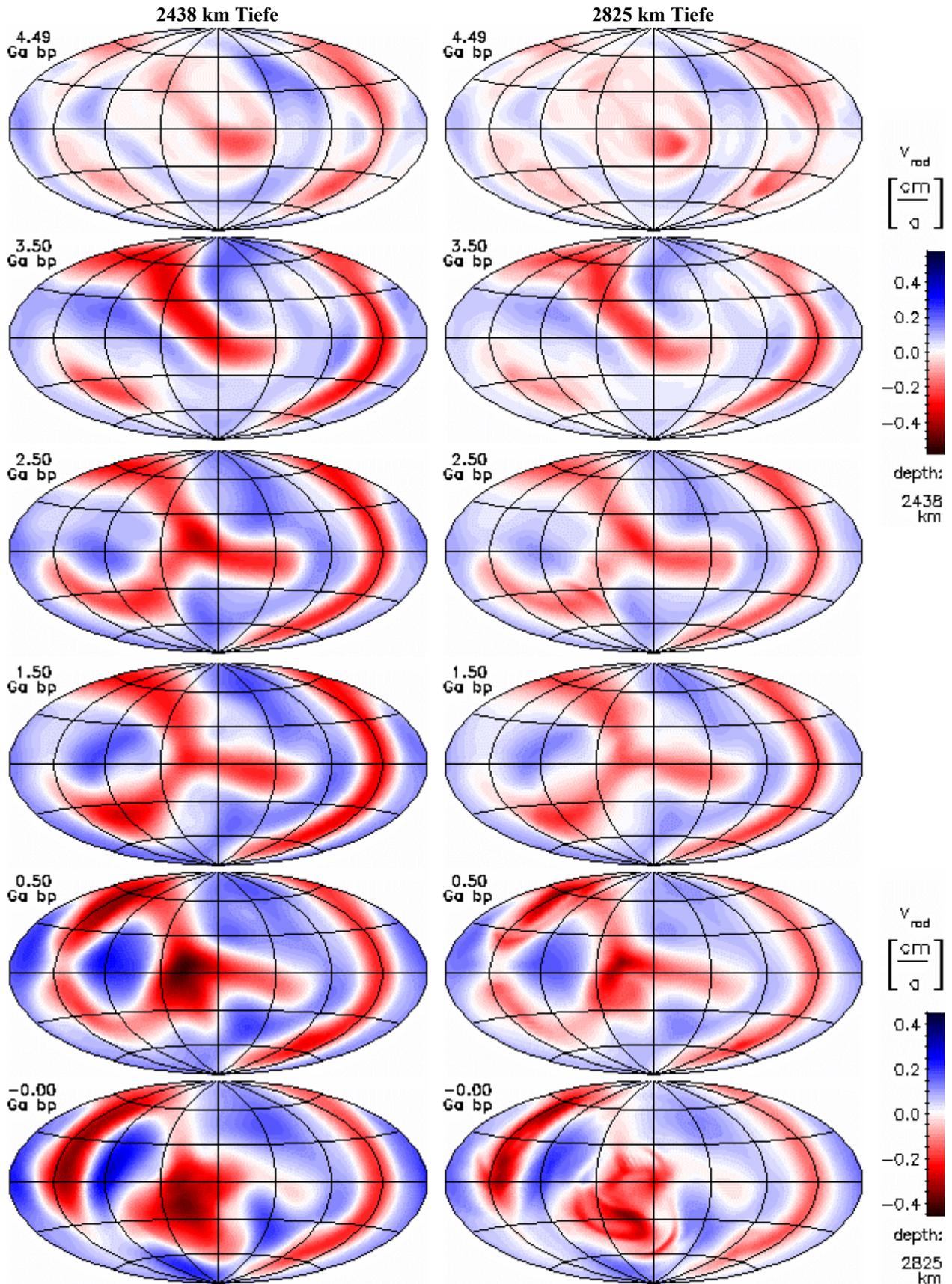
**Abb. 5.18-15:** Zeitliche Entwicklung der Heizleistung durch Zerfall von  $^{40}\text{K}$ ,  $^{42}\text{Th}$ ,  $^{235}\text{U}$  und  $^{238}\text{U}$  im Mantel

## 5.18. Modell 661



**Abb. 5.18-16:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente nahe der Oberfläche und im unteren Mantel. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind eventuell abgeschnitten.

## 5.18. Modell 661



**Abb. 5.18-17:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente im hochviskosen Teil des unteren Mantels und nahe der CMB. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind evtl. abgeschnitten.

## 5.18. Modell 661

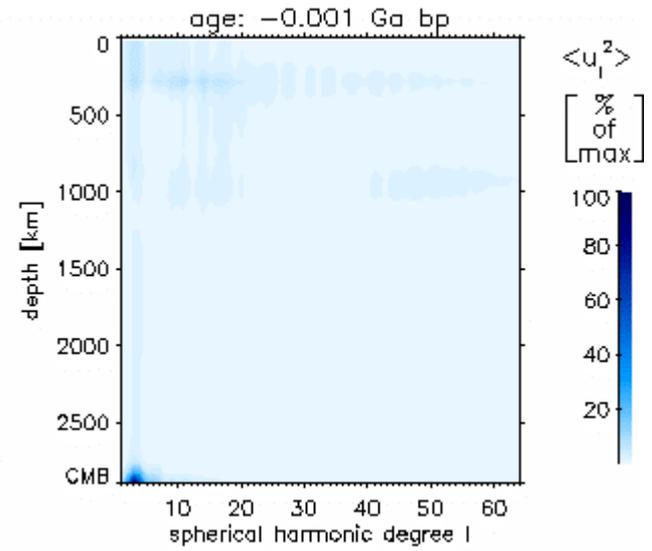
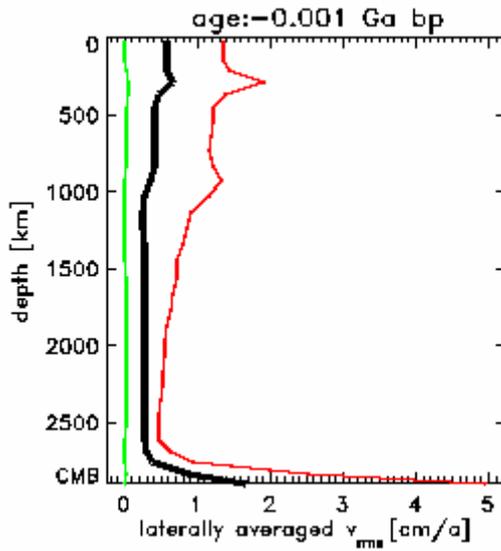


Abb. 5.18-18: Heutiges Geschwindigkeitsprofil

Abb. 5.18-19: Spektrum von toroidaler plus poloidaler kinetischer Energie

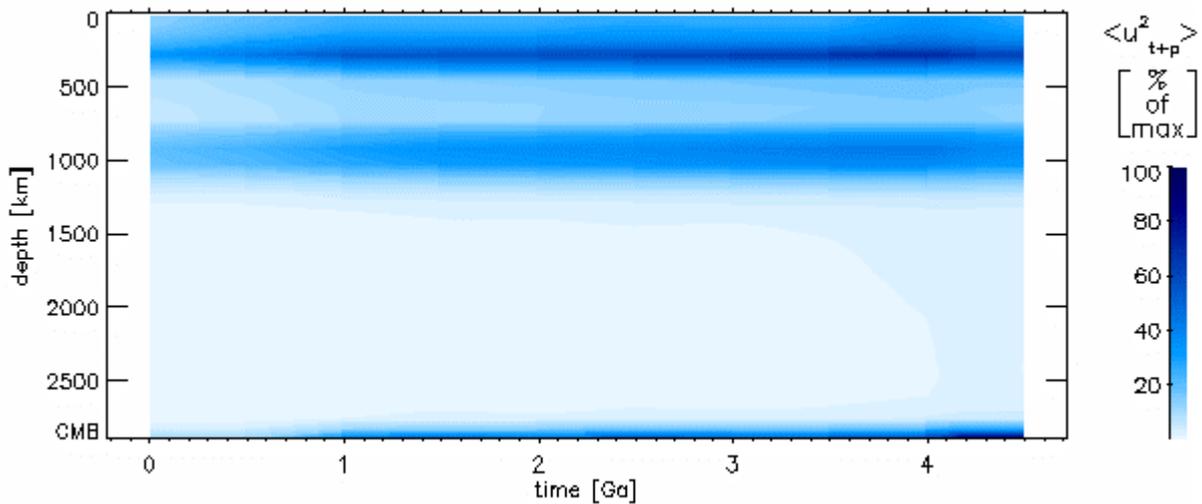


Abb. 5.18-20: Entwicklung der Tiefenverteilung der Summe von poloidaler und toroidaler Energie

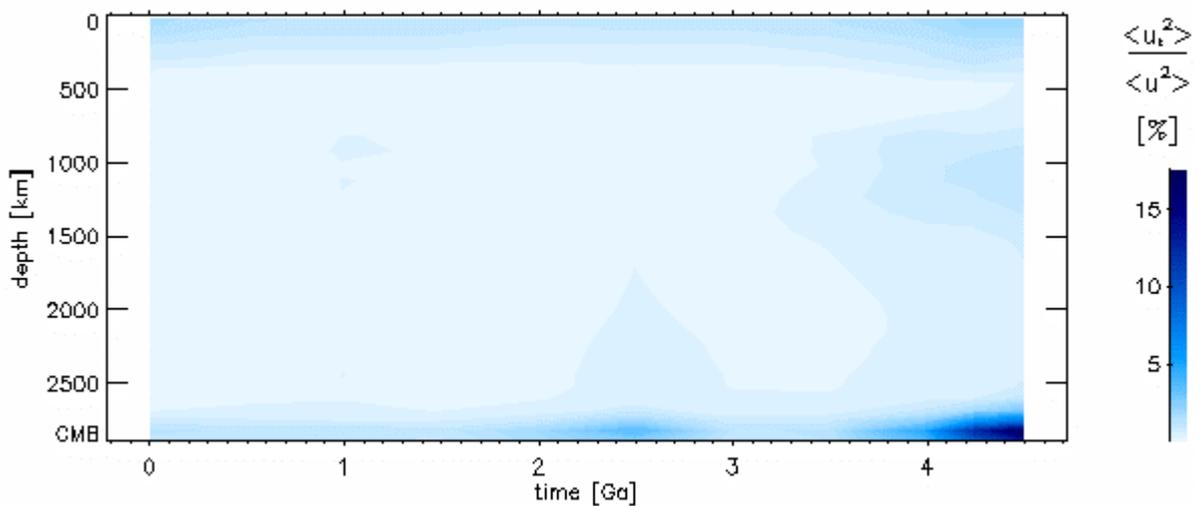


Abb. 5.18-21: Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung des toroidalen Anteils

5.18. Modell 661

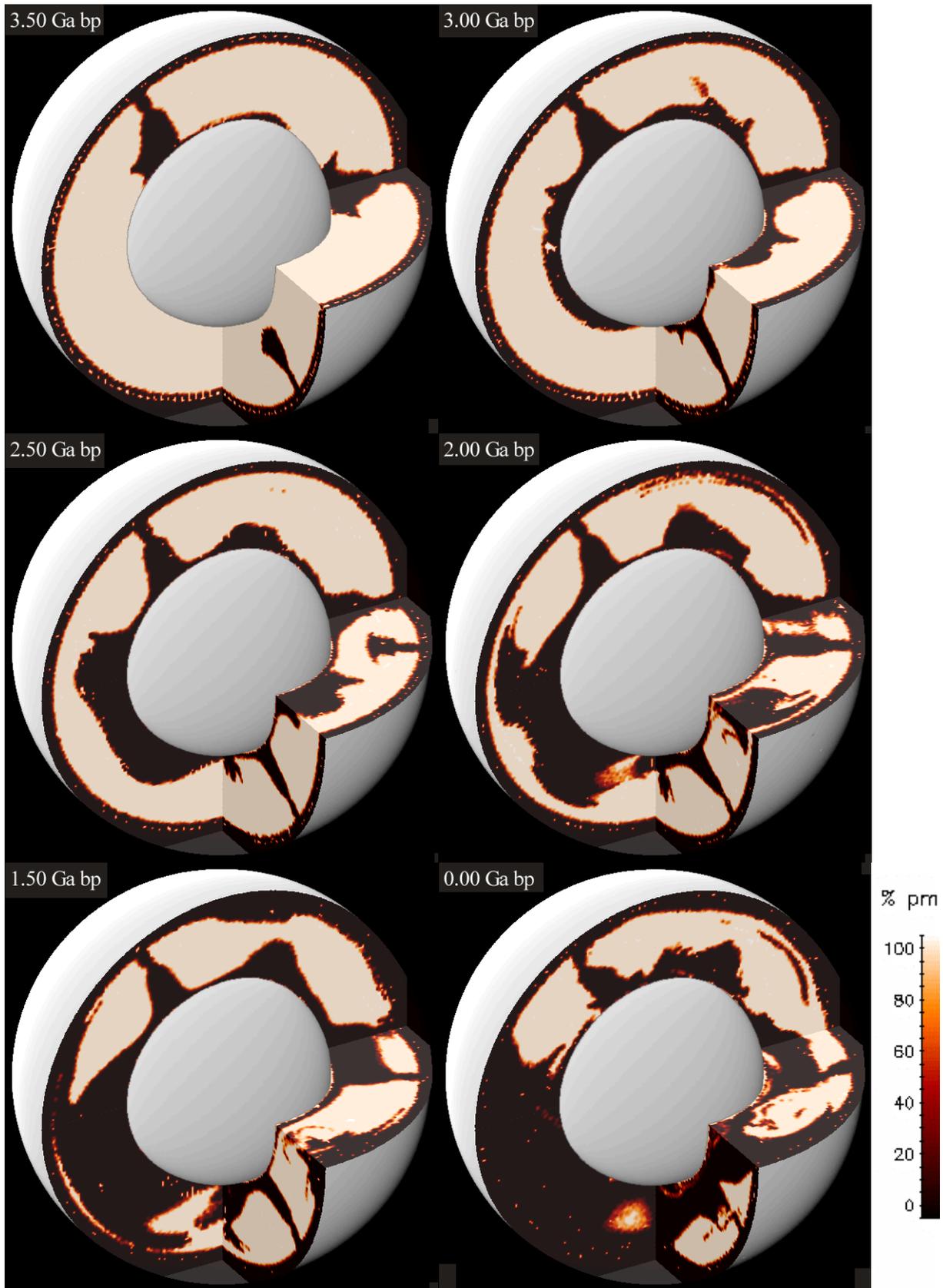
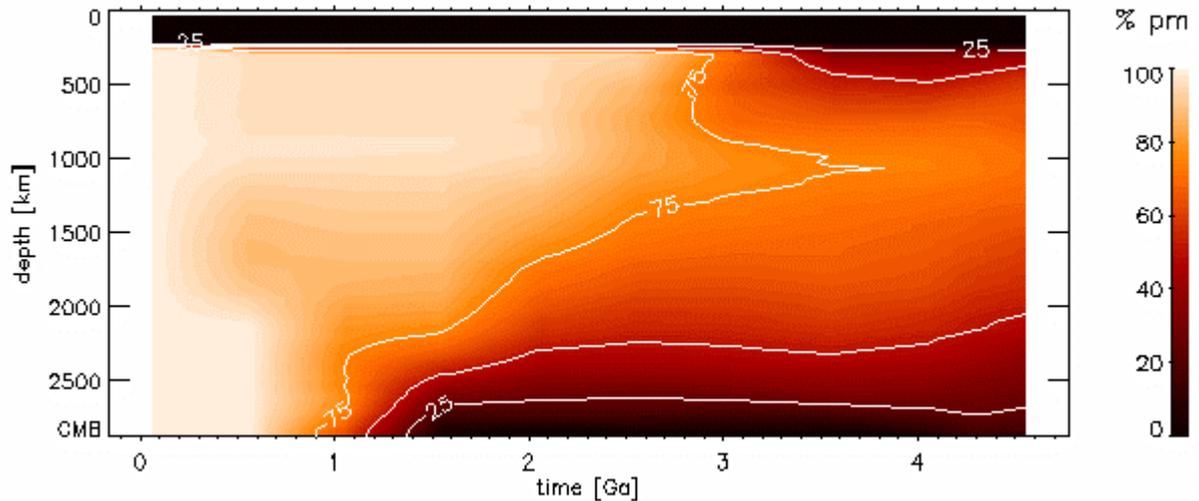
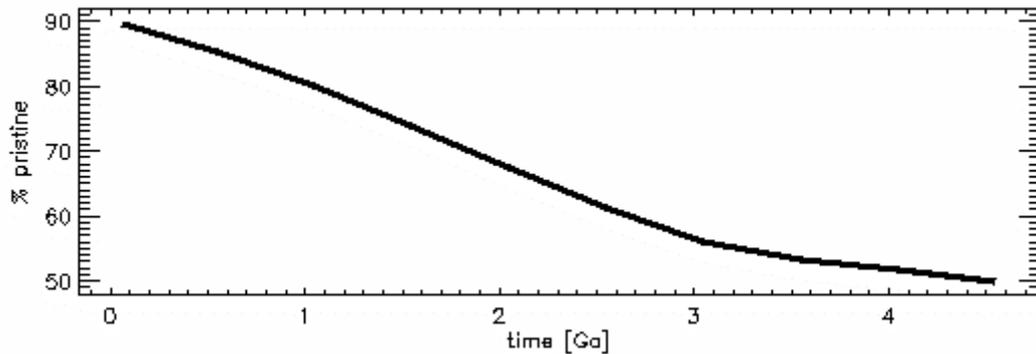


Abb. 5.18-22: Verteilung ursprünglichen Materials (pm) zu verschiedenen Zeiten

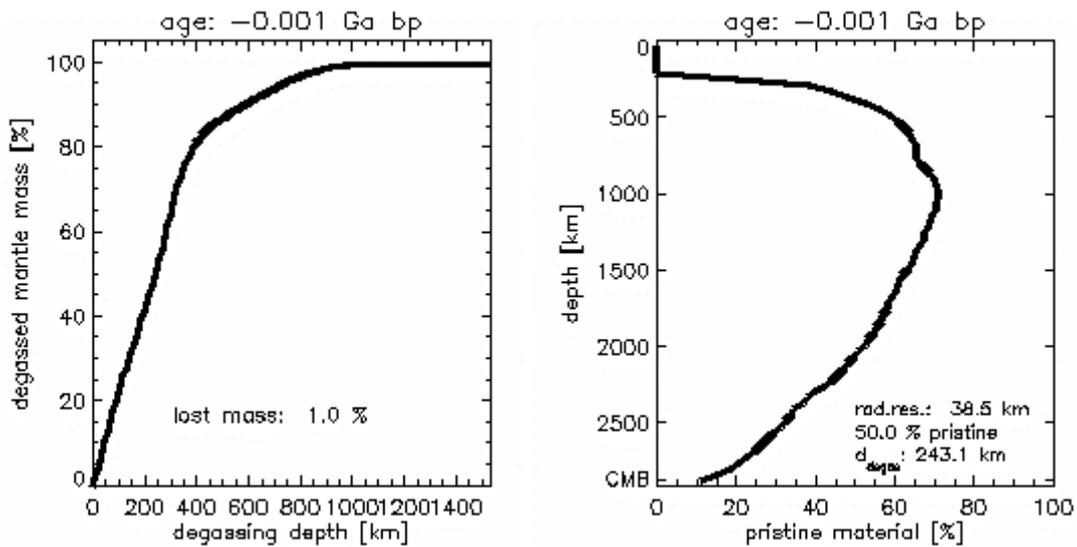
## 5.18. Modell 661



**Abb. 5.18-23:** Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung ursprünglichen Materials



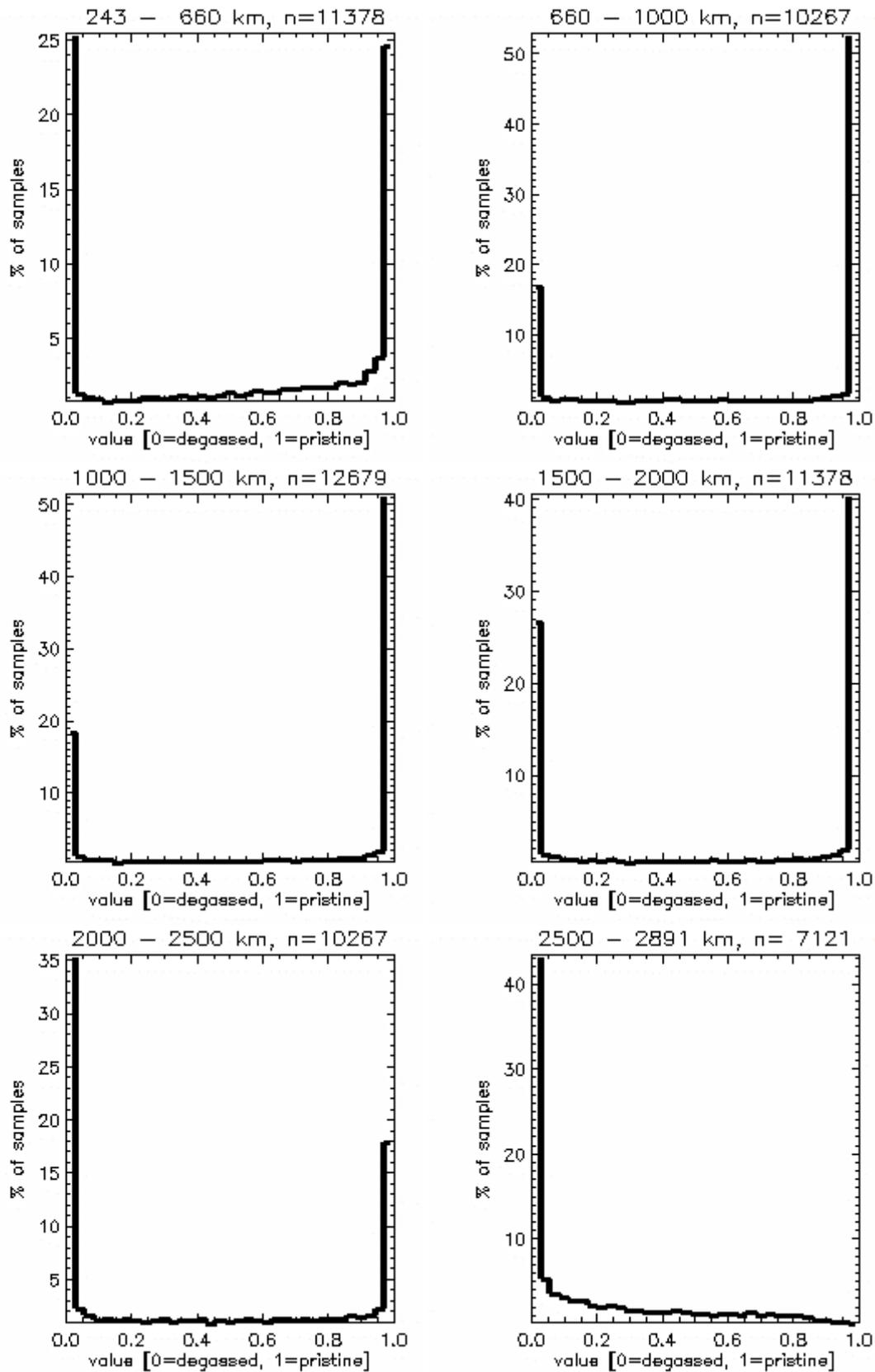
**Abb. 5.18-24:** Abnahme ursprünglichen Materials im Mantel



**Abb. 5.18-25:** Die Entgasungstiefe wird so festgelegt, dass am Ende der Rechnung 50 % des Mantels entgast sind

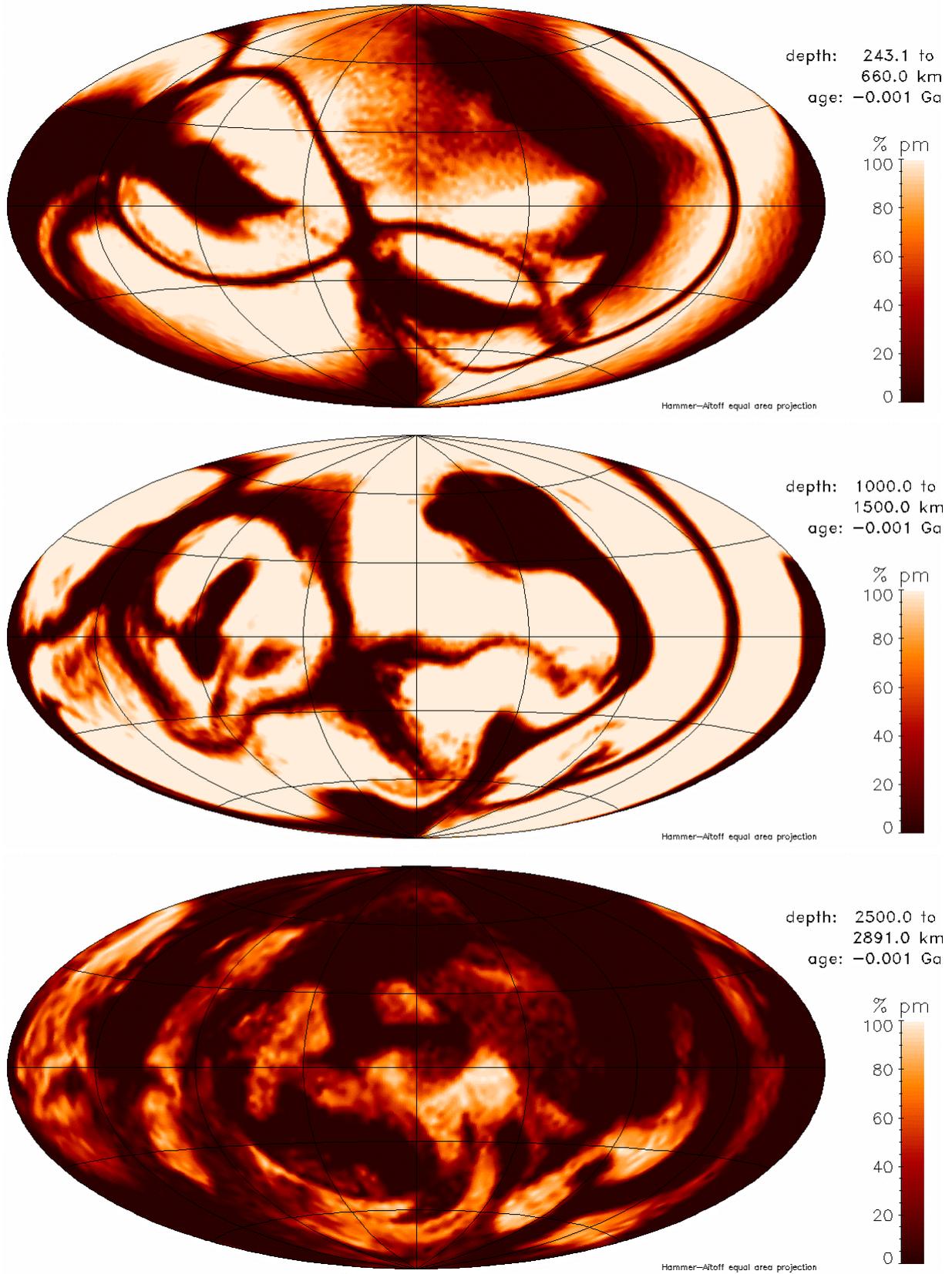
**Abb. 5.18-26:** Tiefenverteilung ursprünglichen Materials im heutigen Mantel

## 5.18. Modell 661



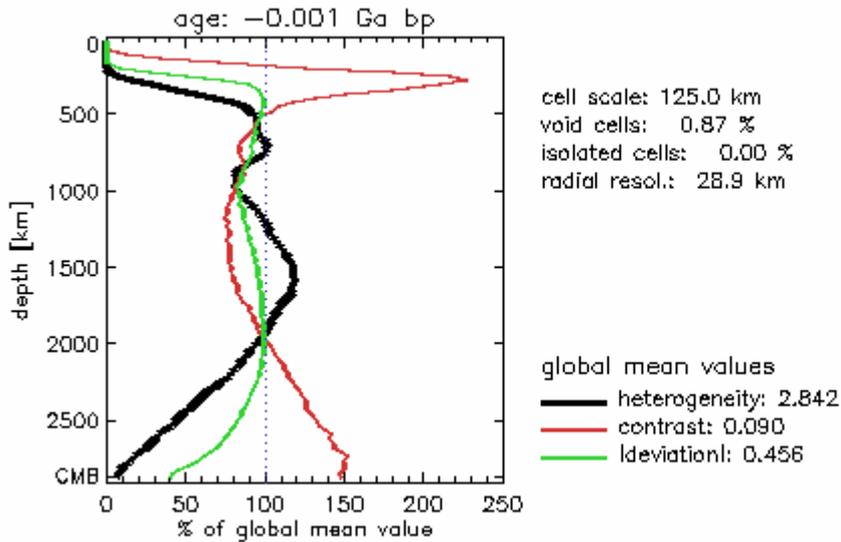
**Abb. 5.18-27:** Histogramme der Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Manteltiefen. Eine Probe repräsentiert den Mittelwert des gesamten radialen Intervalls. n ist die Anzahl der Unterteilungen der Kugelfläche in der jeweiligen Tiefe.

### 5.18. Modell 661

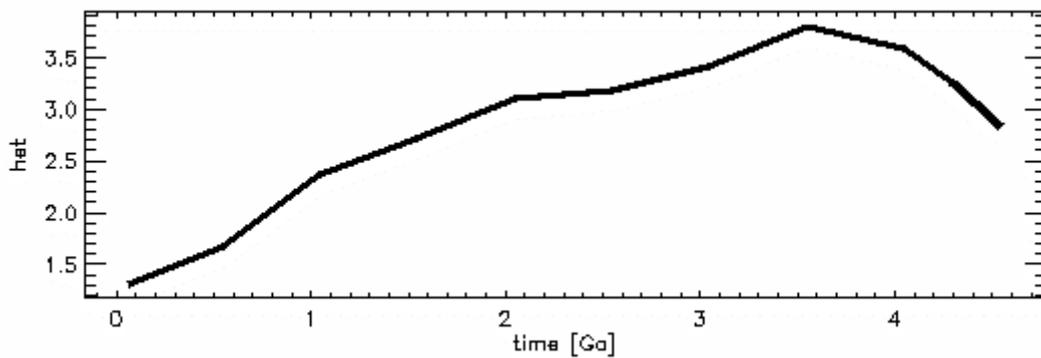


**Abb. 5.18-28:** Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Tiefenintervallen. Die laterale Auflösung entspricht der des jeweils passenden Histogramms in Abb. 5.18-27.

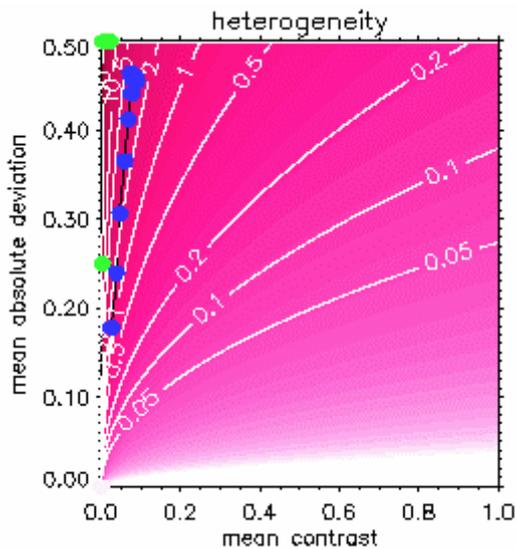
## 5.18. Modell 661



**Abb. 5.18-29:** Heutige Tiefenprofile der lateral gemittelten Werte von Heterogenität, Kontrast und mittlerer Absolutabweichung. Sie werden mit dem Mittelwert in der jeweiligen Kugelschale berechnet. Der globale Wert dient nur Skalierung der Abszisse.



**Abb. 5.18-30:** Zeitliche Entwicklung der Heterogenität



**Abb. 5.18-31:** Entwicklung der globalen Mittelwerte von Heterogenität, mittlerer Absolutabweichung und Kontrast.

Jeder blaue Punkt entspricht einem ausgewerteten Zeitschritt. Die schwarze Verbindungslinie folgt der zeitlichen Entwicklung. Der älteste Zeitschritt liegt näher am Koordinatenursprung als die jüngeren. Die grünen Punkte markieren die Lage der in Kapitel 4.2.3 vorgestellten Referenzmodelle. Die rötliche Farbkodierung mit Höhenlinien stellt den Wert der Heterogenität dar.

5.19. Modell 662

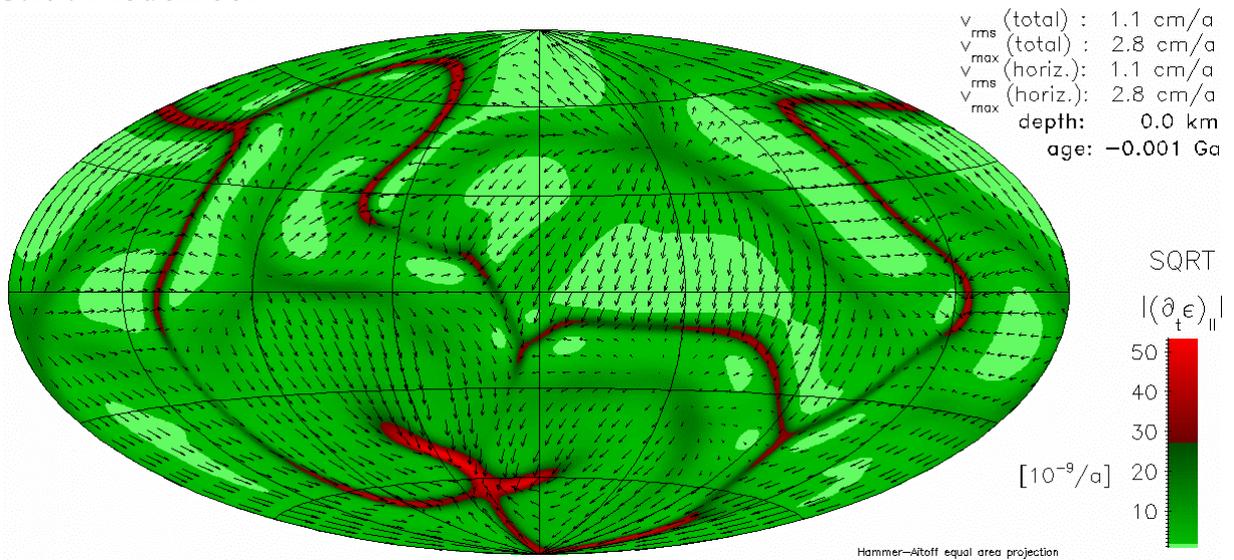


Abb. 5.19-69: Wurzel des Betrages der zweiten Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors

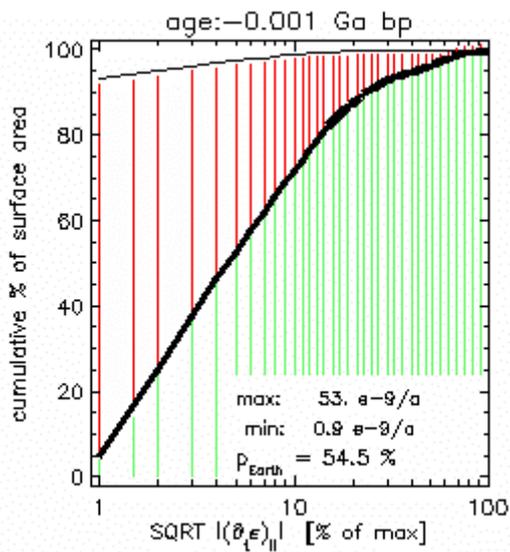


Abb. 5.19-70: Plattigkeit an der Oberfläche

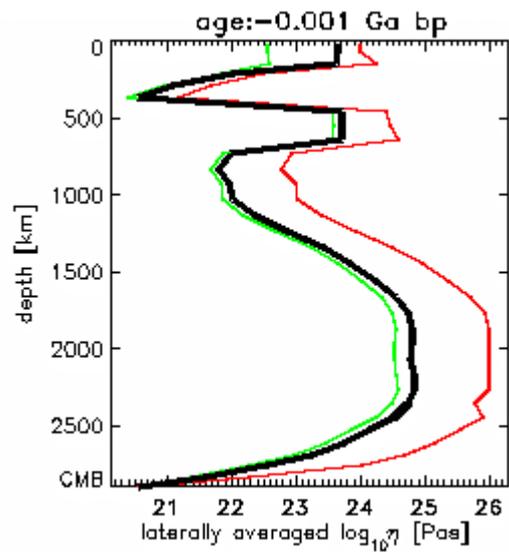


Abb. 5.19-71: Viskositätsprofil

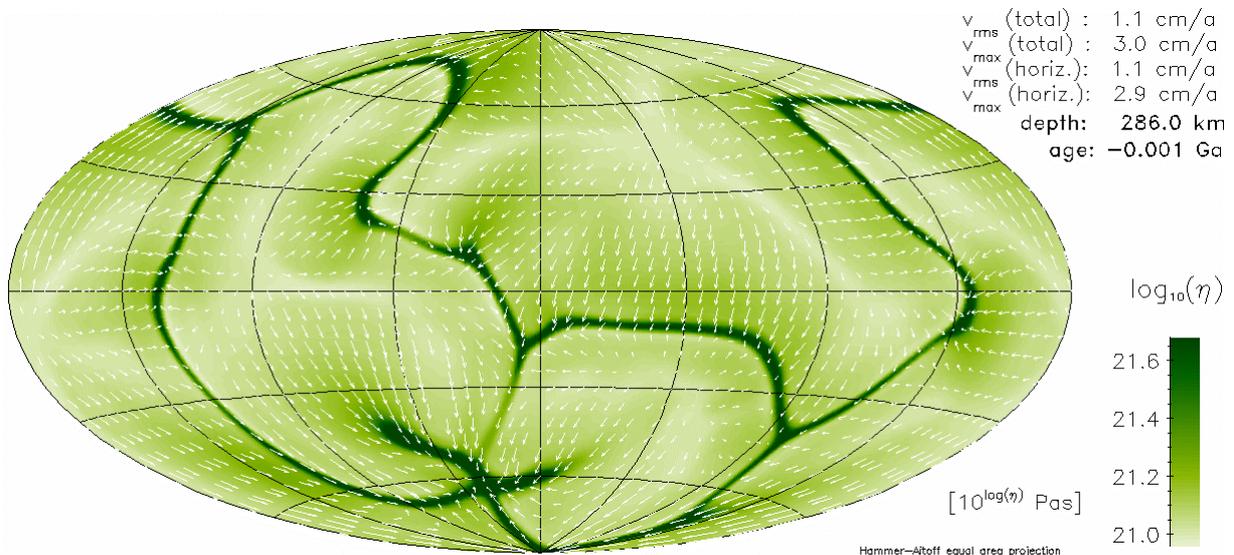
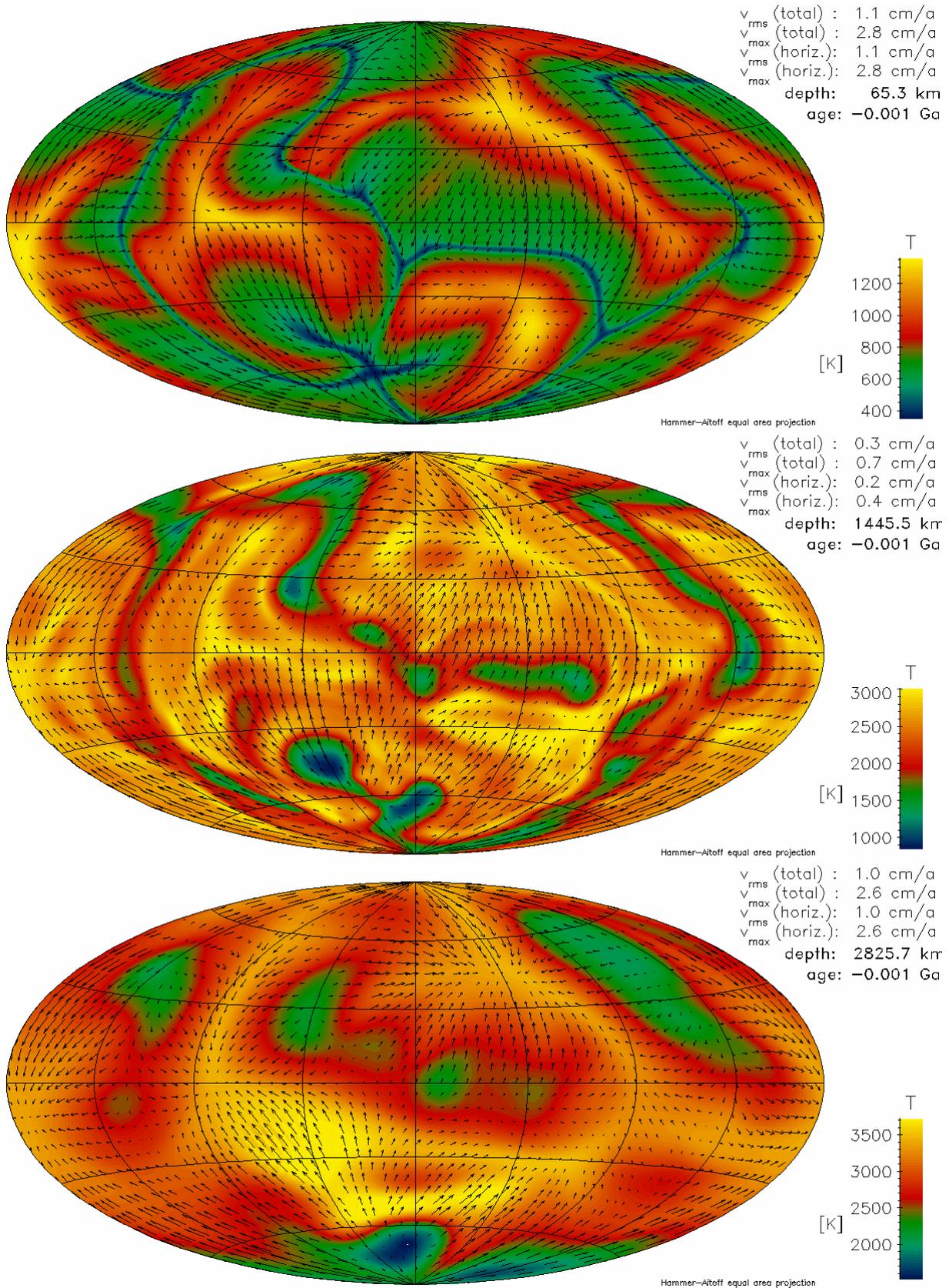


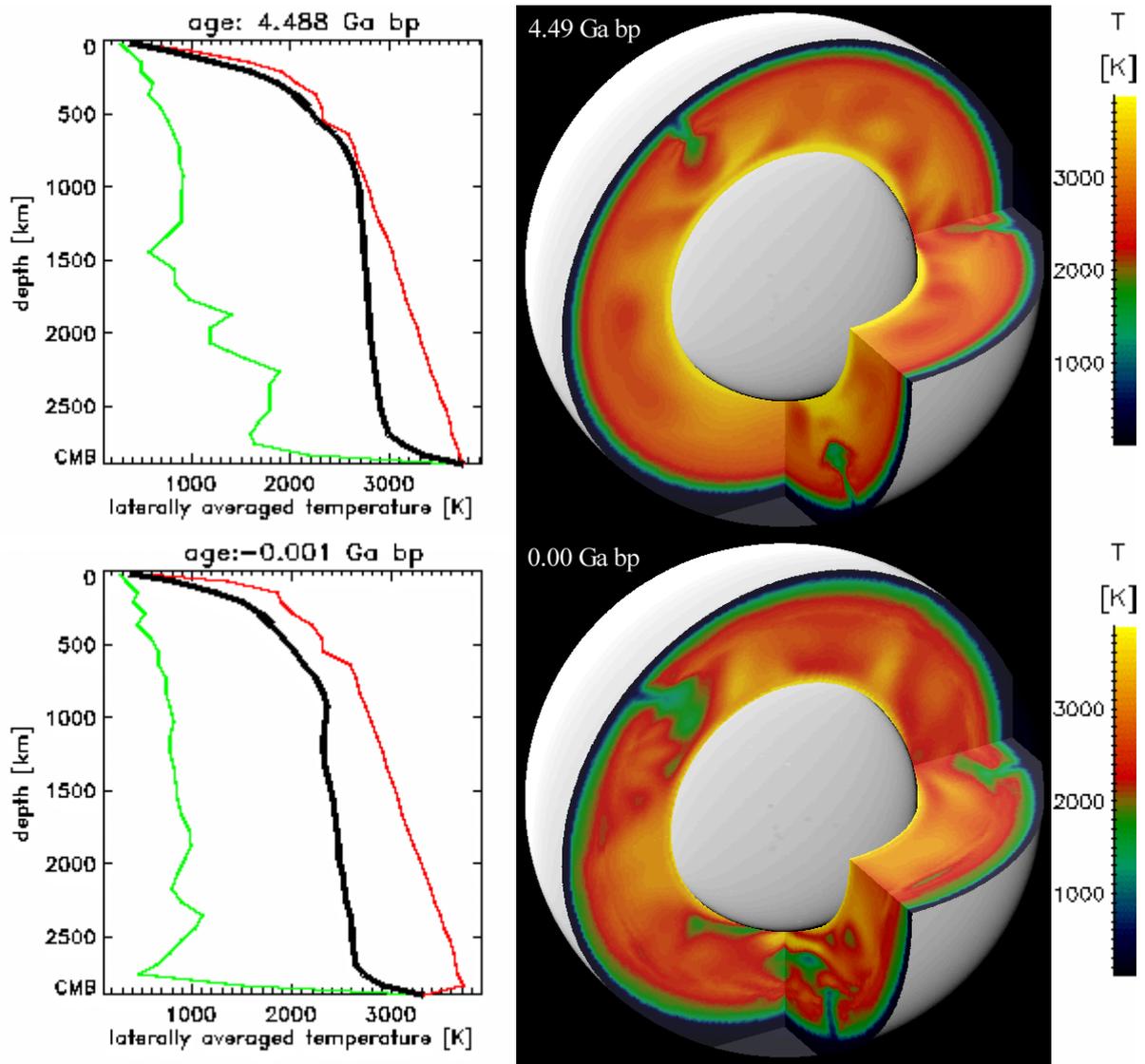
Abb. 5.19-72: Festere Abtauchzonen in der Asthenosphäre

### 5.19. Modell 662

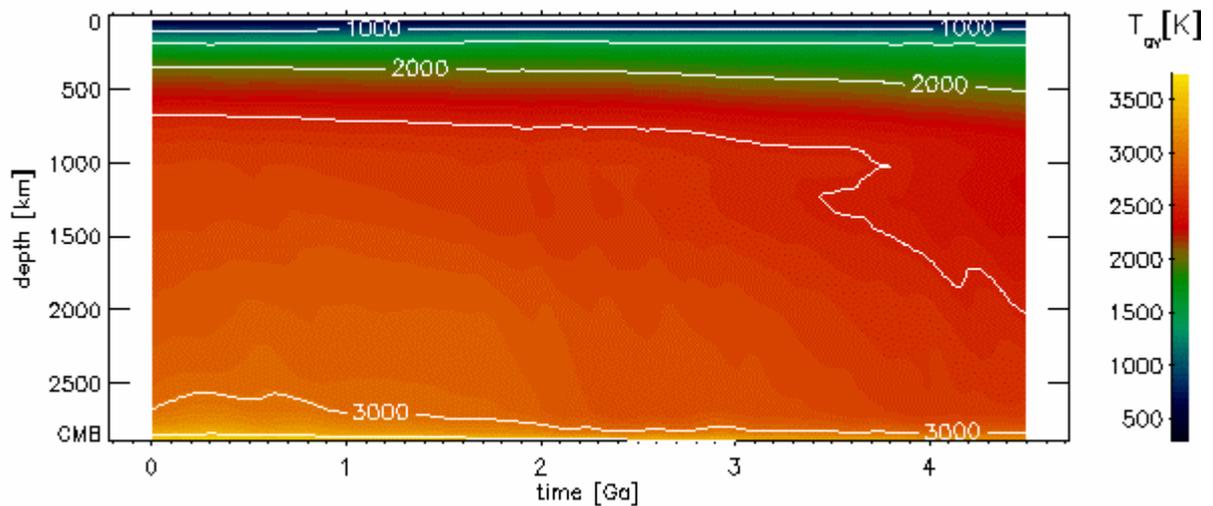


**Abb. 5.19-5:** Temperaturen und Strömungsgeschwindigkeiten in verschiedenen Manteltiefen

### 5.19. Modell 662

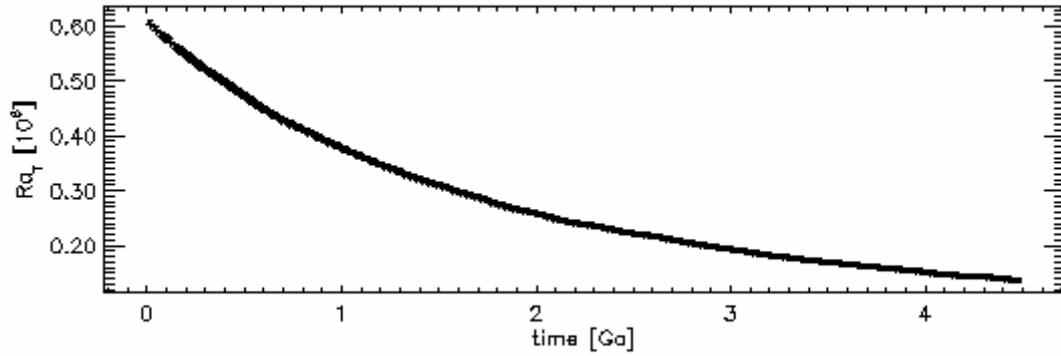


**Abb. 5.19-6:** Temperaturverteilung im Mantel am Anfang der Rechnung und heute

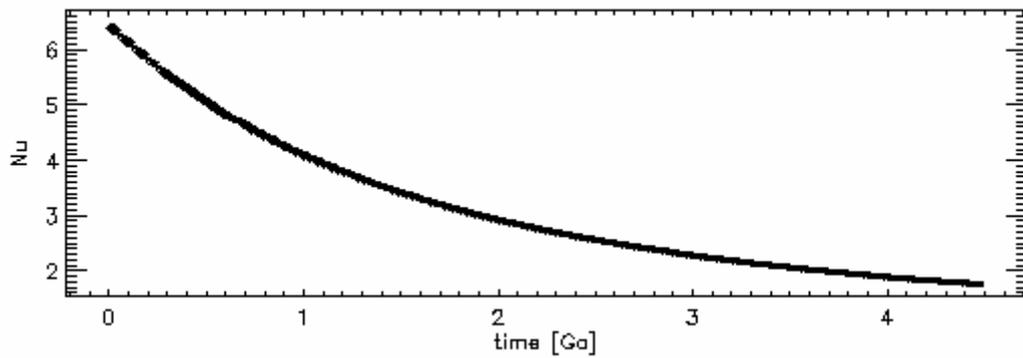


**Abb. 5.19-7:** Zeitliche Entwicklung des Temperaturprofils

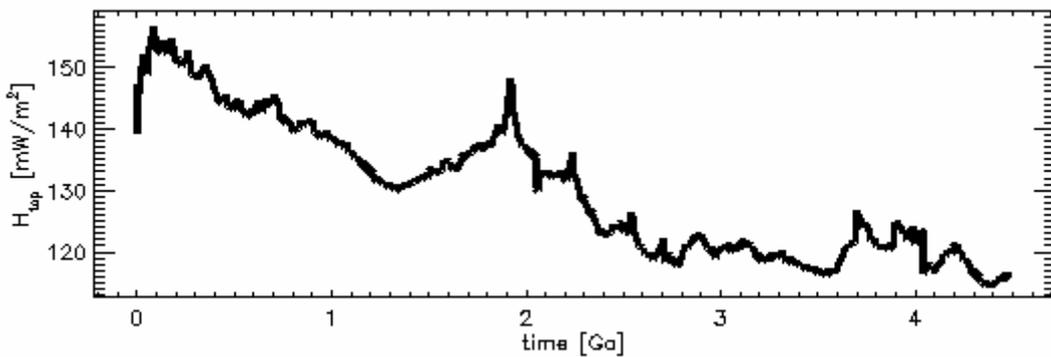
## 5.19. Modell 662



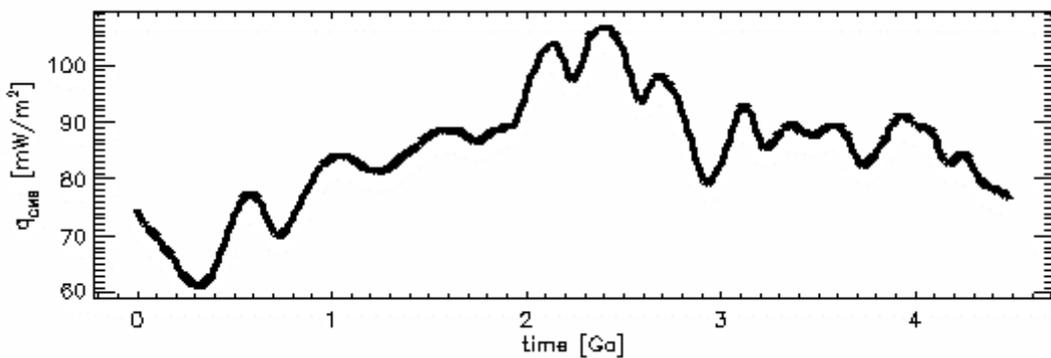
**Abb. 5.19-8:** Zeitliche Entwicklung der Rayleigh-Zahl



**Abb. 5.19-9:** Zeitliche Entwicklung der Nusselt-Zahl

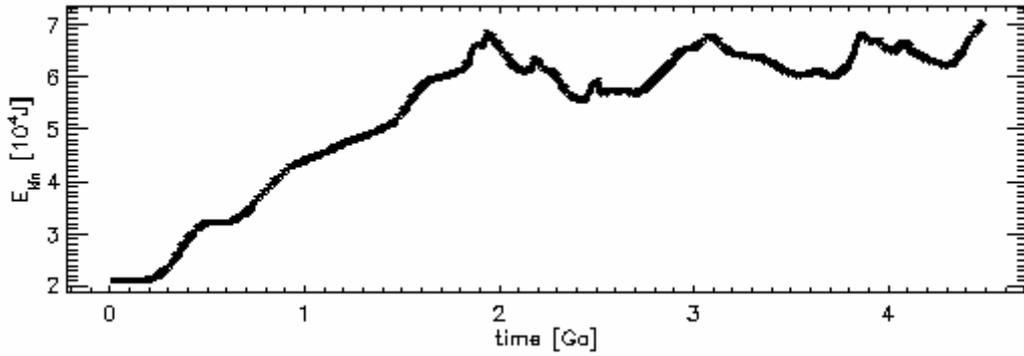


**Abb. 5.19-10:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Oberfläche

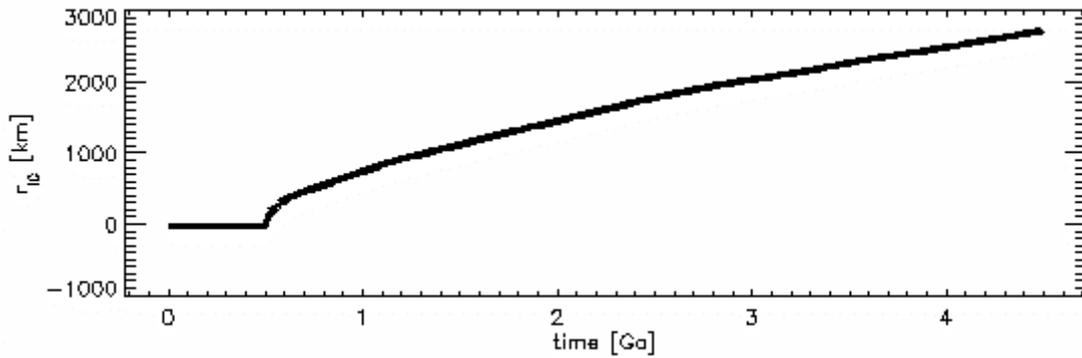


**Abb. 5.19-11:** Zeitliche Entwicklung des Wärmestroms an der Kern-Mantel-Grenze

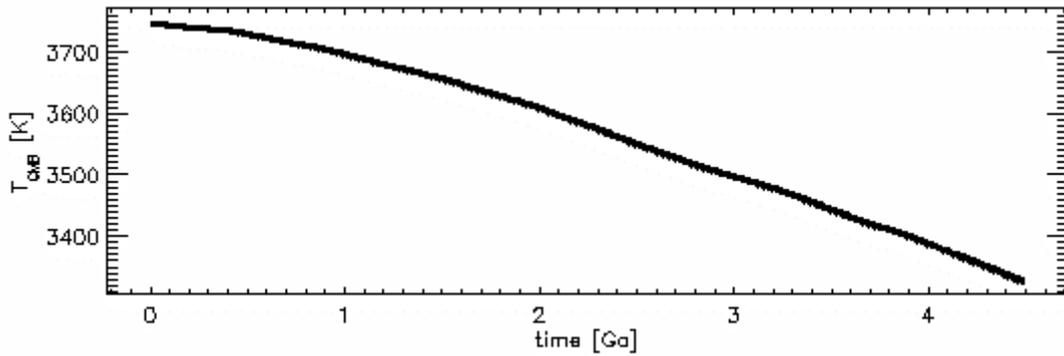
### 5.19. Modell 662



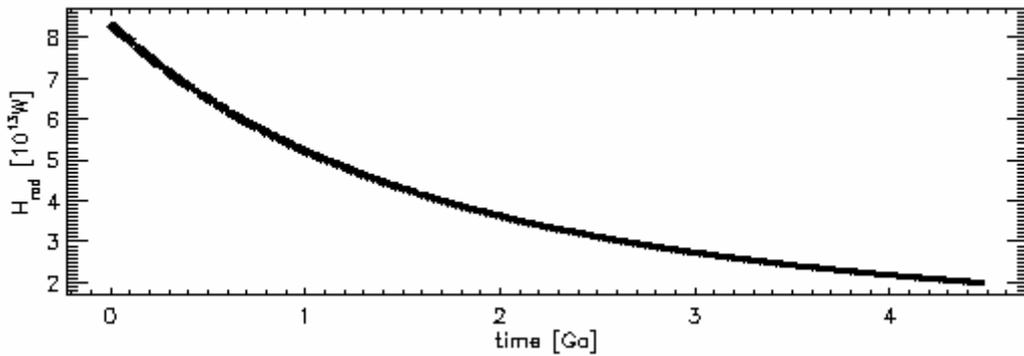
**Abb. 5.19-12:** Zeitliche Entwicklung der kinetischen Energie des gesamten Mantels.



**Abb. 5.19-13:** Zeitliche Entwicklung des Innenkernradius

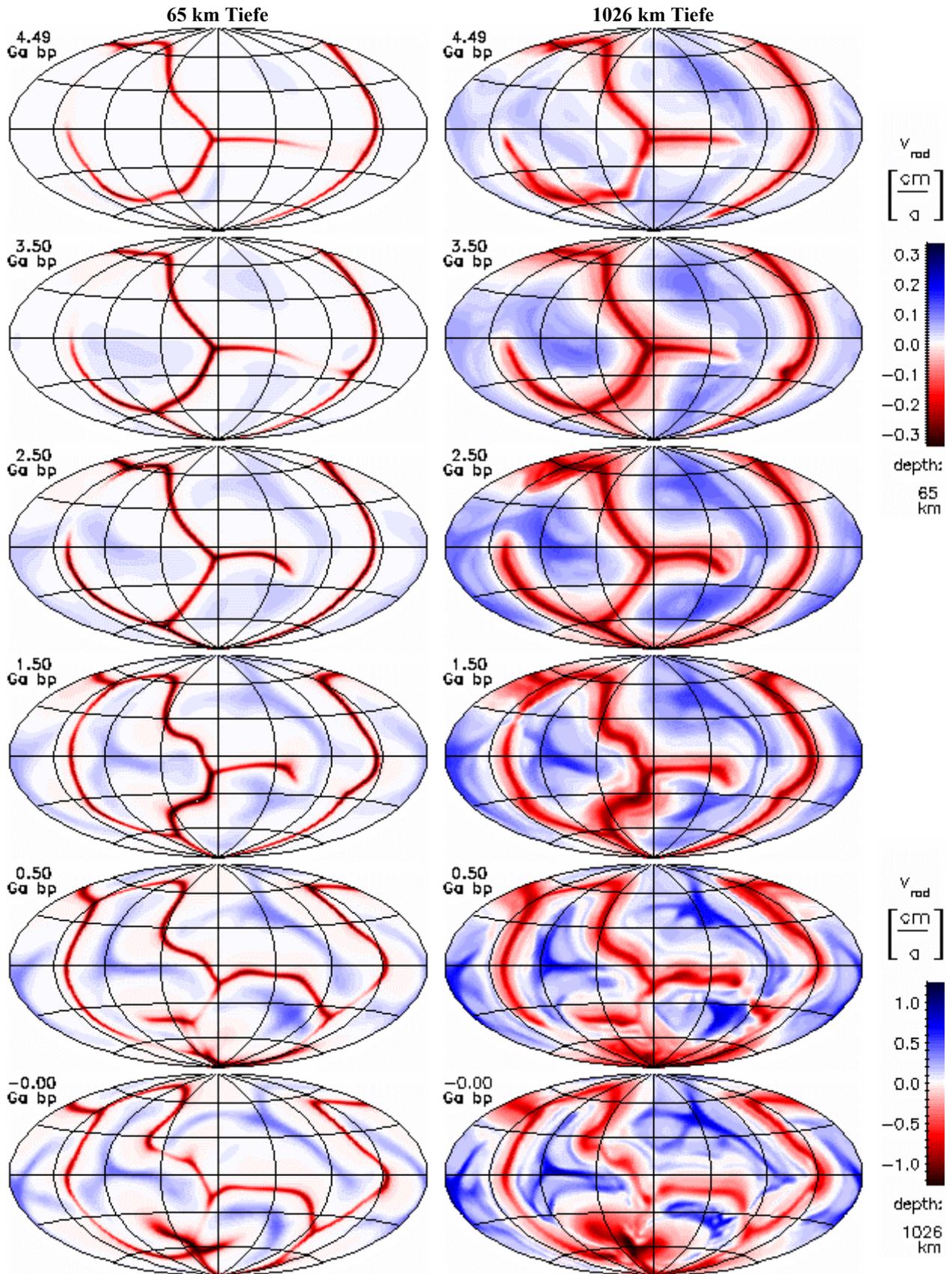


**Abb. 5.19-14:** Zeitliche Entwicklung der Temperatur an der CMB



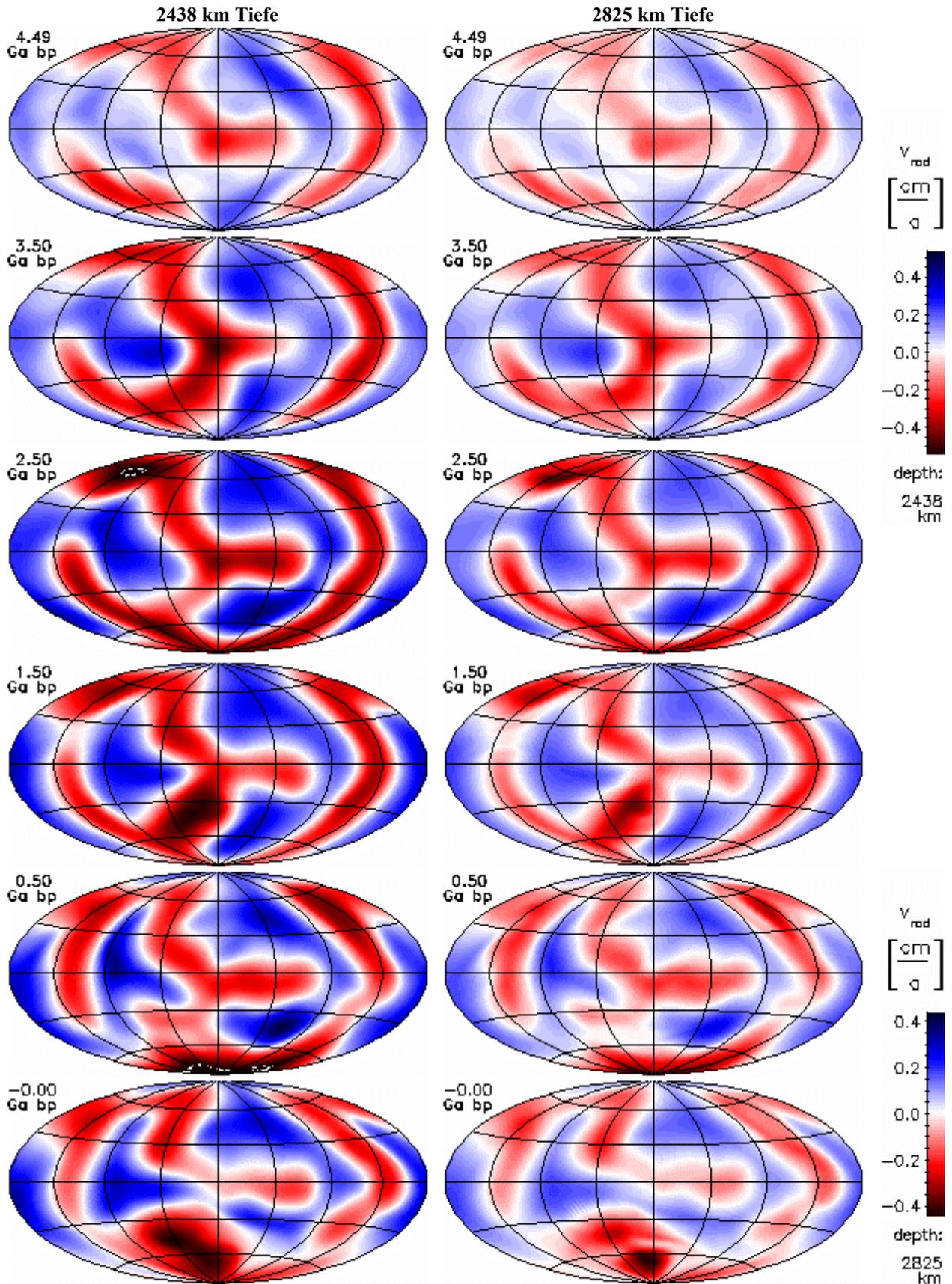
**Abb. 5.19-15:** Zeitliche Entwicklung der Heizleistung durch Zerfall von  $^{40}K$ ,  $^{42}Th$ ,  $^{235}U$  und  $^{238}U$  im Mantel

## 5.19. Modell 662



**Abb. 5.19-16:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente nahe der Oberfläche und im unteren Mantel. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind eventuell abgeschnitten.

## 5.19. Modell 662



**Abb. 5.19-17:** Zeitliche Entwicklung der radialen Geschwindigkeitskomponente im hochviskosen Teil des unteren Mantels und nahe der CMB. Aufströme haben positive Werte (blau). Alle Darstellungen sind flächentreue Projektionen der Kugelflächen nach Hammer-Aitoff. Extremwerte sind evtl. abgeschnitten.

## 5.19. Modell 662

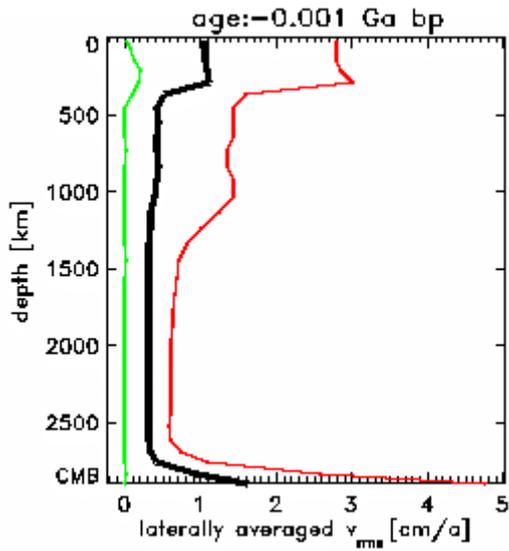


Abb. 5.19-18: Heutiges Geschwindigkeitsprofil

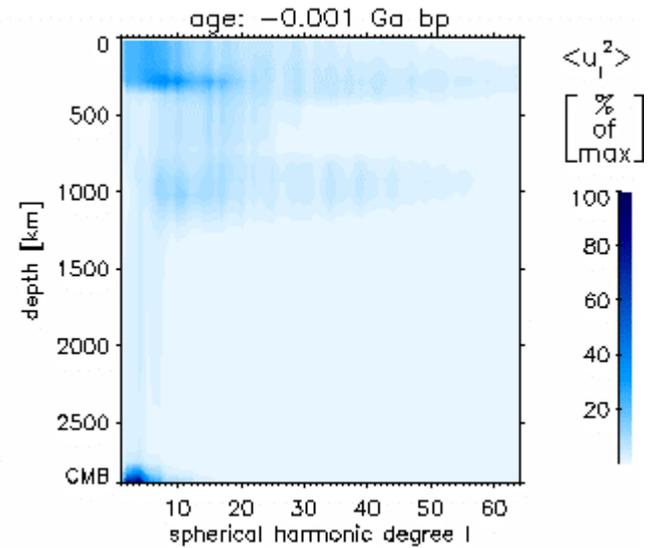


Abb. 5.19-19: Spektrum von toroidaler plus poloidaler kinetischer Energie

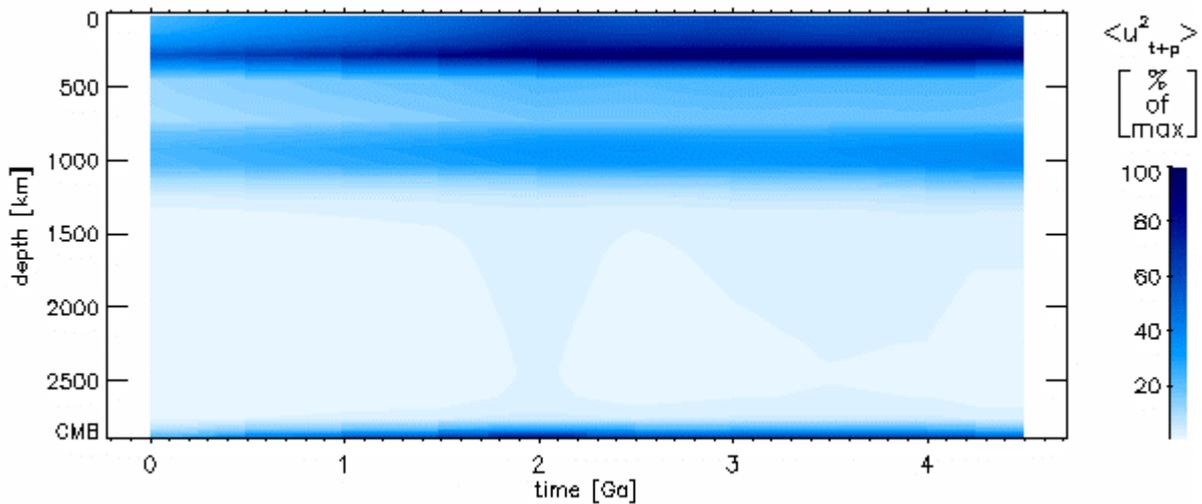


Abb. 5.19-20: Entwicklung der Tiefenverteilung der Summe von poloidaler und toroidaler Energie

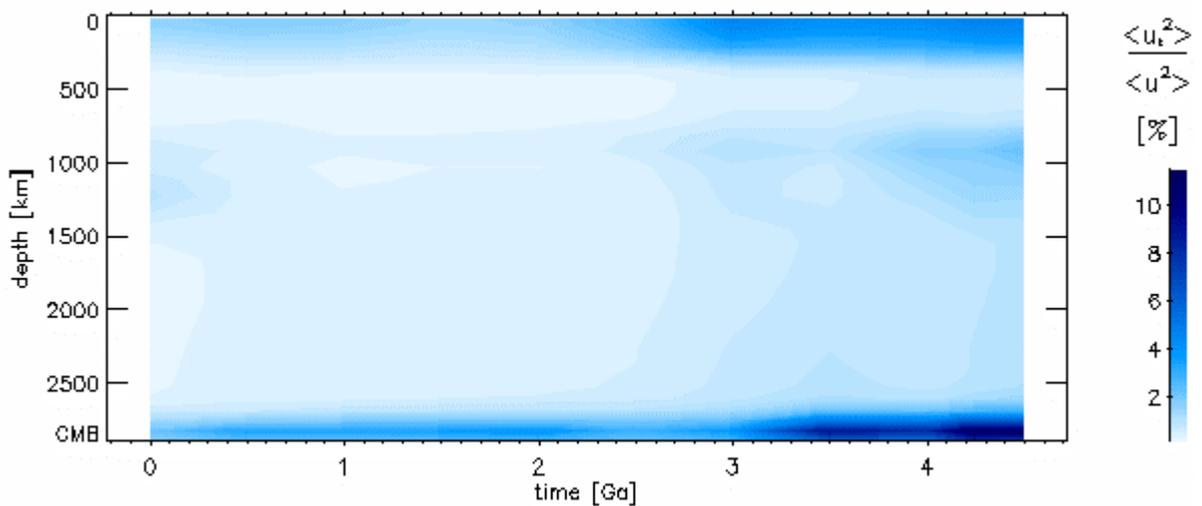


Abb. 5.19-21: Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung des toroidalen Anteils

5.19. Modell 662

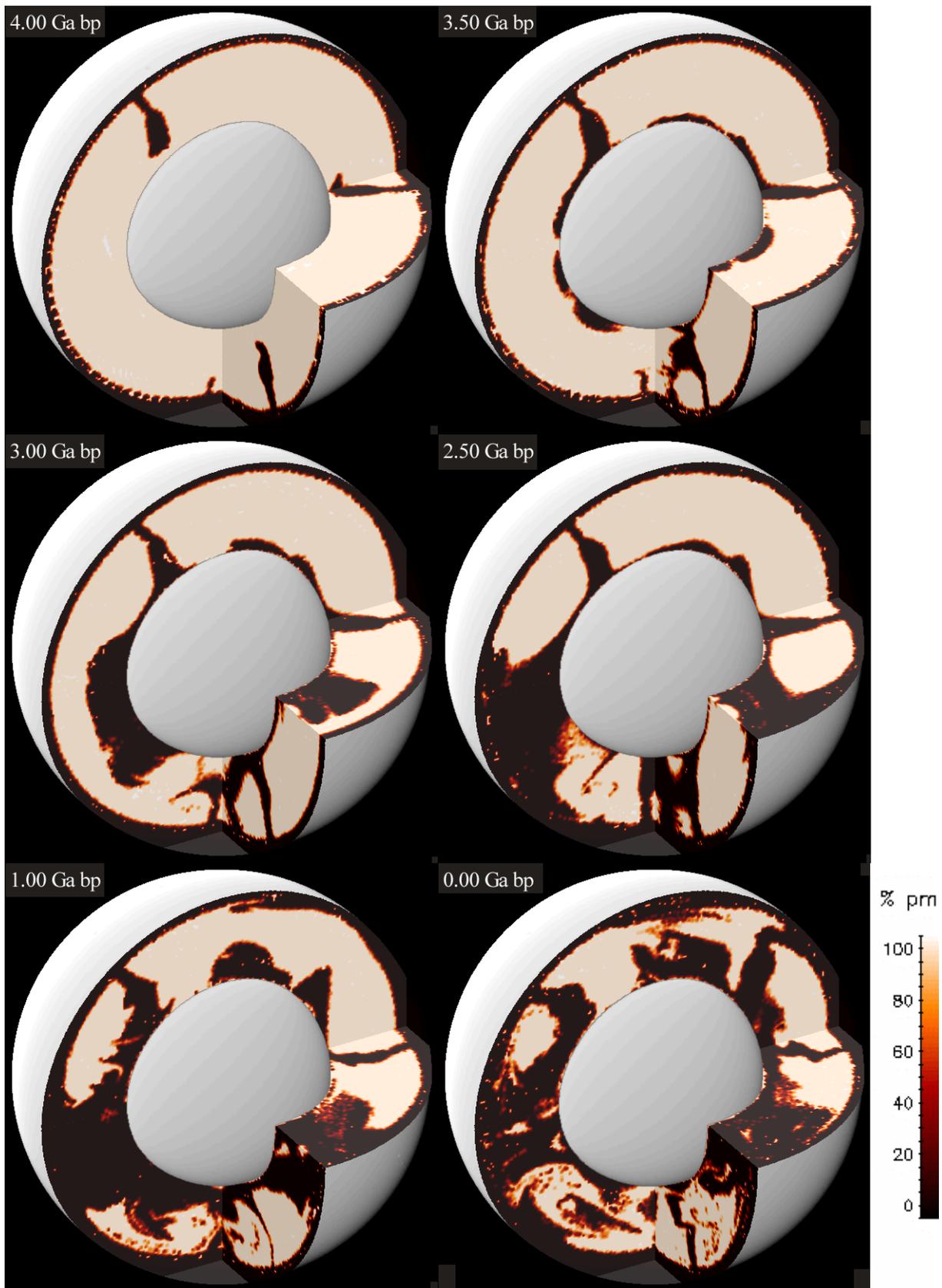
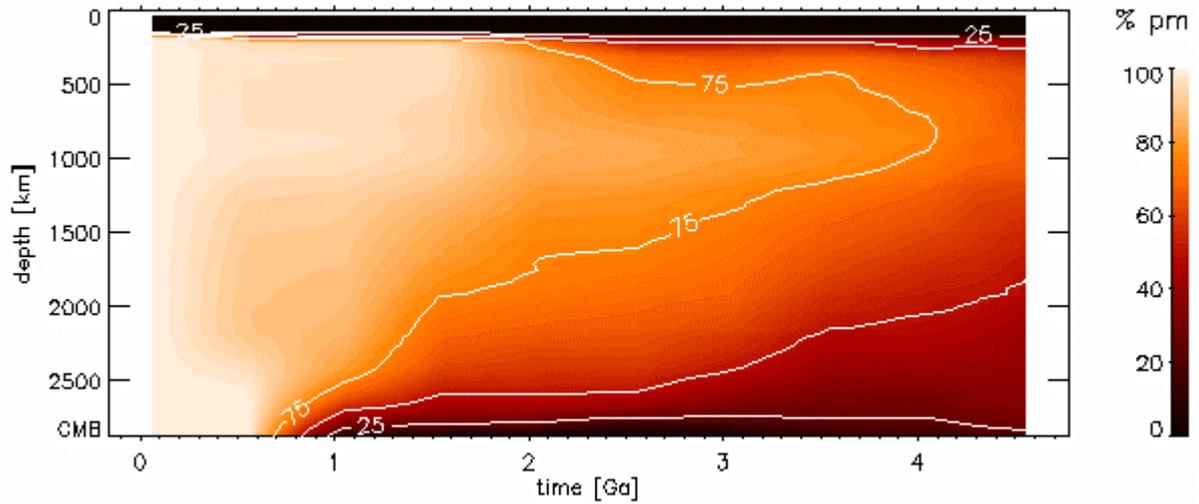
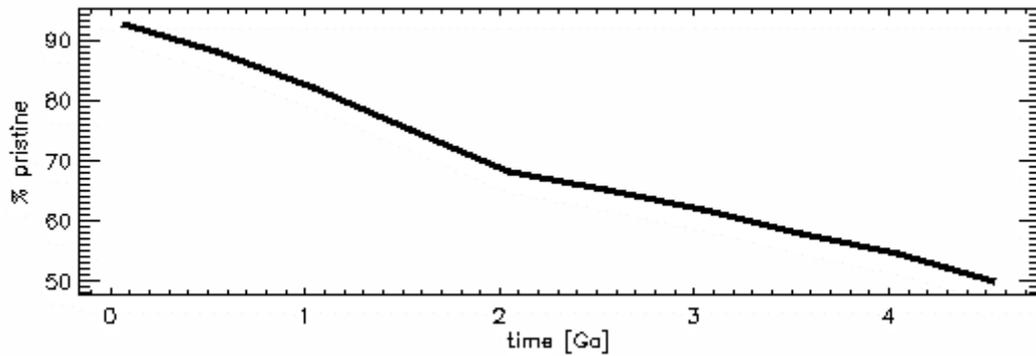


Abb. 5.19-22: Verteilung ursprünglichen Materials (pm) zu verschiedenen Zeiten

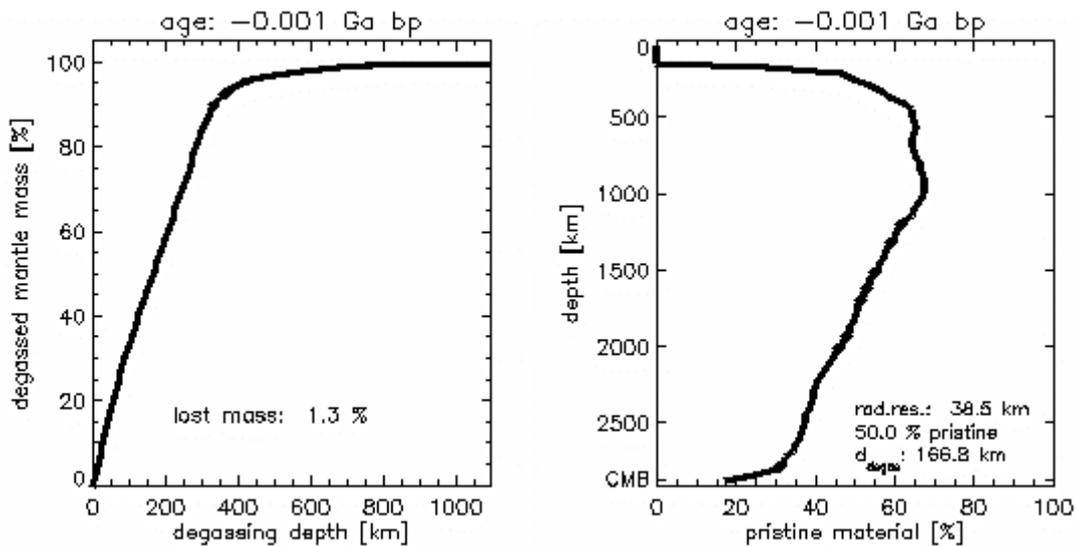
## 5.19. Modell 662



**Abb. 5.19-23:** Zeitliche Entwicklung der Tiefenverteilung ursprünglichen Materials



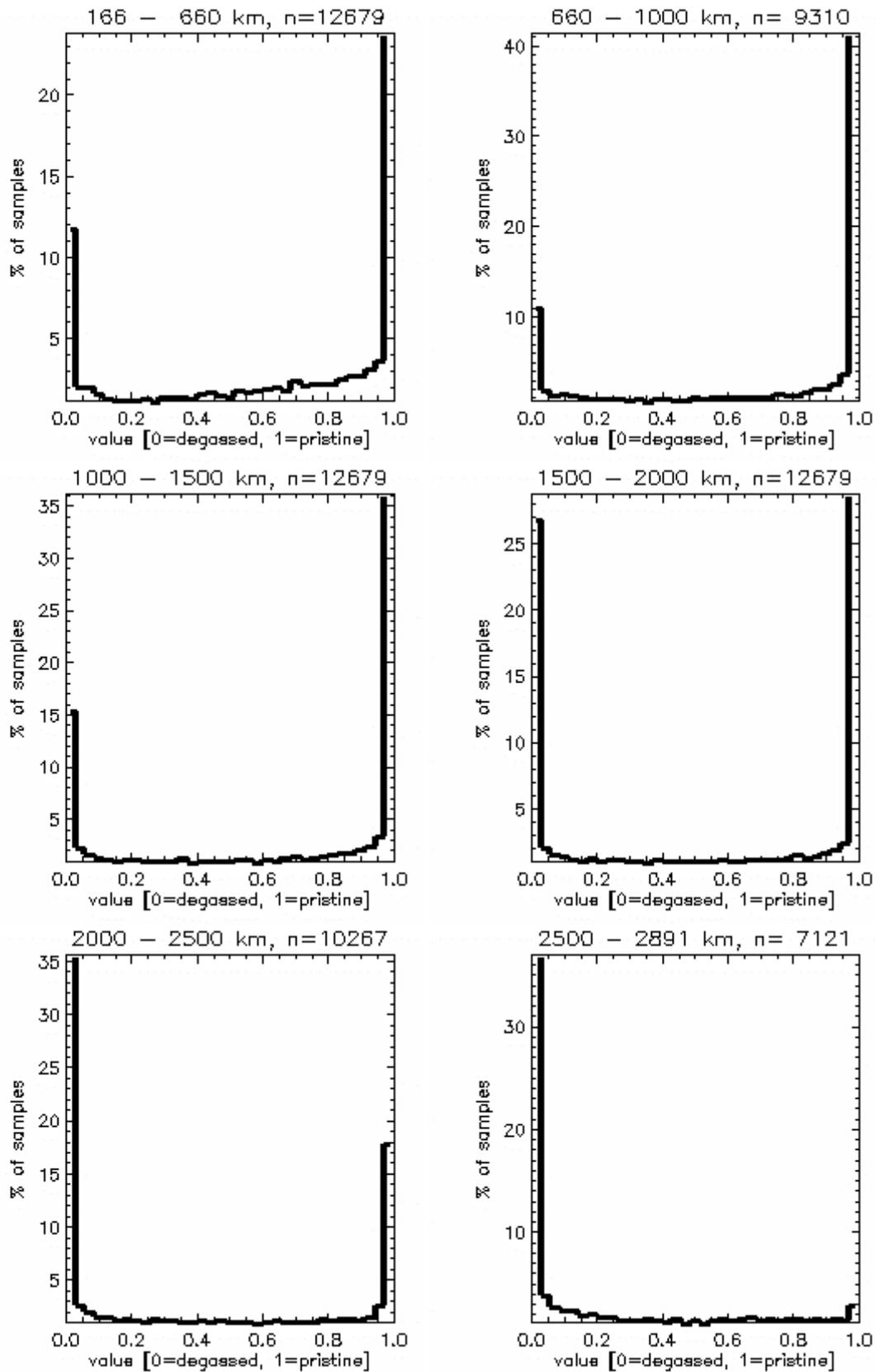
**Abb. 5.19-24:** Abnahme ursprünglichen Materials im Mantel



**Abb. 5.19-25:** Die Entgasungstiefe wird so festgelegt, dass am Ende der Rechnung 50 % des Mantels entgast sind

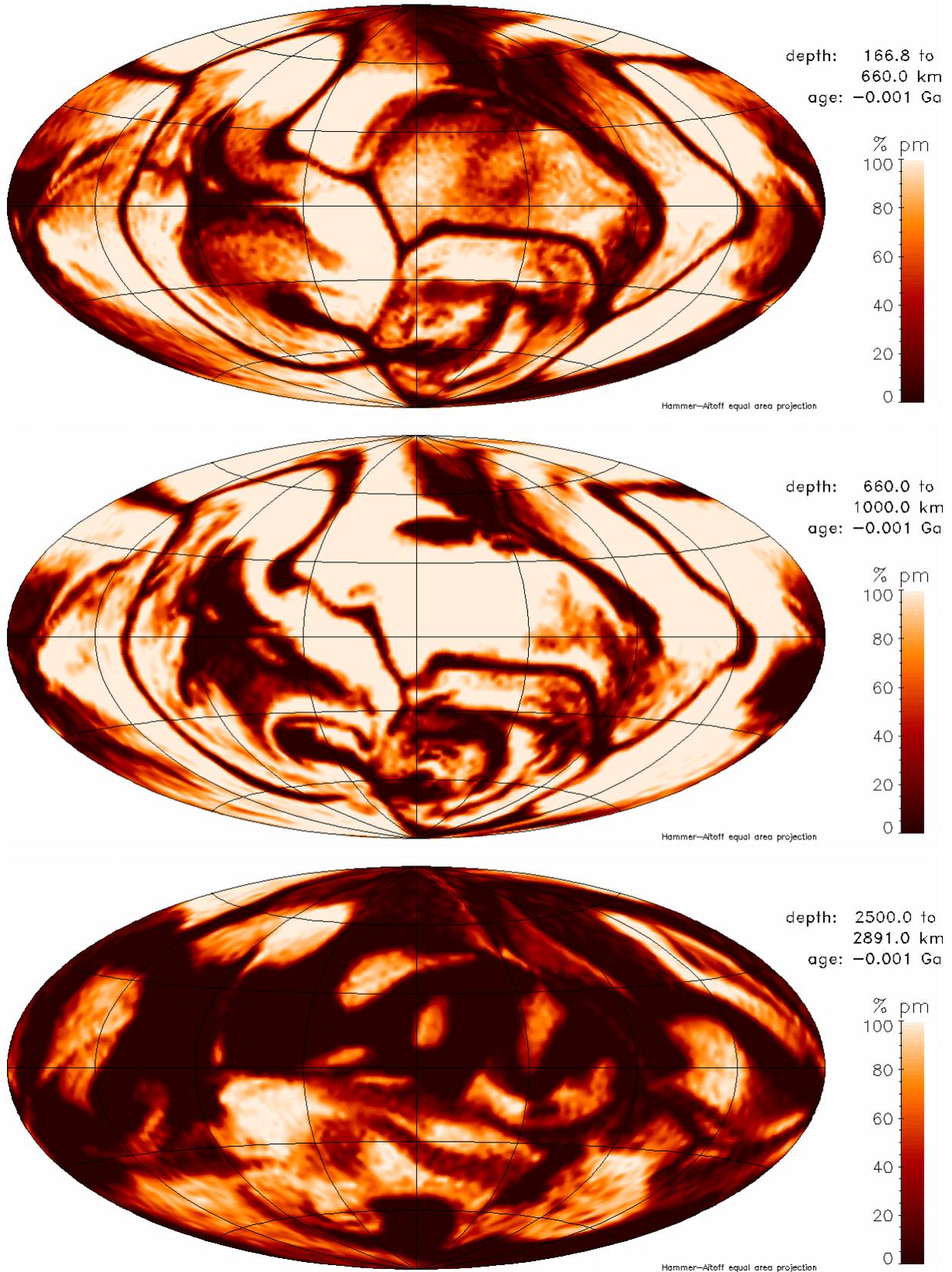
**Abb. 5.19-26:** Tiefenverteilung ursprünglichen Materials im heutigen Mantel

## 5.19. Modell 662



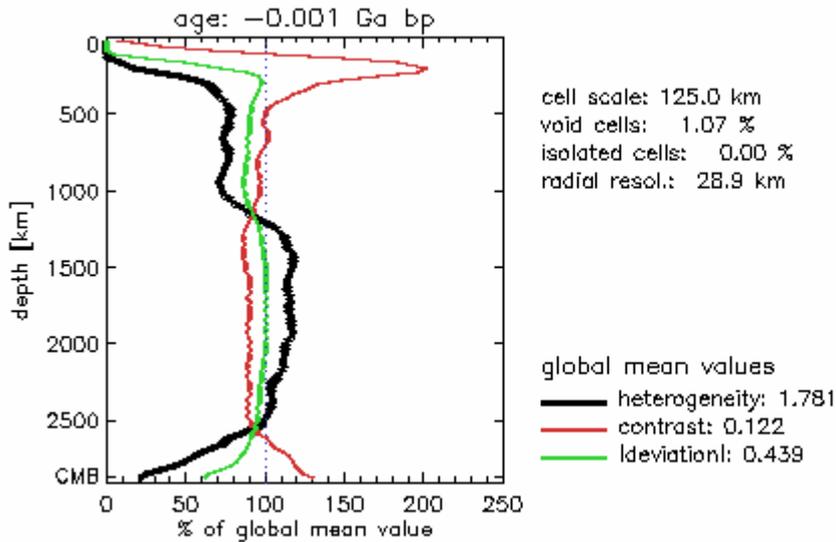
**Abb. 5.19-27:** Histogramme der Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Manteltiefen. Eine Probe repräsentiert den Mittelwert des gesamten radialen Intervalls. n ist die Anzahl der Unterteilungen der Kugelfläche in der jeweiligen Tiefe.

### 5.19. Modell 662

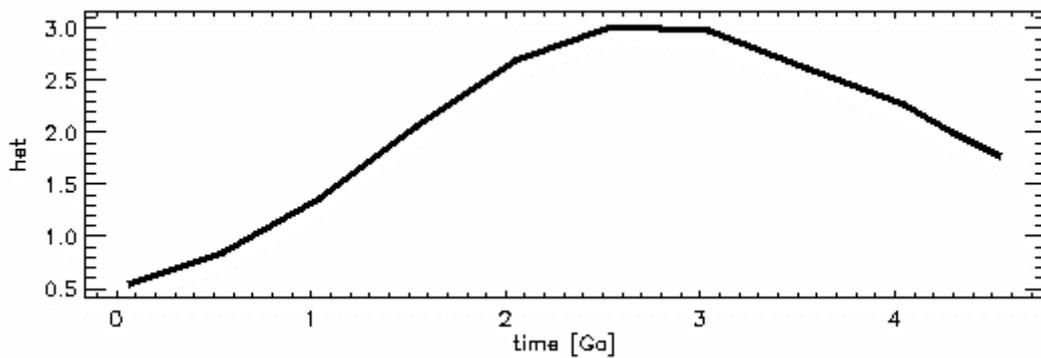


**Abb. 5.19-28:** Verteilung ursprünglichen Materials in verschiedenen Tiefenintervallen. Die laterale Auflösung entspricht der des jeweils passenden Histogramms in Abb. 5.19-27.

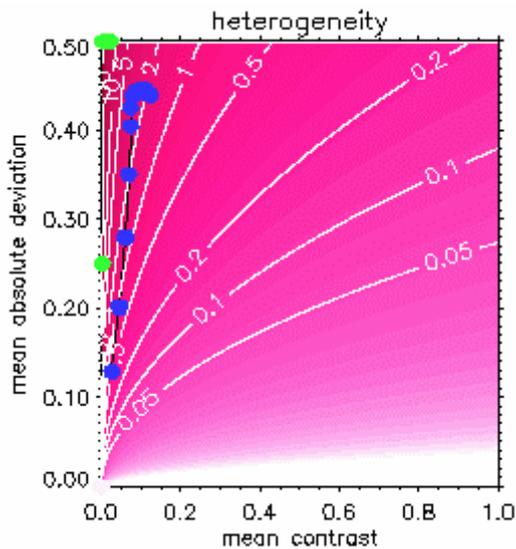
## 5.19. Modell 662



**Abb. 5.19-29:** Heutige Tiefenprofile der lateral gemittelten Werte von Heterogenität, Kontrast und mittlerer Absolutabweichung. Sie werden mit dem Mittelwert in der jeweiligen Kugelschale berechnet. Der globale Wert dient nur Skalierung der Abszisse.



**Abb. 5.19-30:** Zeitliche Entwicklung der Heterogenität



**Abb. 5.19-31:** Entwicklung der globalen Mittelwerte von Heterogenität, mittlerer Absolutabweichung und Kontrast.

Jeder blaue Punkt entspricht einem ausgewerteten Zeitschritt. Die schwarze Verbindungslinie folgt der zeitlichen Entwicklung. Der älteste Zeitschritt liegt näher am Koordinatenursprung als die jüngeren. Die grünen Punkte markieren die Lage der in Kapitel 4.2.3 vorgestellten Referenzmodelle. Die rötliche Farbkodierung mit Höhenlinien stellt den Wert der Heterogenität dar.

## 5.20. Auswertungen

### 5.20. Zusammenfassung der Auswertungen

Modell	$v_{rms}$ [cm/a]	$v_{max}$ [cm/a]	$E_{kin}$ [10 <sup>4</sup> J]	$p_{Earth}$ [%]	$tor/pol$ <i>sur</i>	$tor/pol$ <i>max</i>	$q_E$ [mW/m <sup>2</sup> ]	$q_{CMB}$ [mW/m <sup>2</sup> ]	$r_{IC}$ [km]		$Ra$	$D$	$K$	$B$
637	1,7	2,6	6,5	35,1	0,09	20,43	84	28,9	-	4	2,5e5	0,377	0,191	0,684
638	0,3	0,6	0,6	23,3	0,14	3,40	70	28,9	-	2	0,8e5	0,472	0,068	4,282
639	0,2	0,7	1,5	32,7	0,01	0,88	64	28,9	-	3,5	3,0e6	0,363	0,218	0,530
640	0,5	1,4	3,4	42,6	0,58	0,65	109	28,9	-	2,5	5,5e5	0,314	0,215	0,376
641	1,2	1,8	7,5	45,9	0,29	4,61	94	28,9	-	3,5	5,5e5	0,306	0,232	0,322
642	0,6	1,7	4,1	47,4	0,98	0,98	115	28,9	-	2,5	5,5e5	0,303	0,228	0,322
647	1,6	2,6	8,5	37,8	0,06	11,53	102	101	2683	1,8	3,5e5	0,359	0,195	0,592
648	1,7	2,9	8,5	39,4	0,05	11,72	105	111	2363	1,7	3,5e5	0,358	0,197	0,578
649	0,8	1,9	4,0	51,0	4,26	14,76	94	95	1781	1,6	1,3e5	0,359	0,203	0,565
651	0,9	2,0	5,6	53,0	4,25	16,39	105	85	2228	1,7	1,3e5	0,359	0,207	0,551
652	1,4	2,5	7,0	35,0	0,05	10,35	92	28,9	-	3,8	7,0e5	0,356	0,199	0,565
653	0,6	2,2	4,2	52,7	4,51	43,32	93	28,9	3480	2,2	1,3e5	0,338	0,218	0,446
656	0,8	1,7	4,7	50,7	4,43	7,03	98	28,9	3480	2,2	1,3e5	0,362	0,207	0,559
657	0,8	2,4	4,2	56,0	4,88	6,51	98	80	2463	1,7	1,3e5	0,401	0,166	0,965
659	0,7	2,1	4,0	48,7	4,11	24,58	108	103	2511	1,7	1,3e5	0,331	0,220	0,415
660	0,4	1,5	2,1	71,6	1,74	11,64	76	46	620	4,5	1,1e5	0,451	0,098	2,506
661	0,6	1,4	4,4	70,4	2,04	21,28	95	48	1675	3,3	5,5e5	0,456	0,090	2,842
662	1,1	2,8	7,0	54,5	4,93	12,49	116	77	2741	1,8	1,5e5	0,439	0,122	1,781

**Tab. 5.20-I:** Zusammenstellung von Modellergebnissen. Alle Werte beziehen sich auf die Jetztzeit. Die beiden Geschwindigkeiten sind für die Oberfläche ermittelt worden. *tor/pol* bezeichnet das Verhältnis von toroidaler zu poloidaler Energie an der Oberfläche bzw. den größten, in irgend einer Tiefe auftretenden Wert.  $D$  und  $K$  sind die global gemittelten Werte.

In Kapitel 6 werden Zusammenhänge einzelner Größen diskutiert.

### **6. Diskussion und Schlussfolgerungen**

An den Anfang gestellt sei die ernüchternde Erkenntnis, dass die in dieser Arbeit vorgestellten Konvektionsmodelle für detaillierte Vergleiche mit realen Beobachtungen noch nicht erdähnlich genug sind. Insbesondere sind die an der Oberfläche auftretenden Geschwindigkeiten niedriger als beobachtet. Die Plattigkeit der Oberfläche und die dort auftretenden toroidalen Bewegungen sind zu klein. Aus der geodynamischen Literatur sind zur Zeit allerdings auch noch keine wesentlich besseren Evolutionsmodelle in realistischer Geometrie bekannt. Einfache kinematische Modelle, z.B. das von Ferrachat & Ricard (1998), stellen für die Untersuchung einzelner Aspekte des Mischungsverhaltens in der Erde eine Alternative zu den hier vorgestellten Modellen dar. Das gilt auch für Modelle, die als Antrieb die heutigen Plattengeschwindigkeiten oder das Temperaturfeld des Mantels nutzen (van Keken & Zhong, 1999; Stegman et al., 2002). Es ist allerdings absehbar, dass 3D sphärische Evolutionsmodelle mittelfristig durch die Zunahme der zur Verfügung stehenden Rechenleistung an Bedeutung gewinnen werden. Sie sind die physikalisch sauberste Methode zur Vereinigung von Plattentektonik, Mantelkonvektion und chemischer Evolution der silikatischen Erde. Im Folgenden wird postuliert, dass die Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit der Konvektion im Erdmantel eventuell eine notwendige Voraussetzung für die gemeinsame Erklärung wesentlicher geophysikalischer und geochemischer Beobachtungen ist. Ein geometrischer Effekt von 3D sphärischen Modellen könnte zusätzlich entscheidend sein.

### **6.1. Einfluss einzelner Modelleigenschaften**

Soweit es im Rahmen der wenigen Parametervariationen<sup>1)</sup> möglich ist, werden im Folgenden schlaglichtartig einzelne Zusammenhänge aufgezeigt. Dabei ist aber immer zu beachten, dass es sich um nichtlineare dynamische Systeme handelt. Andere Modelle könnten sich gegenüber ähnlichen Parametervariationen anders verhalten.

#### **6.1.1. Rheologie**

Das rheologische Modell hat im hier variierten Rahmen (vgl. 5.) den größten Einfluss auf die Ergebnisse, insbesondere auf das Geschwindigkeitsfeld. Mit dem Profil  $\eta_1$  werden die höchsten und damit erdähnlichsten Strömungsgeschwindigkeiten erzielt. Diese sind aber immer noch um den Faktor 2 bis 3 kleiner als beobachtet. Andere rheologische Modelle haben andere Strömungsmuster zur Folge<sup>2)</sup>.

Viskositätsniveau: Die Viskositätsprofile  $\eta_5(r)$  (Abb. 5.1-13) und  $\eta_6(r)$  (Abb. 5.1-14) unterscheiden sich hinsichtlich der radialen Verteilung hoch- und niedrigviskoser Zonen nur graduell.  $\eta_5(r)$  hat aber ein durchschnittlich niedrigeres Viskositätsniveau als  $\eta_6(r)$ . Da ich noch keine Modelle mit einer systematischen Verschiebung des gleichen Profils gerechnet habe, wird vorerst  $\eta_5(r)$  als für einen heißeren frühen Mantel repräsentativ angesehen.  $\eta_6(r)$  ist für den heutigen Mantel optimiert. Zwischen den Modellen, die mit diesen beiden Profilen gerechnet wurden, ergeben sich fundamentale Unterschiede im Mischungsverhalten. Das ist ein wesentliches Ergebnis dieser Arbeit und wird in 6.2 diskutiert.

---

<sup>1)</sup> Eigentlich war eine Diskussion umfassenderer Parametervariationen geplant. Die Modelle mit fehlerhafter Implementierung der Phasengrenzen wurden aber verworfen und konnten aufgrund der begrenzten Rechenkapazitäten nicht alle wiederholt werden.

<sup>2)</sup> Deshalb wird hier auch nicht versucht, die Modelle mit einer anderen Zeitskalierung einfach länger laufen zu lassen, um die zu niedrigen Geschwindigkeiten zu kompensieren.

## 6.1. Einfluss einzelner Modelleigenschaften

Zweite Asthenosphäre: Die Modelle 652 und 637 unterscheiden sich in ihren Viskositätsprofilen und dem anfänglichen Temperaturprofil. Am Anfang bewirkt das Starttemperaturprofil von Modell 637, dass sich Material in der Mitte des Mantels ausbreitet (vgl. Modelle 649 und 651, Abschnitt 6.1.5). Nach 2 bis 3 Ga, wenn die anfängliche Temperaturverteilung keine Rolle mehr spielt, kann sich das zur CMB gesunkene Material dann in 637 wieder besser nach oben ausbreiten. Die Entfernung der zweiten Asthenosphäre ( $\eta_3$ ) in Modell 637 wirkt sich primär auf die radiale Verteilung der kinetischen Energie aus. In Modell 652 sind die Strömungen ober- und unterhalb der tiefen weichen Schicht mehr entkoppelt. Das Strömungsmuster an der Oberfläche ist dadurch in Modell 652 zu kurzwelligeren Strukturen verschoben. Dem könnte zugrunde liegen, dass es ein bevorzugtes Höhe-zu-Breite-Verhältnis von Konvektionszellen gibt. Die (unvollständige) Entkopplung an der zweiten Asthenosphäre wirkt sich dann wie eine Höhenreduzierung aus, da die Zellen nicht mehr ‚starr‘ von unten bis oben durchgehen.

Die Heterogenität nimmt in Modell 637 im mittleren Mantel stetig zu, während es in Modell 652 unterhalb der weichen Schicht eine sprunghafte Zunahme gibt. Ein ähnlicher Effekt kann in der radialen Verteilung entgasten Materials beobachtet werden. Die Unterschiede zwischen den Gebieten ober- und unterhalb der zweiten Asthenosphäre sind größer als bei monotonem Viskositätsprofil.

Das Modell 638 mit Profil  $\eta_2$  entwickelt nur viel zu niedrige Strömungsgeschwindigkeiten. Material von der Erdoberfläche erreicht in 4,49 Ga gerade die CMB und die Heterogenität ist entsprechend hoch. Zur Beurteilung des Mischungsverhaltens im Erdmantel ist dieses Modell nicht relevant.

Bei konstantem Viskositätsprofil (Modell 639) bilden sich kleinskalige, zylindrische Abströme aus. Der Mantel zeigt kaum Unterschiede in der Heterogenität. Von der Oberfläche kommendes Material breitet sich aber auch in diesem Modell erst an der CMB aus, bevor es wieder aufsteigt. Durch diesen geometrischen Effekt ist der Anteil entgasten Materials an der CMB höher als im übrigen Mantel.

Laterale Viskositätsunterschiede: Die Modelle 640, 641 und 642 sollen die Effekte beim Einführen einer viskoplastischen Fließspannung in Zusammenhang mit einer steiferen Lithosphäre verdeutlichen. In Modell 641 ( $\eta_4$ ) wurde die Viskosität an der Oberfläche nur unwesentlich gegenüber ( $\eta_1$ ) erhöht. Dadurch konnte die Plattigkeit gegenüber Modell 652 bei ähnlichen Strömungsgeschwindigkeiten erhöht werden, aber das allgemeine Strömungsmuster bleibt ähnlich großskalig. Weiterhin gibt es zylindrische Aufströme, auf der Erde sind divergente Plattengrenzen aber linear. Die Modelle 640 und 642 unterscheiden sich nur hinsichtlich der Fließgrenze. Die höhere Fließgrenze in Modell 640 bewirkt kleinräumige, schlecht verbundene Aufweichungen nahe der Oberfläche. In Modell 642 sind die weichen Zonen der Oberfläche besser in linienartigen Strukturen lokalisiert. Die Konvektionszellen sind aber nicht mehr so ortsfest wie in Modell 641. Hinsichtlich der Vermischung verhalten sich die Modelle 640 und 642 ähnlich, aber anders als Modell 641. Die globalen Kenngrößen der Heterogenität sind übrigens in den drei Modellen aufgrund gegenläufiger Einflüsse fast gleich, Unterschiede werden erst in den radialen Profilen deutlich.

Es ist festzuhalten, dass Modelle mit weicher Rheologie und ohne Lithosphäre ( $\eta_1$ ) ein ähnliches Mischungsverhalten zeigen wie Modelle mit steifer Rheologie plus Lithosphäre ( $\eta_6$ ). Erst die Kombination von weicher Mantelrheologie und Lithosphäre ( $\eta_5$ ) führt zum kleinskaligen Mischungsregime.

Die Modelle 657 und 659 verwenden das realistischste Viskositätsprofil dieser Arbeit ( $\eta_6$ ) und unterscheiden sich nur hinsichtlich der zugelassen lateralen Temperaturabhängigkeit der Viskosität. Geschwindigkeiten und Plattigkeit sind bei beiden Modellen ähnlich. Das Modell mit der höheren Temperaturabhängigkeit (659) zeigt etwas höhere Wärmeströme an CMB und Oberfläche und größere toroidale Anteile nahe der CMB. Letzteres wirkt sich auf das

## 6.1. Einfluss einzelner Modelleigenschaften

Mischungsverhalten aus. In Modell 659 ist das entgaste Material nach 4,49 Ga gleichförmiger im Mantel verteilt als in Modell 657. Besonders interessant ist aber, dass das Verhältnis der Heterogenitäten ober- und unterhalb der zweiten Asthenosphäre bei beiden Modellen trotzdem ähnlich ist. Das ist ein weiteres Indiz für die entkoppelnde Wirkung der zweiten Asthenosphäre und für eine Schichtung des Mischungsverhaltens im Mantel.

Bei Betrachtung aller Geschwindigkeitsfelder fällt noch auf, dass Modelle mit steifer Lithosphäre und viskoplastischer Fließspannung zwar zu plattentektonischen Strömungsmustern an der Oberfläche neigen, aber niedrigere Geschwindigkeiten entwickeln. Bei Modellen ohne viskoplastische Fließspannung sind die toroidalen Anteile an der Oberfläche verschwindend und die Konvektionszellen sind sehr ortsfest. In plattentektonischen Modellen reagiert die Lage von Auf- und Abstiegsszonen empfindlich auf kleine Modelländerungen und ist stark zeitabhängig.

### 6.1.2. Schmelztemperatur und Vulkanismus

Das Vulkanismusmodul bewirkt die schnelle Abgabe von Wärme, welche die Temperatur über den Schmelzpunkt steigen lassen würde. Damit werden unrealistische Temperaturspitzen verhindert und die thermische Entwicklung physikalisch sinnvoller wiedergegeben. Die beiden Modelle 653 und 656 unterscheiden sich neben dem Vulkanismusmodul auch noch in den verwendeten Schmelzpunktkurven. Die unrealistisch hohen Schmelztemperaturen im unteren Mantel wirken sich in 653 lediglich auf die laterale Temperaturabhängigkeit der Viskosität aus (vgl. Gl. 3.1-13). Die höheren toroidalen Anteile nahe der CMB in Modell 653 werden darauf zurückgeführt. Das Fehlen hoher Temperaturspitzen in 656 dürfte dagegen dem Vulkanismusmodul zu verdanken sein. Ansonsten unterscheiden sich beide Modelle kaum. Sobald  $T_{m2}$  oder  $T_{m3}$  verwendet werden, kann auch  $c_t$  erhöht werden. Das wurde ab Modell 659 ausgenutzt, hier gibt es aber noch Möglichkeiten für weitere Verbesserungen. Da die Gitterstruktur bevorzugt an der Oberfläche numerische Instabilitäten begünstigt, wird für künftige Modelle eine radiale Abhängigkeit von  $c_t$  angeregt, aber auf höherem Niveau als in  $c_{t1}$ .

### 6.1.3. Randbedingung an der CMB

Die Randbedingung CMB1 ist physikalisch falsch und sollte deshalb nicht mehr angewendet werden. Im Vergleich der Modelle 647 (CMB3) und 652 (CMB1) zeigt sich allerdings nur ein geringer Einfluss dieser Randbedingung auf die Konvektion im Mantel, obwohl bei beiden Modellen auch noch die Anfangsbedingungen verschieden sind.

Die Modelle 647 und 648 unterscheiden sich nur hinsichtlich der Konzentration von  $^{40}\text{K}$  im Kern. Außer etwas erhöhten Wärmeströmen an CMB und Oberfläche ist der Einfluss auf die Konvektion im Mantel aber vernachlässigbar. Die Innenkernradien am Ende der Rechnung unterscheiden sich aber deutlich, ebenso die berechneten Alter des Innenkerns. Es wird aber als Erfolg angesehen, dass es trotz der vielen Unsicherheiten in der Parameterwahl gelungen ist, einen Innen- und Außenkern zu erhalten. Der Einfluss des ausfrierenden Innenkerns zeigt sich in einer Verlangsamung der Temperaturabnahme an der CMB.

Die Modelle 656 und 657 dienen dem Vergleich von CMB2 und CMB3. Die Vorgabe eines konstanten Wärmestromes bei 656 führt bei den angenommenen Kernparametern zu einem vollkommen ausgefrorenen Kern, weil die Manteltemperatur an der CMB zu schnell sinkt. Diese Unterschiede in der thermischen Grenzschicht führen zu unterschiedlichen Geschwindigkeitsfeldern mit unterschiedlichem Vermischungsverhalten. Modell 656 ist am Ende besser durchmischt als 657 und die radiale Verteilung der Heterogenität ist auch unterschiedlich. Vermutlich wirkt der größere Temperaturgradient an der CMB stabilisierend auf das Strömungsmuster, was sich in Zusammenhang mit der empfindlichen Lithosphärenrheologie im Gegensatz zu 647 und 648 global auswirkt. Da CMB3 die physikalisch sinnvollste Randbedingung ist, wird ausschließlich ihre Nutzung empfohlen.

## 6.1. Einfluss einzelner Modelleigenschaften

Wie aus Abb. 3.5-1 und 3.5-2 ersichtlich, hängt der Innenkernradius empfindlich von  $T_{CMB}$  ab, besonders am Anfang. Deshalb ist es schwierig, am Ende einer Modellrechnung genau den relativ kleinen, heutigen Innenkernradius zu treffen. In den hier vorgestellten Modellen ist er meist zu groß.

### 6.1.4. Wärmeleitfähigkeit

In Modell 660 wurde die Wärmeleitfähigkeit des Mantels auf den von Hofmeister (1999) vorgeschlagenen Wert reduziert. Durch die geringe Wärmeleitfähigkeit gibt es im kalten, abtauchenden Material trotz langsamer Strömungsgeschwindigkeiten unrealistisch tiefe Temperaturen. Gegenüber dem ansonsten identischen Lauf 659 traten auch numerische Instabilitäten auf. Trotzdem wird 660 hier mit angegeben, weil er einige interessante Aspekte hat. So bildet sich ein langwelliges Strömungsmuster mit zwei Aufströmen und einer dazwischen liegenden, erdumspannenden Subduktionszone aus. Von der Oberfläche kommendes Material sinkt bis zur CMB und breitet sich als globale Front nach oben aus. Die Histogramme zeigen nahezu keine Vermischung zwischen entgastem und ursprünglichen Material in kleinen Maßstäben.

Ein ähnlicher Effekt ist beim Vergleich von Modell 661 mit 662 zu beobachten. Beide unterscheiden sich nur in der Wärmeleitfähigkeit. Das Modell mit der höheren Wärmeleitfähigkeit (662) entwickelt höhere Strömungsgeschwindigkeiten und ist am Ende besser durchmischt.

Die beiden Modelle mit reduzierter Wärmeleitfähigkeit zeigen aber die größte Ähnlichkeit zur Erde hinsichtlich der Plattigkeit an der Oberfläche. Da die Wärmeleitfähigkeit offenbar einen entscheidenden Einfluss auf die Ergebnisse der Rechnungen hat, sollte in zukünftigen Rechnungen wenigstens deren Abhängigkeit von der Tiefe berücksichtigt werden (z.B. Hofmeister, 1999).

### 6.1.5. Anfangsbedingung

Modell 651 startet vom Temperaturprofil nach Stacey (1992), Modell 649 nach anf2. Beide Modelle zeigen in den integralen Größen am Ende kaum Unterschiede. Die zeitliche Entwicklung ist allerdings deutlich verschieden. Modell 649 beginnt langsamer zu strömen und der Wärmetransport ist am Anfang nicht so effektiv. Bei Modell 649 ist der Wärmestrom an der CMB am Ende höher, weil der Kern noch mehr Wärme abgeben kann. Der Wärmestrom an der Oberfläche ist dagegen niedriger als in 651, weil die meiste Wärme des Kerns noch nicht bis zur Oberfläche transportiert worden ist. Im Mischungsverhalten zeigen sich auch Unterschiede. Bei Modell 649 wird von oben kommendes Material stärker am Eindringen in die hochviskose Schicht unterhalb der zweiten Asthenosphäre gehindert und breitet sich im mittleren Mantel aus. Nach dem Verschwinden der stabilen Anfangstemperaturschichtung bewegt es sich in Richtung CMB und häuft sich dort an. In Modell 651 bilden sich von Anfang an Konvektionszellen über den gesamten Mantel aus. Dadurch häuft sich auch von oben kommendes Material über der CMB an. Die Abströme werden nur durch die starke Viskositätszunahme unterhalb 1000 km Tiefe behindert. Am Ende ist die Tiefenverteilung entgasten Materials in beiden Modellen ähnlich.

Durch das Verlegen der Einlaufphase der Modelle vor den Beginn der eigentlichen Rechnung konnten eine anfängliche Temperaturzunahme und die niedrigen Anfangsgeschwindigkeiten weitgehend vermieden werden (Modell 662). Modell 662 hat auch am Ende eine höhere kinetische Energie als das vergleichbare Modell 659. Dabei hat 659 sogar eine etwas stärkere Kernheizung und die Viskosität hängt mehr von der Temperatur ab.

## 6.2. Schlussfolgerungen für die chemische Evolution der Erde

### 6.2.1. Diskussion des Mischungsverhaltens der Modelle

Trotz der anfangs erwähnten Einschränkungen erlauben die erdähnlichsten der vorgestellten Modelle einige vorsichtige Schlussfolgerungen für das Mischungsverhalten der Konvektion im Erdmantel. Alle Modelle setzen newtonsche Rheologie voraus. Eine Ausnahme bilden lediglich Zonen starker Scherung nahe der Oberfläche. Die Annahme newtonscher Rheologie ist für den unteren Mantel gerechtfertigt (Karato & Li, 1992; Li et al., 1996) und nach Karato & Wu (1993) auch für den tiefen unteren Mantel. Man kann davon ausgehen, dass die Rheologie im unteren Mantel besser modelliert wird als nahe der Oberfläche: Die Ergebnisse für den Mantel unter der Asthenosphäre sind am besten auf die Erde übertragbar.

In Abb. 6.2-1 sind noch einmal die hier aufgetretenen Typen der Ausbreitung von der Oberfläche kommenden Materials dargestellt. Die zugehörigen Verteilungen der Heterogenität im jeweiligen heutigen Modellmantel werden in Abb. 6.2-2 zusammengefasst.

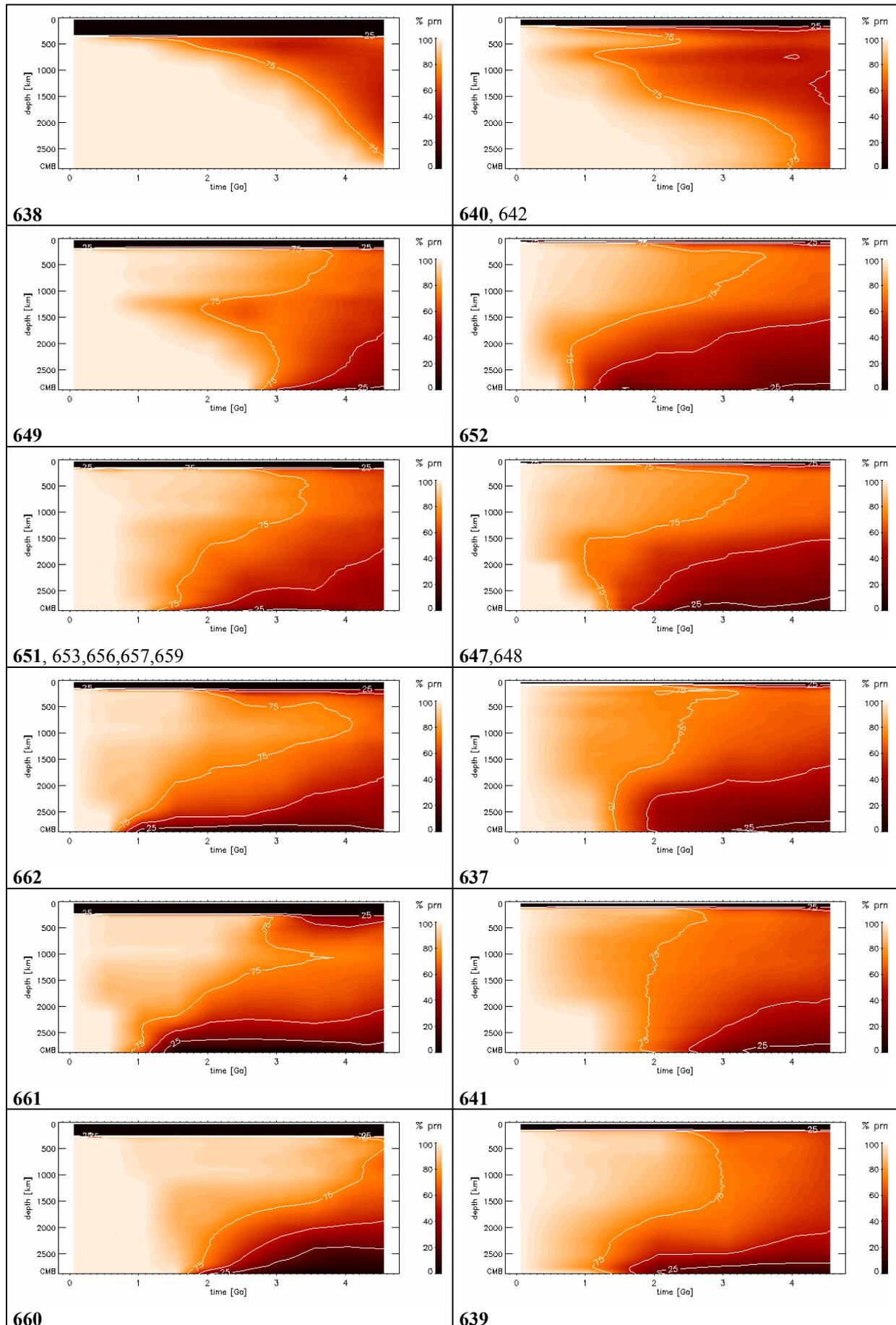
Modell 638 ist ein für die Erde nicht relevanter Extremfall. Das entgaste Material breitet sich ohne kleinräumige Vermischung mit der Umgebung langsam nach unten aus. Die Heterogenität ist über die gesamte Manteltiefe groß und fast gleich. Nur die CMB ist noch ursprünglich homogen, weil nach 4,49 Ga erst wenig entgastetes Material unten angekommen ist.

Bei 640 und 642 bilden sich nahe der Oberfläche sehr kleinräumige Strömungen aus, die nur geringe Heterogenitäten zulassen. Der gut vermischte Bereich breitet sich langsam nach unten aus und erreicht nach 4,49 Ga gerade stellenweise die CMB. Dieses Verhalten ähnelt den Ergebnissen von Walzer & Hendel (1999a), widerspricht aber Beobachtungen der seismischen Tomographie für den heutigen Mantel (vgl. 2.1.3). Die während der gesamten Evolution erhalten bleibende Schichtung im oberen Mantel spricht für ein teilweise eigenständiges Konvektionssystem. Besonders am Anfang (0 bis 1 Ga) ist die Behinderung der Abströme an der Phasengrenze in 660 km Tiefe deutlich am höheren Anteil entgasteten Materials erkennbar. Der helle Bereich oberhalb 500 km Tiefe wird durch ursprüngliches Material im Inneren der Konvektionszellen verursacht. Wenn das entgaste Material nach etwa 1,5 Ga bis an die Tiefe erhöhter Viskosität vorgedrungen ist, wird es wieder behindert. Nach 4,49 Ga wird erst etwa die Hälfte der CMB-Fläche von den gut durchmischten Abströmen berührt. Die Heterogenität in heutigen Modellmantel nimmt entsprechend dem Anteil ursprünglichen Materials mit der Tiefe zu.

Das Modell mit konstantem Viskositätsprofil (639) zeigt erwartungsgemäß keine radiale Schichtung des Mischungsverhaltens. Entgastes Material sinkt in zylinderförmigen Abströmen mit pilzförmigen Köpfen bis zur CMB. Die vergleichsweise kleinen, pilzförmigen Spitzen der Abströme zeigen ein geringes Zerfließen an und sprechen für geringe Behinderungen. Auf der CMB liegen die Umkehrpunkte dieser langgestreckten Konvektionszellen. Das entgaste Material breitet sich kurz lateral aus und steigt dann wieder auf. Dadurch ist die Konzentration entgasteten Materials über der CMB besonders hoch und die Heterogenität gering. Gleiches gilt für die Gebiete nahe der Oberfläche, wo die oberen Umkehrpunkte der Konvektionszellen liegen.

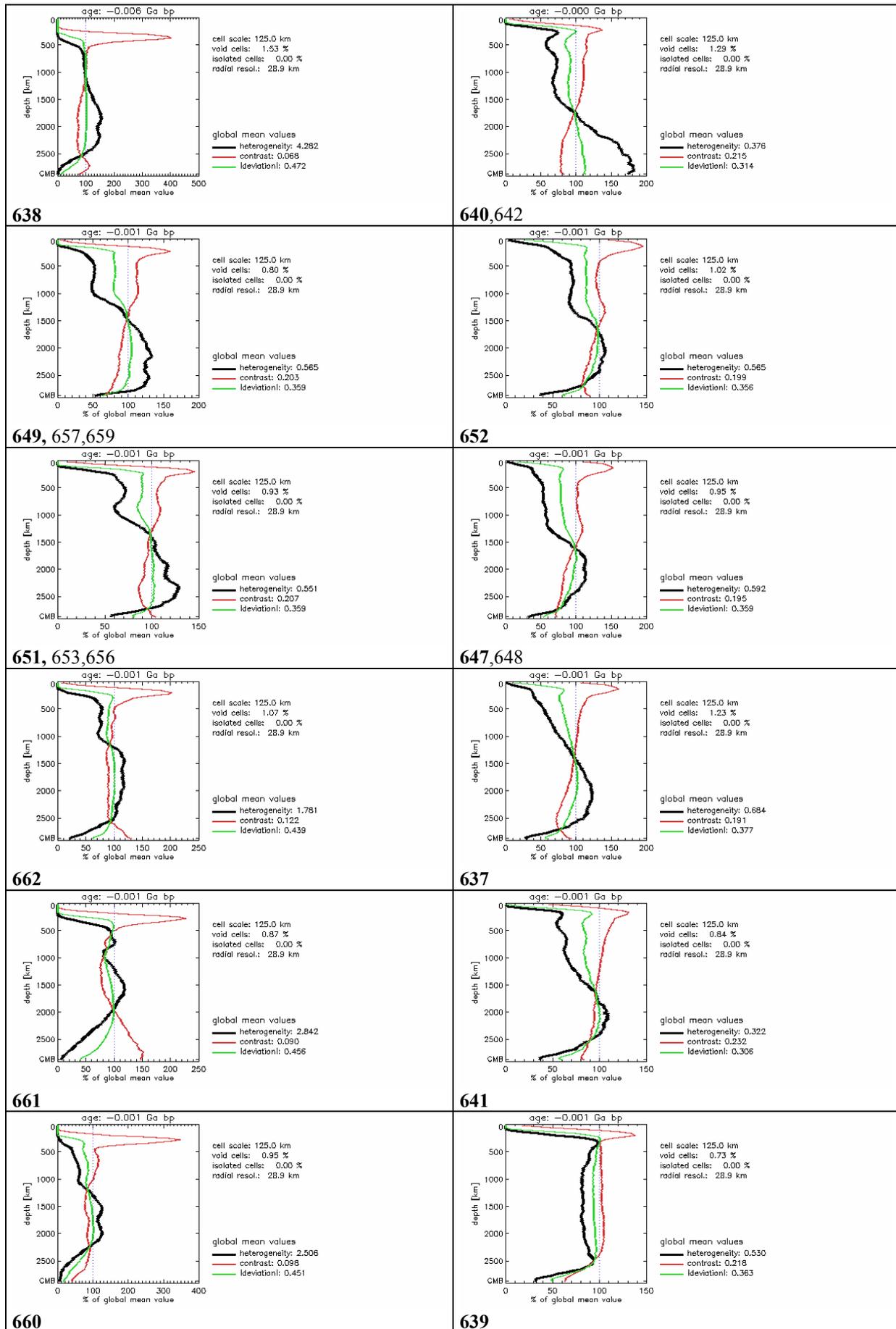
In Modell 649 dringen die Abströme am Anfang weitgehend ungehindert bis zur hochviskosen Schicht im unteren Mantel vor und zerfließen dort. Offenbar wirkt hier die stabile Temperaturschichtung vom Anfang als zusätzliches Hemmnis. Entgastes Material erreicht erst nach etwa 2,5 Ga die CMB. Modell 651 unterscheidet sich von 649 nur durch ein anderes Startprofil der Temperatur. Hier reicht die Viskositätszunahme unterhalb 1000 km allein nicht aus, um Abströme aufzuhalten. Diese dringen bis zur niedrigviskosen Schicht oberhalb der CMB vor und breiten sich dort flächendeckend aus. Die Aufströme aus der fast vollständig entgasteten untersten Mantelschicht dringen wieder in die hochviskose Schicht ein. Dort erlauben die niedrigeren Strömungsgeschwindigkeiten nur eine ungenügende

## 6.2. Schlussfolgerungen für die chemische Evolution der Erde



**Abb. 6.2-1:** Übersicht der aufgetretenen Fälle der Evolution der Tiefenverteilung entgasteter Materialien. Ähnliche Fälle wurden nur ein mal dargestellt, die Nummer des abgebildeten Falles ist fett gedruckt

## 6.2. Schlussfolgerungen für die chemische Evolution der Erde



**Abb. 6.2-2:** Übersicht der aufgetretenen Fälle der Evolution der Tiefenverteilung der Heterogenität. Ähnliche Fälle wurden nur ein mal dargestellt, die Nummer des abgebildeten Falles ist fett gedruckt

## 6.2. Schlussfolgerungen für die chemische Evolution der Erde

ausschließlich entgastes Material gibt. Am Ende der Rechnung, wenn die Anfangsbedingung nicht mehr nachwirkt, verhält sich auch 649 wie eben für 651 beschrieben.

Je nach Strömungsgeschwindigkeiten und anfänglichen Behinderungen gibt es graduelle Übergänge zwischen 649 und 651. Das betrifft die Modelle 641, 647, 648, 652, 653, 656, 657 und 659. Alle zeigen aber, in Gegenwart von Ganzmantelkonvektion, am Ende einen homogenen Bereich entgasten Materials über der CMB, eine heterogene hochviskose Schicht und eine homogenere obere Mantelhälfte.

In Modell 637 nimmt die Heterogenität vom Maximalwert in 2200 km Tiefe stetig nach oben ab. Vermutlich ermöglicht erst die zweite Asthenosphäre eine ausgeprägte Entkopplung von gut und schlecht durchmischenden Mantelbereichen. Diese fehlt aber bei 637.

Trotz Plattentektonik ist die Verteilung von Aufstiegs- und Abstiegsszonen in Modell 662 besonders ortsfest und erstreckt sich über den gesamten Mantel. Die Entkopplung zwischen hochviskoser Schicht und zweiter Asthenosphäre ist geringer ausgeprägt als in anderen Modellen. Sie ist aber immer noch deutlich am Sprung der Heterogenität in 1000 km Tiefe erkennbar. Die Rückströmung aus der hochviskosen Schicht besteht hier aber überwiegend aus schon entgastem Material. Die Modelle 660 und 661 verhalten sich prinzipiell ähnlich wie Modell 662, aber die Strömungsgeschwindigkeiten sind niedriger. Entgastes Material steigt in Modell 660 von der CMB kaum wieder bis an die Oberfläche, schafft also gerade einen Umlauf in den Konvektionszellen. In Modell 661 legt die entgaste Komponente etwas weitere Wegstrecken als in 660, aber weniger als in 662 zurück. 660 und 661 sind für die Evolution des Erdmantels nicht relevant.

### 6.2.2. Relevanz für die Erde

Es ist also möglich, dass realistische Viskositätskontraste im Erdmantel eine Schichtung des Mischungsverhaltens bewirken können. Das steht im Widerspruch zu den Ergebnissen anderer Autoren (vgl. 2.3.3), die zu geringe Viskositätskontraste angesetzt und insbesondere auch keine zweite Asthenosphäre berücksichtigt hatten. Die Feststellung einer radialen Schichtung im Mischungsverhalten könnte für die Erklärung geochemischer Beobachtungen wichtig sein (vgl. 2.2 und 2.3) und ist ein wesentliches Ergebnis dieser Arbeit.

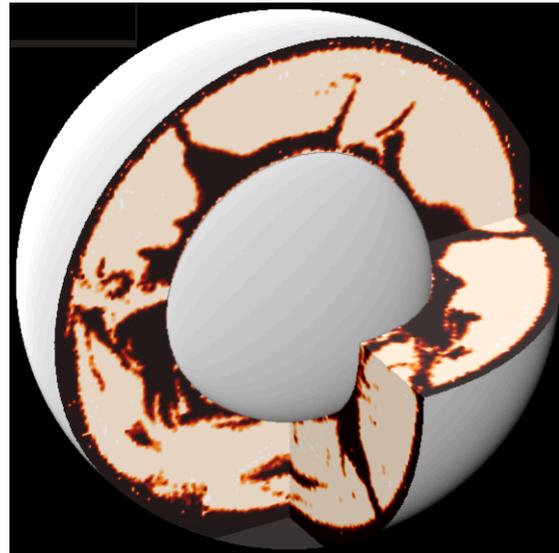
Die hier modellierte Differenzierung des Mantelmaterials in zwei Komponenten entspricht keiner Differenzierung im geochemischen Sinne. Sie dient lediglich der Markierung von Material, das einmal nahe an der Oberfläche gewesen ist. Die mit der Krustenbildung verbundenen Differenzierungen finden allerdings nahe der Oberfläche statt, wo partielle Schmelze auftritt. Mantelmaterial kommt im Modell nur über Aufströme an die Oberfläche und diese entsprechen den realen divergenten Plattenrändern, wo neue Kruste entsteht. Man kann also davon ausgehen, dass das meiste oberflächennahe Material Differenzierungsprozesse durchlaufen hat. Beim Subduzieren können weitere Differenzierungen stattfinden. Nur die Tiefe, bis zu der chemische Veränderungen stattfinden, wird nicht nach physikalischen Gesichtspunkten bestimmt. Die in den Modellen benutzten Entgasungstiefen sind meist geringer als 150 km. Das stimmt mit geophysikalisch bestimmten Werten relativ gut überein. Hirth & Kohlstedt (1996) geben 60 bis 115 km an, Regenauer-Lieb & Kohl (2003) kommen auf 65 km. Diese geophysikalischen Entgasungstiefen sind ein Maß für die Tiefe der Wirkung von Differenzierungs- und Extraktionsprozessen, die zur Krustenbildung führen. Deshalb stellen meine Modellrechnungen eine erste Näherung für die mit Krustenbildung verbundenen Differenzierungen dar. Dabei kann das hier als ‚entgast‘ bezeichnete Material durchaus mehrere Komponenten im geochemischen Sinne enthalten, z.B. die verschiedenen Bestandteile ozeanischer Lithosphäre. Das hier als ‚ursprünglich‘ bezeichnete Material muß auch nicht ursprünglich im geochemischen Sinne sein und kann aus mehreren chemischen Komponenten bestehen. Ausgehend von den in den Modellen gefundenen Vermischungstypen wird folgendes Szenario als Arbeitshypothese für zukünftige Modellierungen der chemischen Evolution der silikatischen Erde favorisiert:

## 6.2. Schlussfolgerungen für die chemische Evolution der Erde

Wechsel des Konvektionsregimes: Vergleichsweise ähnliche Modelle können zu völlig unterschiedlichem Mischungsverhalten führen. Auf der einen Seite gibt es Modelle, die zu kleinräumiger, gründlicher, von oben nach unten fortschreitender Vermischung führen (Abb. 6.2-3). Diese werden als Regime 1 bezeichnet. Auf der anderen Seite gibt es Modelle, die einen schnellen Stofftransport durch den ganzen Mantel zeigen (Regime 2). Diese ergeben eine Schichtung des Mischungsverhaltens im mittleren Mantel und entsprechen der heute beobachteten Ganzmantelkonvektion mit Abströmen, die von der Oberfläche bis zur CMB reichen (Abb. 6.2-4).



**Abb. 6.2-3:** Vorgeschlagenes Mischungsverhalten vor dem Einsetzen von Ganzmantelkonvektion (Regime 1). Das dunkle Material könnte hier die durch Extraktion kontinentaler Kruste entstehende MORB-Quelle sein. Helles Material ist ursprünglich im geochemischen Sinne. Das Viskositätsprofil  $\eta(r)$  ist in diesem Modell etwa eine Größenordnung niedriger als im Modell von Abb. 6.2-2, aber ansonsten diesem ähnlich. Beide Modelle berücksichtigen  $\sigma_r$ . Dieses Modell steht für den heißeren, frühen Mantel. (Bild von Modell 640)



**Abb. 6.2-4:** Mischungsverhalten der heute beobachteten Ganzmantelkonvektion (Regime 2). Dunkles Material ist bis zur CMB sinkende, subduzierte ozeanische Lithosphäre. Das helle Material in der oberen Mantelhälfte ist die MORB-Quelle, im unteren Mantel ist es ursprünglich. Die hier nicht sichtbare Grenze zwischen MORB-Quelle und ursprünglichem Material in den hellen Gebieten verlaufe etwa so, wie die Grenze zwischen hellem und dunklem Material in Abb. 6.2-1. (Bild von Modell 651)

Beide Modelltypen unterscheiden sich nur graduell hinsichtlich der verwendeten Rheologien. Es ist also nicht ausgeschlossen, dass das konvektive Regime im Laufe der Evolution des Erdmantels gewechselt hat.

Während der Phase kleinräumiger Konvektion in der oberen Mantelhälfte (Regime 1) könnte aus oberflächennahem Material kontinentalen Kruste extrahiert worden sein. Das zurückbleibende, homogene Residuum wäre verarmt und ein Vorläufer der heutigen MORB-Quelle. Dieser Prozess der Differenziation des Mantels in kontinentale Kruste und einen verarmten oberen Mantel unter Beibehaltung eines ursprünglichen tiefen Mantels ist erstmals von Walzer & Hendl (1999) dynamisch modelliert worden. Sowohl bei Walzer & Hendl (1999) als auch in den hier vorgestellten Modellen dieses Typs (640 und 642) gibt es konvektive Bewegungen in der unteren Mantelhälfte. Diese sind aber sehr viel langsamer und großräumiger als im oberen Teil. Entscheidend ist, dass der Mantel oben kleinräumig wesentlich schneller durchmischt wird als im globalen Maßstab. Es breitet sich eine unregelmäßige Front homogenen, durch Differenziation veränderten Materials nach unten aus. Im Zuge der Abkühlung des Mantels verschob sich das Viskositätsniveau zu höheren Werten. Dadurch könnte ein Wechsel zu Regime 2 erfolgt sein, mit schnellen, durchgehenden

## 6.2. Schlussfolgerungen für die chemische Evolution der Erde

Abströmen bis zur CMB. Alle hier vorgestellten Modelle mit hohem Viskositätsniveau ( $\eta\delta$ ) zeigen dieses Verhalten. Stoffliche Differenzierung oder Veränderungen im Gehalt an Volatilen könnten auch zum Umschlag des konvektiven Regimes beigetragen haben. In Gegenwart von Ganzmantelkonvektion bleibt das Gebiet nahe der Oberfläche am längsten unverändert. Das ist vermutlich auf die 3D sphärische Geometrie zurückzuführen. Mit zunehmendem Abstand von der CMB müssen die Konvektionszellen ein immer größeres Volumen füllen. Dadurch liegen die Stagnationspunkte der Zellen, der schwer anströmbare innere Bereich, nahe an der Oberfläche. Dort befindet sich das unter Regime 1 entstandene verarmte Material. Zusätzlich führt eine Schichtung des Mischungsverhaltens zum Erhalt der Homogenität in der oberen Mantelhälfte. Das ist eine wesentliche Folge des von Walzer et al. (2003b) postulierten Viskositätsprofils. Heterogenitäten, eventuell mit primordialem Material, können in der hochviskosen Schicht des unteren Mantels am längsten erhalten bleiben. Die dünne Schicht über der CMB bestünde fast ausschließlich aus rezyklierter ozeanischer Lithosphäre, die in sich heterogen sein kann. Heutige Plumes beproben vorwiegend den tiefsten Mantel und den Bereich der starken Viskositätszunahme im unteren Mantel. Beides sind Grenzschichten und können damit entsprechende thermische Instabilitäten verursachen. Die beobachtete geochemische Heterogenität von OIBs entstünde daher sowohl durch die laterale Heterogenität in der hochviskosen Schicht des unteren Mantels als auch durch die radialen Unterschiede in der Verteilung der verschiedenen Mantelkomponenten. Die beobachtete globale Homogenität von MORB wäre nach dieser Hypothese ein Überbleibsel aus der Zeit von Regime 1, unterstützt durch die Schichtung des Mischungsverhaltens im heutigen Mantel. In der realen Erde kommt eventuell noch die erhöhte Mischungseffizienz in Oberflächennähe als Folge toroidaler Bewegungen hinzu. Das ist in den Modellen unzureichend berücksichtigt.

Zusätzliche Mechanismen, wie eine Filterung in der Übergangszone (2.3.4) oder Dichteschichtungen im Mantel (2.3.3), werden in dieser Hypothese nicht zur Erklärung der Beobachtungen benötigt, könnten aber trotzdem wirken.

Hohe  $Ra$ -Werte (2.2.4) entstehen mit hoher Wahrscheinlichkeit in der hochviskosen Schicht des unteren Mantels. Sowohl ursprüngliche Bereiche als auch rezyklierte ozeanische Lithosphäre könnten die Quelle sein. Im Falle der heutigen Ganzmantelkonvektion (Regime 2) sinkt subduziertes Material schnell bis zur CMB, häuft sich an und breitet sich langsam von unten in die hochviskose Schicht aus. Es wird dort also temporär gespeichert. Dadurch könnte der von Ferrachat & Ricard (2001) vorgeschlagene Effekt zum Tragen kommen, bei dem in konvektiv isoliertem, verarmtem Material relativ zum restlichen Mantel hohe  $Ra$ -Werte entstehen. Zum quantitativen Nachweis dieser Möglichkeit sind aber Modellierungen der entsprechenden Isotopensysteme nötig.

#### 6.3. Schlussbemerkungen

Die Möglichkeit des oben vorgeschlagenen Wechsels im konvektiven Regime der Erde habe ich erst gegen Ende des Aufschreibens dieser Arbeit gefunden. Deshalb wurden noch keine gezielten Versuche zur Modellierung des eigentlichen Wechsels unternommen. Auch der Text konnte nur noch begrenzt dieser Interpretation angepasst werden. Aus Freude, eine Möglichkeit gefunden zu haben, wie geophysikalische und geochemische Beobachtungen aus strömungsdynamischer Sicht vereinbar sein könnten, habe ich vielleicht nicht überall auf die nötige sprachliche Exaktheit geachtet. Der Leser möge mir das verzeihen.

An dieser Stelle sei noch einmal auf die Unzulänglichkeiten der hier vorgestellten Modelle hingewiesen, die ich eventuell nicht überall klar genug herausgestellt habe.

Es werden keine Komponenten im geochemischen Sinne modelliert. Geochemische Bezeichnungen (MORB, OIB, verarmt ...) werden nur verwandt, um die mögliche Bedeutung der Modelle für die Interpretation der Evolution des Erdmantels zu verdeutlichen. Eine selbstkonsistente Modellierung geochemischer Reservoirs wie bei Walzer & Hendel (1999) ist nötig, um über das Stadium von Prinzipstudien hinauszukommen. Die in der vorliegenden Arbeit vorgenommene Einteilung des Mantels in entgaste und ursprüngliche Bereiche wird lediglich als eine sehr grobe Näherung für nahe der Erdoberfläche stattfindende Differenzierungsprozesse angesehen.

In allen Rechnungen dieser Arbeit ist das Viskositätsprofil zeitlich konstant und wird auch nicht dem jeweiligen Temperaturniveau angepasst. Diese Einschränkung muss zuerst aufgehoben werden. Vermutlich kann nur eine wirklich dynamische Modellierung die geophysikalischen und geochemischen Beobachtungen erklären.

Vielleicht ist die vorgestellte Hypothese aber auch nur ein weiteres Bild in der Galerie der vorgeschlagenen Möglichkeiten (Abb. 2.3-1) zur Erklärung der Evolution der steinernen Hülle unseres Planeten.

**Notizen:**

## **Anhang 1:**

### **Testrechnungen zur Einführung einer viskoplastischen Fließspannung**

Anhang 1: Modell 624

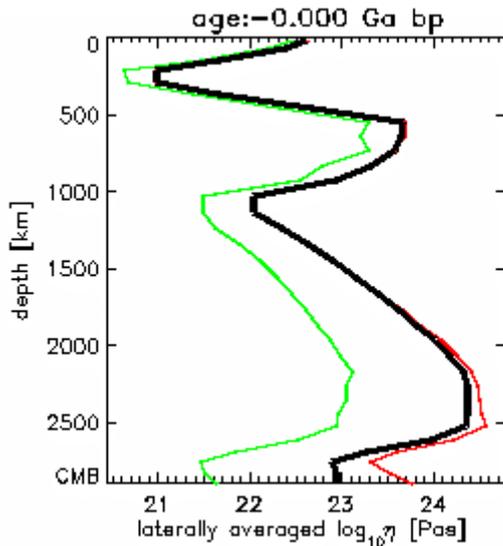


Abb. 624-1: Lateral gemittelt Viskositätsprofil und Extremwerte der jeweiligen Schale

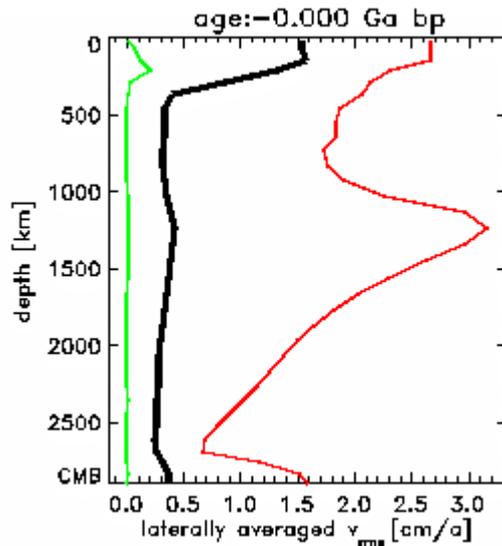


Abb. 624-2: Lateral gemittelt Geschwindigkeitsprofil und Extremwerte der jeweiligen Schale

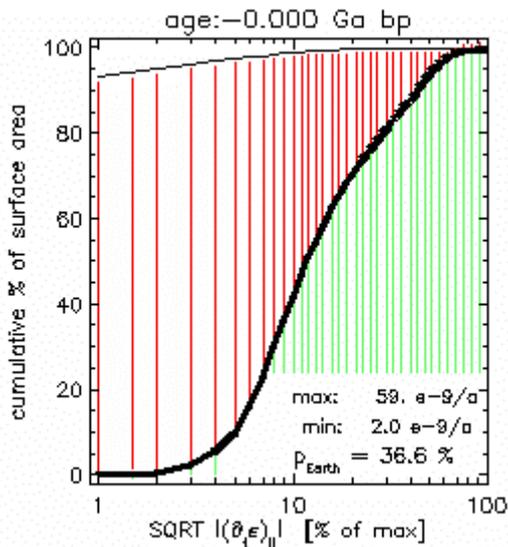


Abb. 624-3: Plattigkeit an der Oberfläche

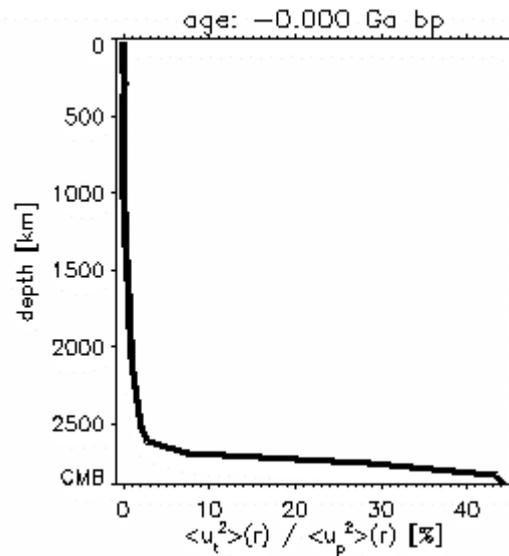


Abb. 624-4: Tiefenverteilung toroidaler Energie

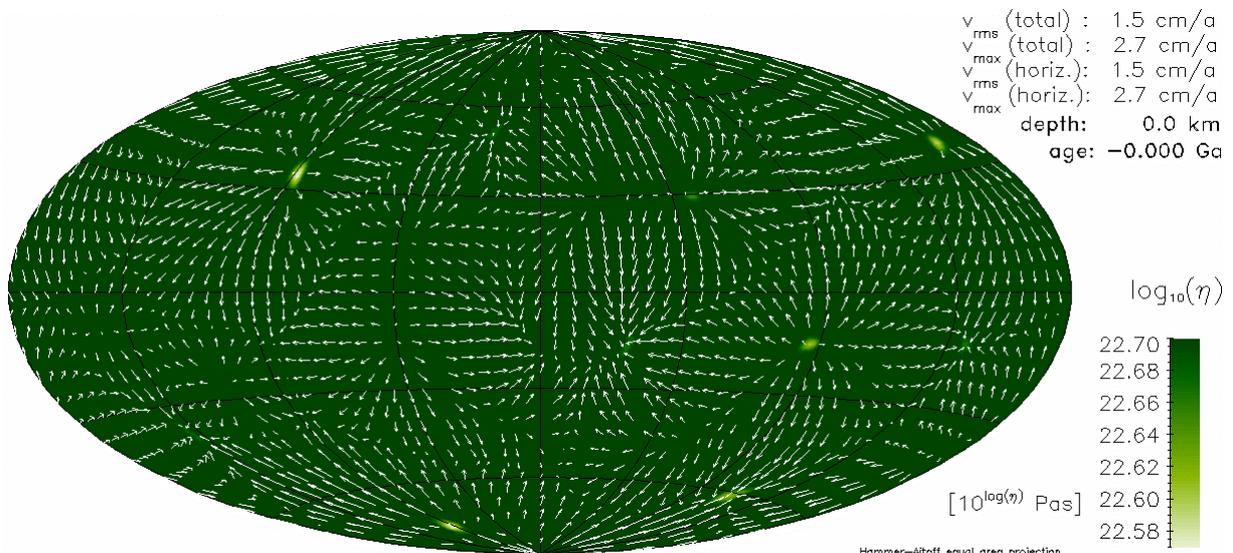


Abb. 624-5: Viskosität an der Oberfläche am Ende der Rechnung

Anhang 1: Modell 625

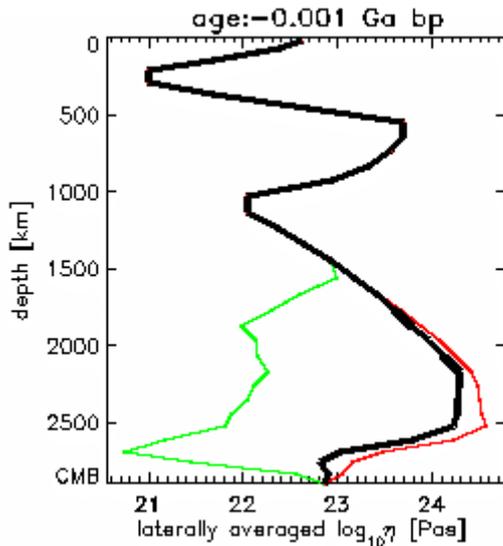


Abb. 625-1: Lateral gemittelt Viskositätsprofil und Extremwerte der jeweiligen Schale

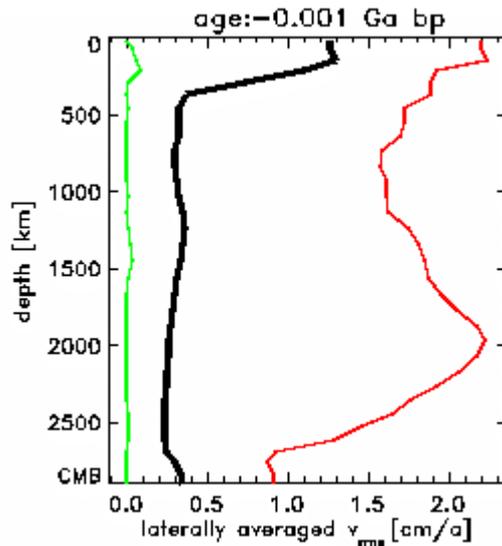


Abb. 625-2: Lateral gemittelt Geschwindigkeitsprofil und Extremwerte der jeweiligen Schale

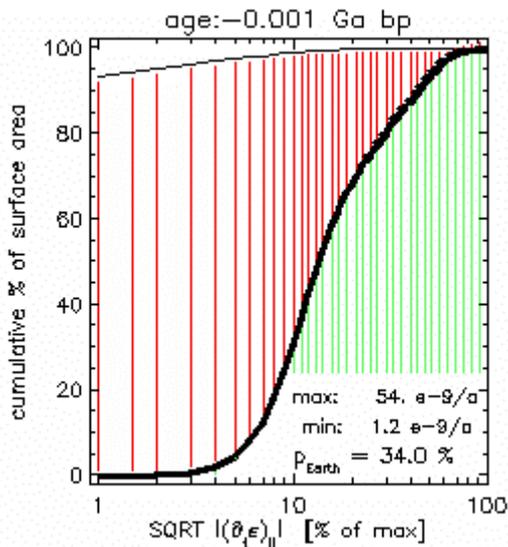


Abb. 625-3: Plattigkeit an der Oberfläche

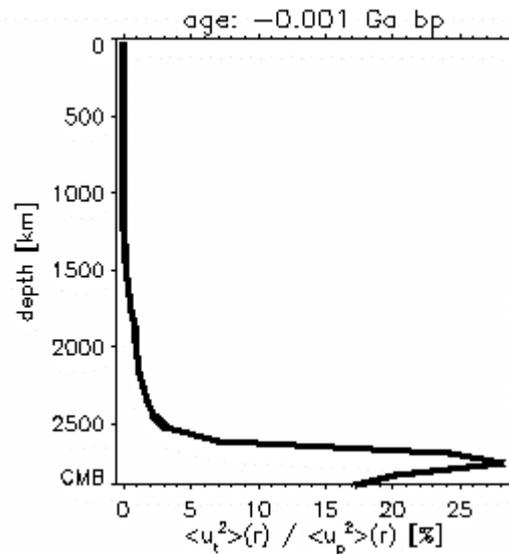


Abb. 625-4: Tiefenverteilung toroidaler Energie

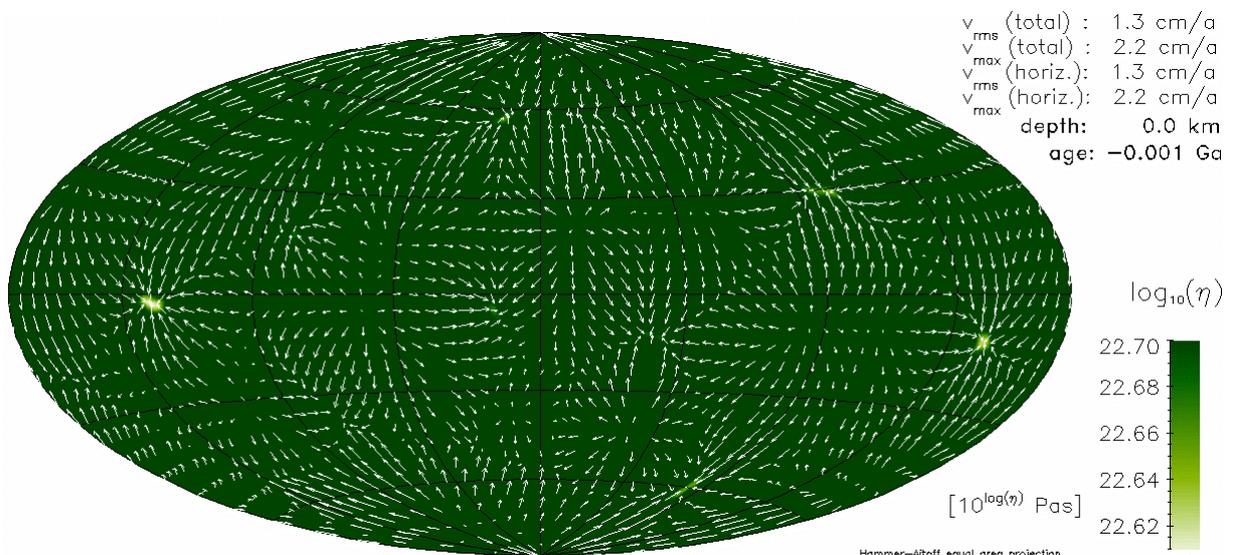


Abb. 625-5: Viskosität an der Oberfläche am Ende der Rechnung

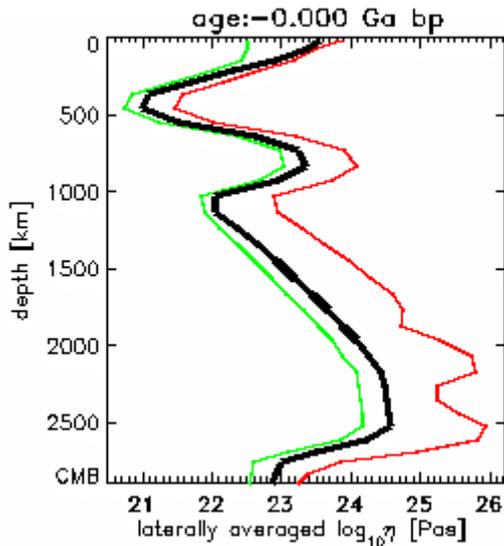


Abb. 626-1: Lateral gemitteltetes Viskositätsprofil und Extremwerte der jeweiligen Schale

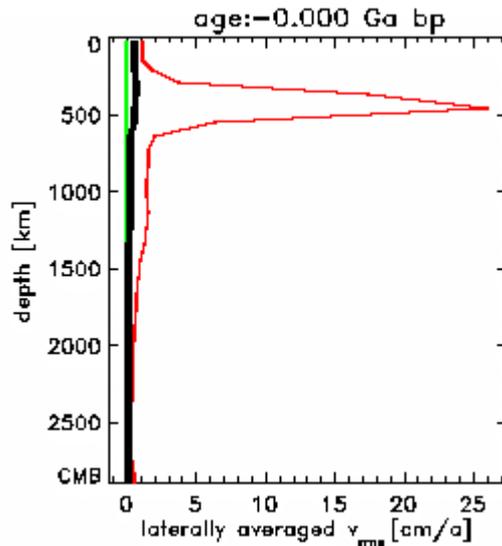


Abb. 626-2: Lateral gemitteltetes Geschwindigkeitsprofil und Extremwerte der jeweiligen Schale

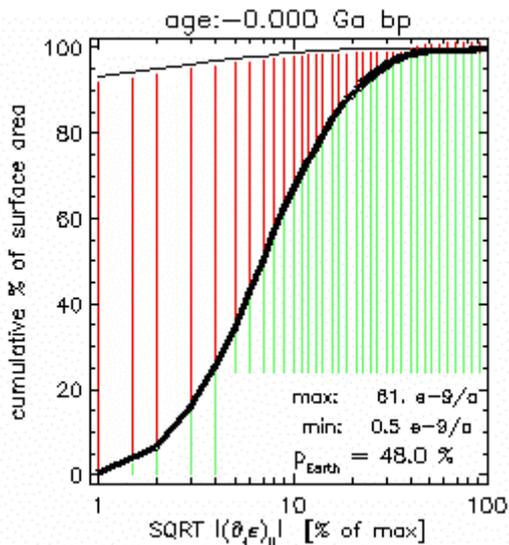


Abb. 626-3: Plattigkeit an der Oberfläche

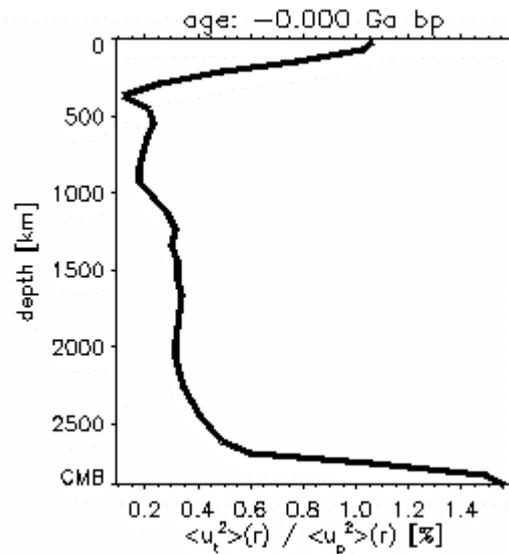


Abb. 626-4: Tiefenverteilung toroidaler Energie

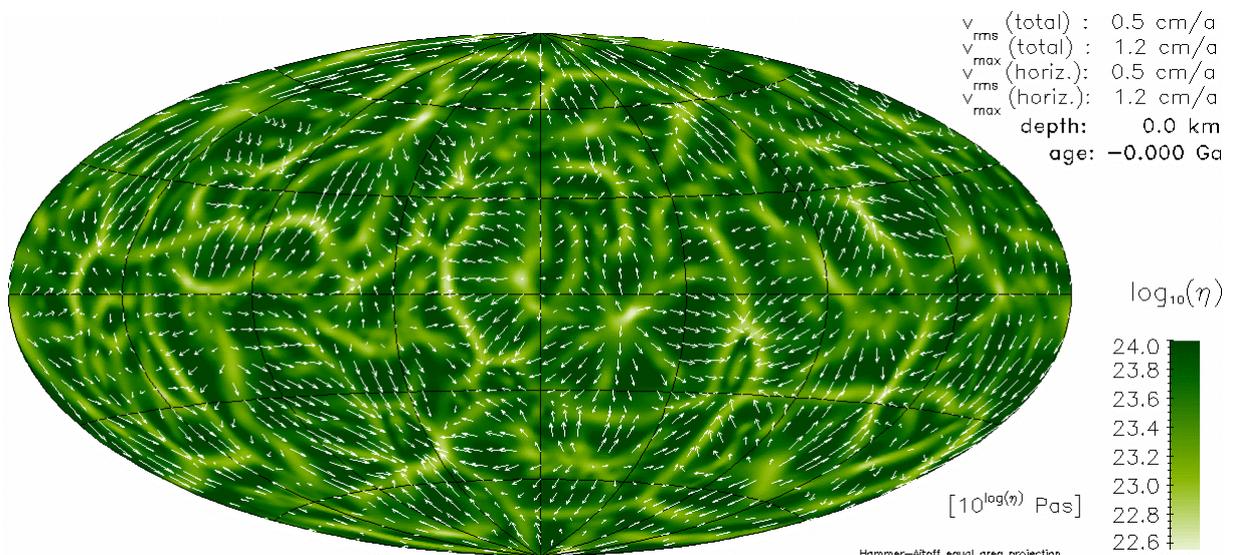


Abb. 626-5: Viskosität an der Oberfläche am Ende der Rechnung

Anhang 1: Modell 627

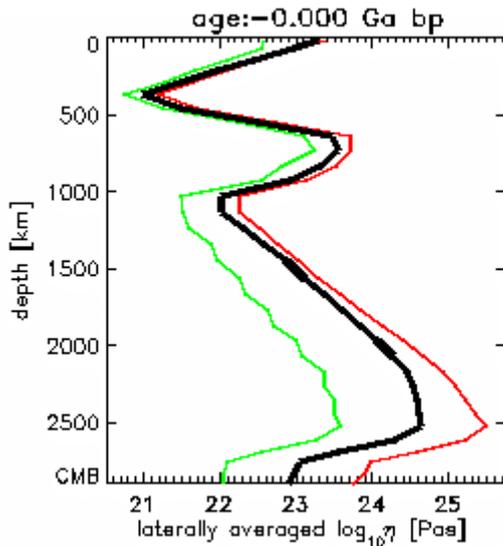


Abb. 627-1: Lateral gemittelt Viskositätsprofil und Extremwerte der jeweiligen Schale

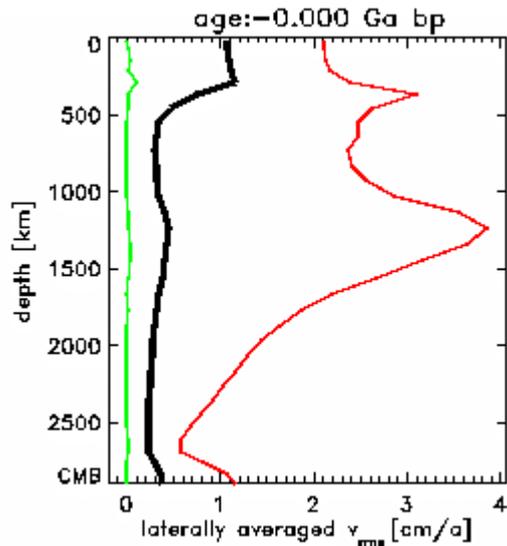


Abb. 627-2: Lateral gemittelt Geschwindigkeitsprofil und Extremwerte der jeweiligen Schale

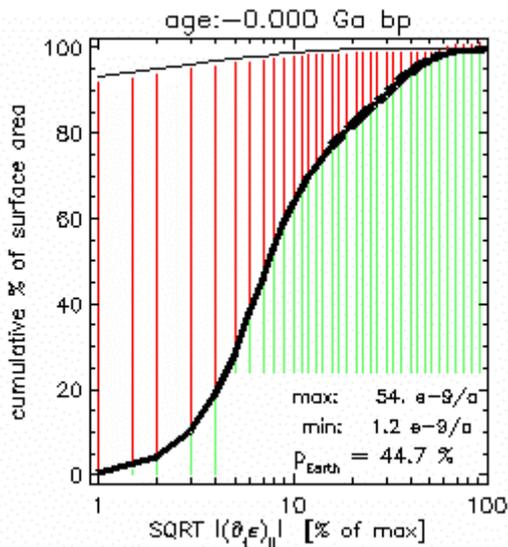


Abb. 627-3: Plattigkeit an der Oberfläche

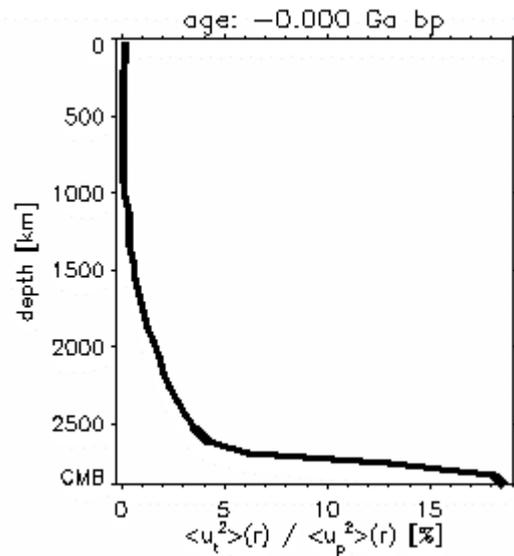


Abb. 627-4: Tiefenverteilung toroidaler Energie

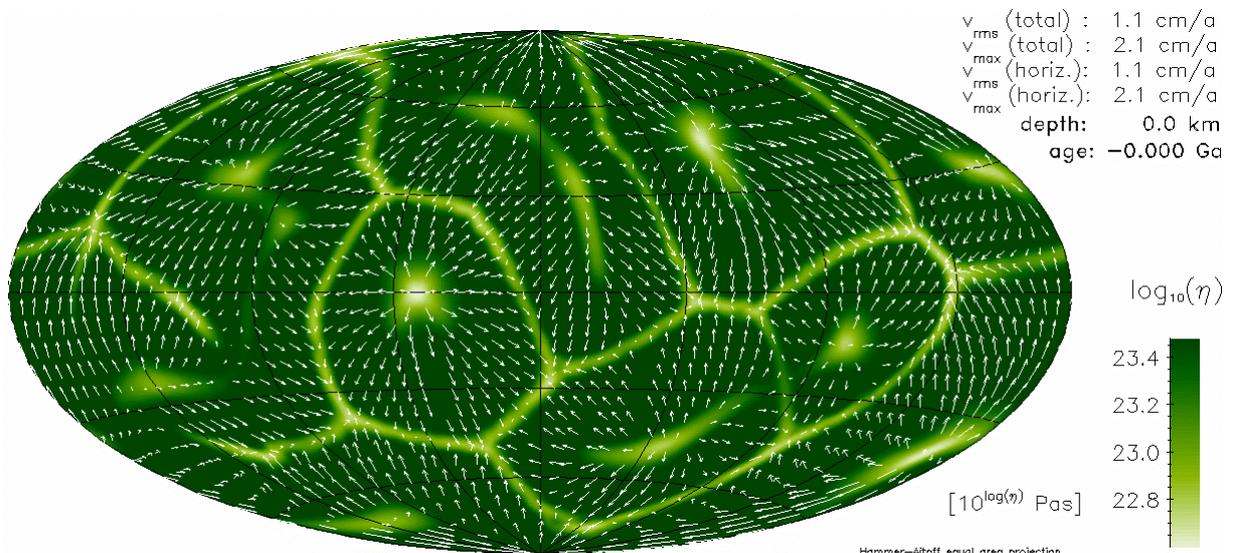


Abb. 627-5: Viskosität an der Oberfläche am Ende der Rechnung

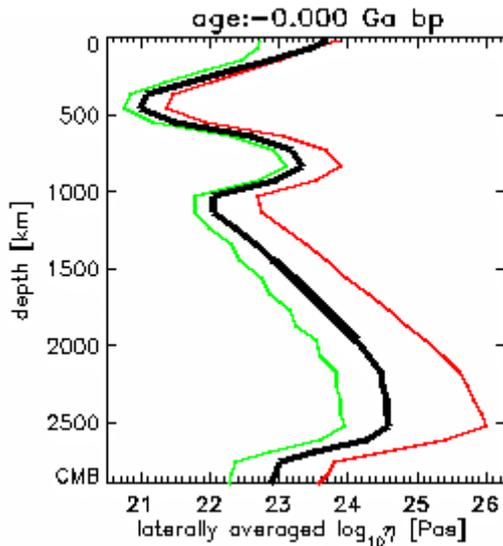


Abb. 628-1: Lateral gemittelt Viskositätsprofil und Extremwerte der jeweiligen Schale

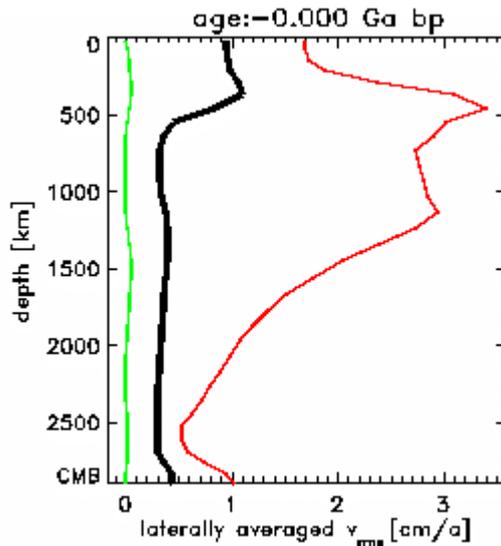


Abb. 628-2: Lateral gemittelt Geschwindigkeitsprofil und Extremwerte der jeweiligen Schale

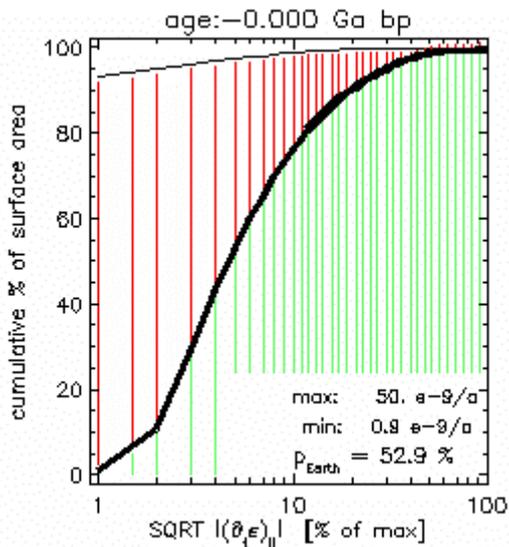


Abb. 628-3: Plattigkeit an der Oberfläche

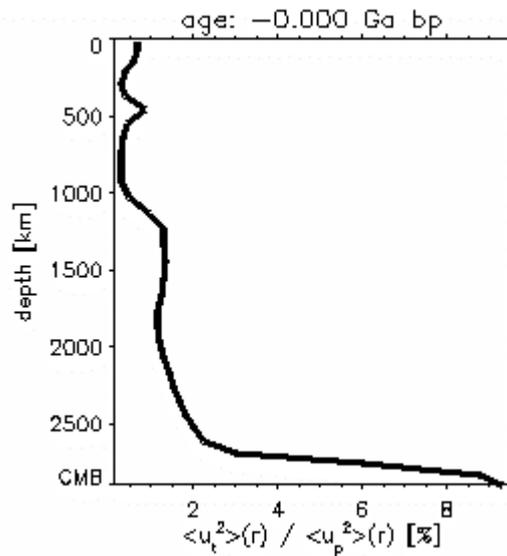


Abb. 628-4: Tiefenverteilung toroidaler Energie

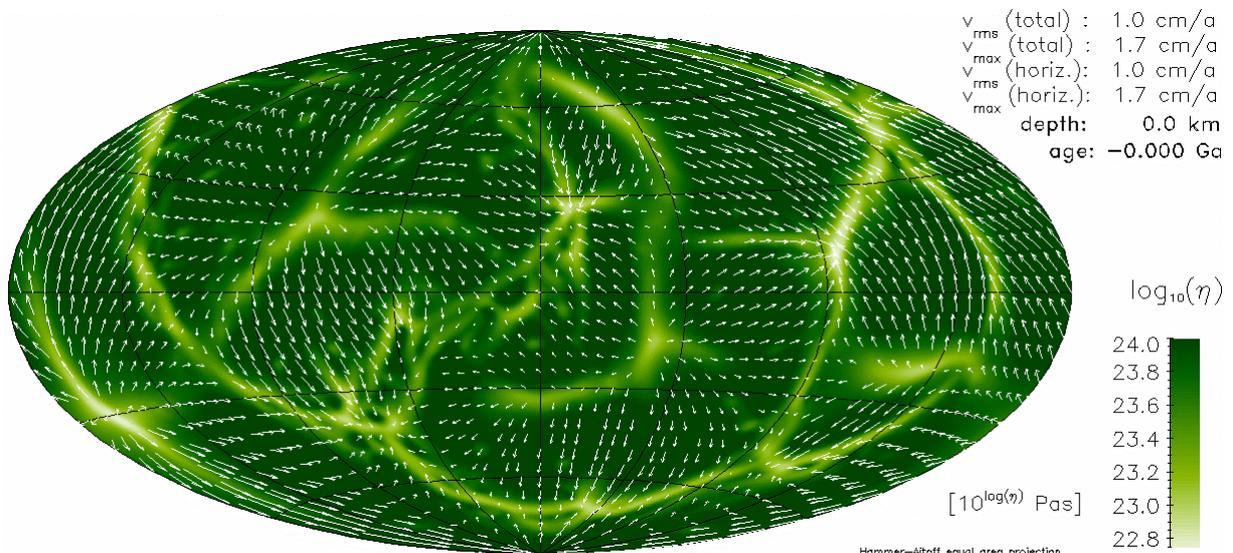


Abb. 628-5: Viskosität an der Oberfläche am Ende der Rechnung

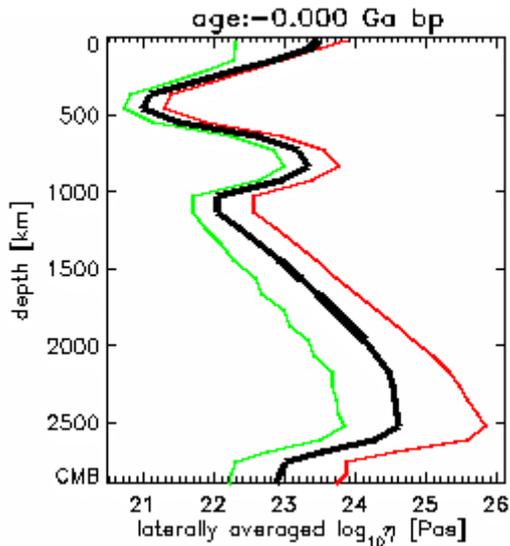


Abb. 629-1: Lateral gemitteltetes Viskositätsprofil und Extremwerte der jeweiligen Schale

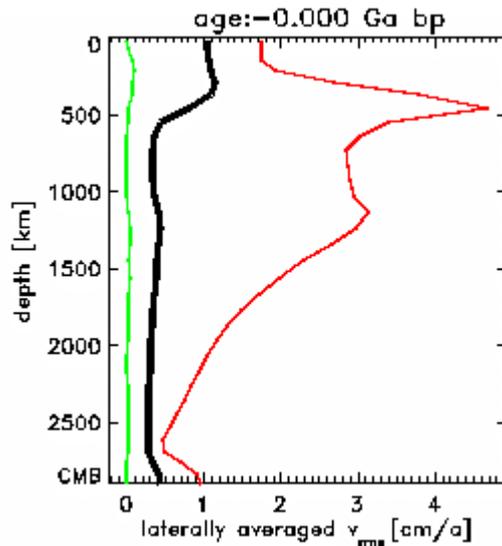


Abb. 629-2: Lateral gemitteltetes Geschwindigkeitsprofil und Extremwerte der jeweiligen Schale

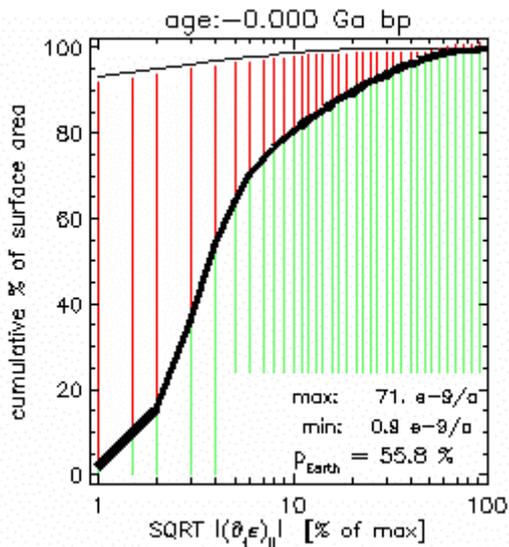


Abb. 629-3: Plattigkeit an der Oberfläche

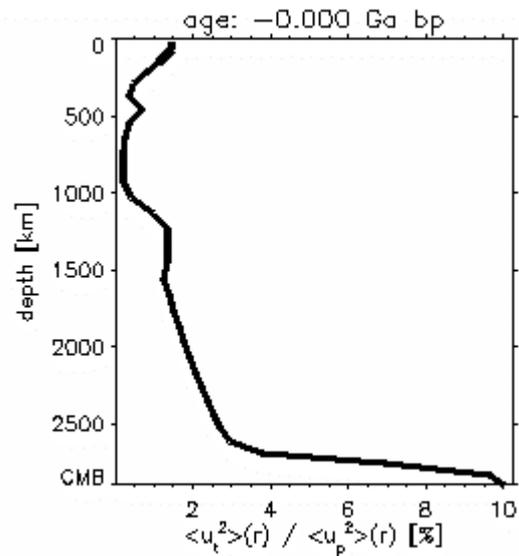


Abb. 629-4: Tiefenverteilung toroidaler Energie

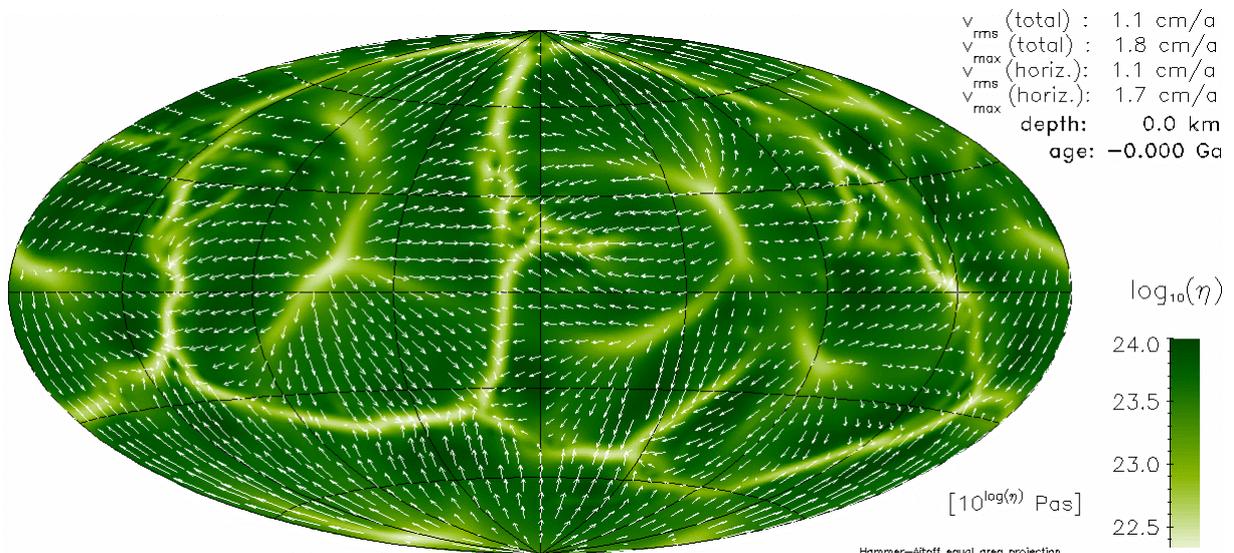


Abb. 629-5: Viskosität an der Oberfläche am Ende der Rechnung

Anhang 1: Modell 630

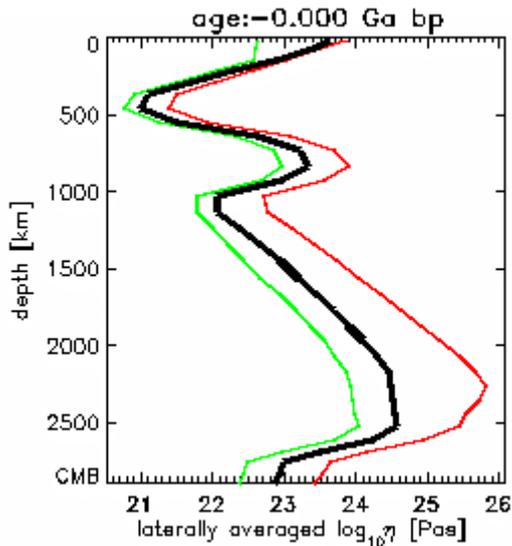


Abb. 630-1: Lateral gemitteltetes Viskositätsprofil und Extremwerte der jeweiligen Schale

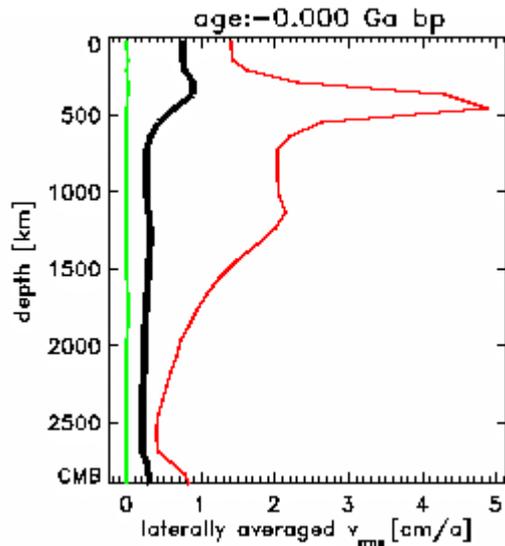


Abb. 630-2: Lateral gemitteltetes Geschwindigkeitsprofil und Extremwerte der jeweiligen Schale

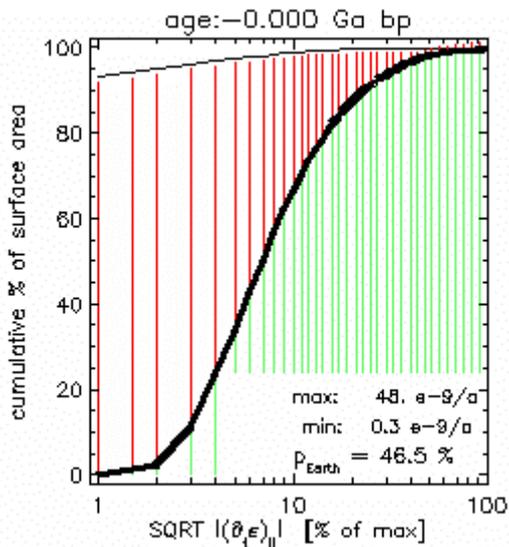


Abb. 630-3: Plattigkeit an der Oberfläche

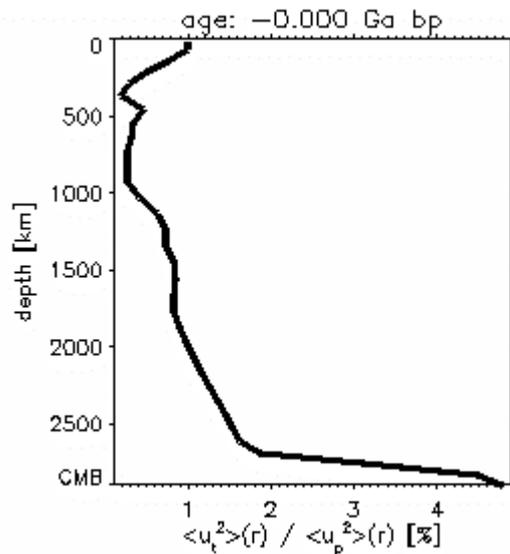


Abb. 630-4: Tiefenverteilung toroidaler Energie

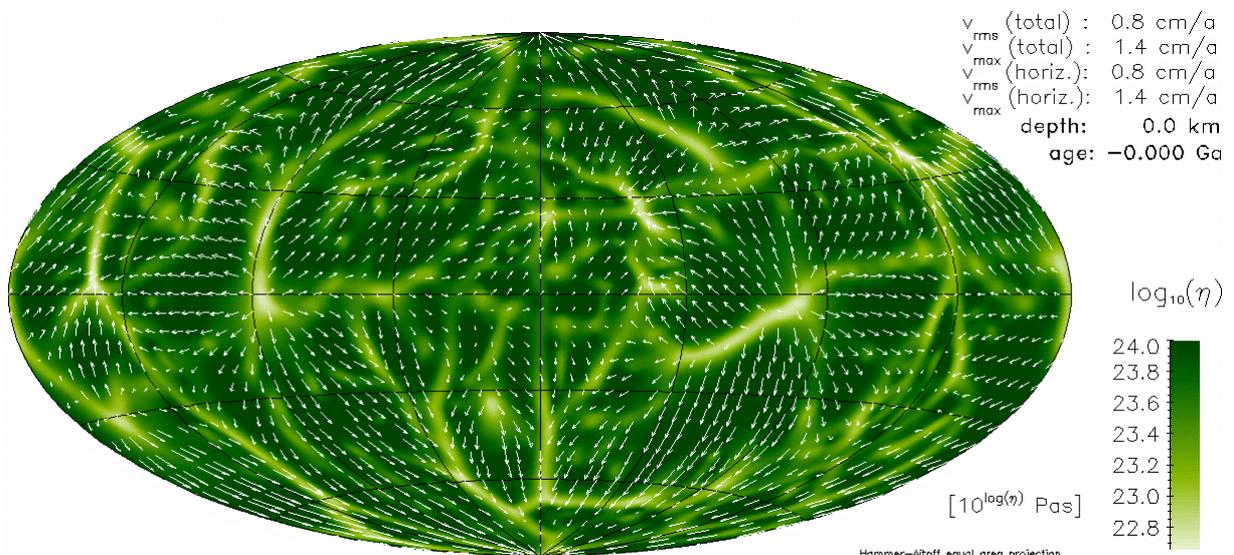


Abb. 630-5: Viskosität an der Oberfläche am Ende der Rechnung

**Anhang 2:**

**Alphabetisches Symbolverzeichnis**

## Anhang 2: Alphabetisches Symbolverzeichnis

Symbol	Dimension	Erklärung
$A$	$1 \text{ m}^2$	Fläche
$a_{ifv}$		isotopischer Gehaltsfaktor des $v$ -ten Isotops
$a_{ul,core}$		Massenanteil von Kalium im Kern
$a_{uv}$		Massenanteil des Elements, zu dem das $v$ -te Isotop gehört
$B_v$		Heterogenität des Feldes der $v$ -ten Komponente, normiert (dimensionslos)
$c_p$	$1 \text{ J/kg K}$	spezifische Wärme des Mantels bei konstantem Druck
$c_{p,core}$	$1 \text{ J/kg K}$	spezifische Wärme des Kerns bei konstantem Druck
$c_r$		numerischer Dämpfungsfaktor
$c_v$	$1 \text{ J/kg K}$	spezifische Wärme bei konstantem Volumen (Mantel)
$c_v$		auf die Masse bezogene Konzentration der Komponente $v$ (normiert, dimensionslos)
$C_{v,mantle}$		im Rechengebiet enthaltene Menge oder Masse einer Komponente $v$ (z.B. Anzahl $^{235}\text{U}$ -Kerne im silikatischen Teil der Erde)
$D_v$		absolute Abweichung vom globalen Mittelwert der $v$ -ten Komponente, normiert (dimensionslos)
$E$	$1 \text{ J}$	Energie, die vom Kern in der vorgegebenen Zeit aufgenommen oder abgegeben wird
$E_f$	$1 \text{ J}$	freie Enthalpie
$e_{ij}$	$1/\text{s}$	Deformationsgeschwindigkeitstensor
$E_{latent}, E_{12}$	$1 \text{ J}$	Umwandlungswärme beim Übergang von Phase 1 zu Phase 2; latente Wärme
$f$	?	kontextabhängige Funktion
$F_B$	$1 \text{ N}$	Auf- oder Abtrieb
$G$	$1 \text{ N m}^2/\text{kg}^2$	Gravitationskonstante
$g$	$1 \text{ m/s}^2$	Betrag der Schwerebeschleunigung; bei Kugelgeometrie gleich radialer Komponente
$g_i$	$1 \text{ m/s}^2$	kartesische Komponente der Schwerebeschleunigung
$h$	$1 \text{ m}$	Abstand zwischen Unter- und Oberfläche eines kartesischen Gebietes
$H$	$1 \text{ W/kg}$	spezifische Wärmeleistung
$H_{0v}$	$1 \text{ W/kg}$	spezifische Wärmeleistung des $v$ -ten Isotops am Anfang
$H_{cool}$	$1 \text{ W/kg}$	spezifische Wärmeleistung durch Extraktion von Schmelze (Vulkanismus)
$I$		siehe Gleichung (3.5-14)
$k$	$1 \text{ W/m K}$	Wärmeleitfähigkeit
$k_m$	$1 \text{ W/m K}$	Wärmeleitfähigkeit des Mantels
$K_T$	$1 \text{ Pa}$	Kompressionsmodul bei konstanter Temperatur
$K_{v,k}$		lokaler Kontrast im Feld der $v$ -ten Komponente, normiert (dimensionslos)
$l$		Grad der Legendre-Funktion
$L^*$	$1 \text{ m}$	Längenskalen im Kern; siehe Gleichungen (3.5-8), (3.5-12) und (3.5-13)
$m$		Ordnung der Legendre-Funktion
$M$	$1 \text{ kg}$	Masse
$M_{core}$	$1 \text{ kg}$	Masse des Erdkerns
$M_{mantle}$	$1 \text{ kg}$	Masse des silikatischen Teils der Erde, der durch das Rechengebiet dargestellt wird
$mp$		Anzahl der Marker, die pro Zeitschritt in die Umgebung eines Gitterpunktes wechseln dürfen
$mt$		Anzahl der Unterteilungen einer ursprünglichen Ikosaederkante
$n$		Zeitschrittnummer; wird als Index links oben angegeben
$na$		Anzahl der Attribute eines Markers
$nd$		Anzahl der von einem Prozessor verwalteten Teilgebiete
$ngpp$		Anzahl der einem Prozessor zugeordneten Gitterpunkte
$ngrp$		Gesamtzahl der Gitterpunkte
$np$		Anzahl der Marker, die ein Gitterpunkt maximal aufnehmen darf
$nproc$		Anzahl der Prozessoren
$nr$		Anzahl der radialen Unterteilungen
$nt$		Anzahl der Unterteilungen einer Kante des Gebietes eines Prozessors
$Nu$		Nusselt-Zahl
$P$	$1 \text{ Pa}$	Druck
$P_{cooling+ICB}$	$1 \text{ J/m}$	Energie pro Radiusänderung des Innenkerns:

## Anhang 2: Alphabetisches Symbolverzeichnis

		säkulare Aufheizung oder Abkühlung des gesamten Kerns
$p_{Earth}$	1 %	Maß der Plattigkeit eines Modells im Vergleich zur realen Erde
$P_{gravi}$	1 J/m	Energie pro Radiusänderung des Innenkerns: potenzielle Energie der Entmischung
	1 J/m	Energie pro Radiusänderung des Innenkerns: latente Wärme
$P_r$	1 Pa	Referenzdruck
$Pr$		Prandtl-Zahl
$q_{CMB}$	1 W/m <sup>2</sup>	Wärmestrom über die CMB
$Q_{CMB}$	1 W	Wärmeleistung der CMB
$Q_{cooling}$	1 W	Wärmeleistung aus der säkularen Abkühlung des Außenkerns
$q_E$	1 W/m <sup>2</sup>	Wärmestrom an der Erdoberfläche
$Q_{gravi}$	1 W	Wärmeleistung aus der Entmischung beim Ausfrieren des Innenkerns
$Q_{ICB}$	1 W	Wärmeleistung der Innenkerngrenze
$Q_{latent}$	1 W	Leistung aus der Freisetzung latenter Wärme
$Q_{radiogenic}$	1 W	Wärmeleistung durch den Zerfall radioaktiver Isotope (Außen- oder Gesamtkern)
$r$	1 m	Radius
$R_a$		Verhältnis des Wertes <sup>3</sup> He/ <sup>4</sup> He zum atmosphärischen Wert
$Ra$		Rayleigh-Zahl
$r_{CMB}$	1 m	Radius des Erdkerns
$r_E$	1 m	Erdradius
$r_{IC}$	1 m	Radius des Innenkerns
$s$	1/s	Quadratwurzel aus dem Betrag der zweiten Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors
$\tilde{s}$		s, normiert
$S$	1 J/K	thermodynamische Entropie
$Symbol$	Dimension	Erklärung
$T$	1 K	absolute Temperatur
$t$	1 s	Zeit
$T_{adb}$	1 K	adiabatisches Temperaturprofil
$T_{av}$	1 K	lateral gemittelte Temperatur im Mantel
$T_c$	1 K	Temperatur im Erdmittelpunkt
$T_{CMB}$	1 K	Temperatur an der CMB
$T_E$	1 K	Temperatur an der Erdoberfläche
$t_{ev}$	1 s	Alter des silikatischen Mantels der Erde (Start der Mantelmodelle)
$T_m$	1 K	Schmelztemperatur im Mantel
$T_r$	1 K	Referenztemperatur
$t_{rad}$	1 s	Alter des Sonnensystems (Beginn der Zeitrechnung für radioaktive Zerfälle)
$T_s$	1 K	Erstarrungstemperatur
$T_{s0}$	1 K	Erstarrungstemperatur im Erdmittelpunkt
$U$	1 J	innere Energie
$V$	1 m <sup>3</sup>	Volumen
$v_i$	1 m/s	Komponente der Geschwindigkeit
$W_D$	1 J/sm <sup>3</sup>	Dissipationspotenzial; enthält Reibungs- und Kompressionswärme
$x_i$	1 m	Komponente des Ortsvektors
$z_v$		Wert der v-ten Komponente in den Zellen des Auswertegitters (normiert, dimensionslos)
$\langle * \rangle_i$	wie *	Mittelwert einer beliebigen Größe * über die im Index i angegebenen Koordinaten
$\alpha$	1/K	thermischer Ausdehnungskoeffizient
$\alpha_c$	1/K	thermischer Ausdehnungskoeffizient im Erdmittelpunkt
$\Gamma$	1 Pa/K	Clapeyronneigung

## Anhang 2: Alphabetisches Symbolverzeichnis

$\gamma$		Grüneisenparameter
$\nabla$	1/m	Nabla-Operator
$\Delta$	?	kontextabhängige Differenz
$\delta_{ik}$		Kroneckersymbol
$\Delta_r$	1/m <sup>2</sup>	radialer Anteil des Laplace-Operators
$\Delta S$	1 J/kg K	Kristallisationsentropie des ausfrierenden Innenkerns
$\Delta T$	1 K	Temperaturdifferenz zwischen Unter- und Oberfläche eines kartesischen Gebietes
$\Delta t$	1 s	Zeitschrittweite
$\Delta\rho_{ICB}$	1 kg/m <sup>3</sup>	chemisch bedingter Dichtesprung an der Innenkerngrenze
$\dot{\epsilon}_{II}$	1/s <sup>2</sup>	zweite Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors
$\eta$	1 Pa s	dynamische Scherviskosität
$\eta_{eff}$	1 Pa s	effektive Viskosität
$\eta_r$	1 Pa s	radiales Profil der dynamischen Scherviskosität
$\mathcal{G}$	1° oder rad	Breitenwinkel
$\kappa_m$	1 m <sup>2</sup> /s	Temperaturleitfähigkeit im Mantel
$\mu$		Verhältnis <sup>206</sup> Pb/ <sup>208</sup> Pb
$\nu$		Nummer des Isotops
$\zeta$		Faktor im Exponenten des Arrhenius-Gesetzes
$\rho$	1 kg/m <sup>3</sup>	Massendichte
$\rho_0$	1 kg/m <sup>3</sup>	Nulldruckdichte
$\rho_c$	1 kg/m <sup>3</sup>	Dichte im Erdmittelpunkt
$\rho_r$	1 kg/m <sup>3</sup>	Referenzdichte
$\sigma_v$	1 Pa	viskoplastische Fließspannung
$\tau_{ik}$	1 Pa	Spannungstensor
$\tau_\nu$	1 s	Zerfallszeit (1/e) des $\nu$ -ten Isotops
$\varphi$	1° oder rad	Längenwinkel

## Literaturverzeichnis

<p><b>Abe, Y. (1997)</b> Thermal and chemical evolution of the terrestrial magma ocean. <i>Physics of the Earth and Planetary Interiors</i>, <u>100</u>, 27-39.</p>
<p><b>Abramowitz, M.; Stegun, I.A. [eds.] (1972):</b> Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables, 9<sup>th</sup> printing. <i>New York: Dover</i></p>
<p><b>Agee, C.B.; Walker, D. (1988):</b> Mass balance and phase density constraints on early differentiation of chondritic mantle. <i>Earth and Planetary Science Letters</i>, <u>90</u>, 144-156</p>
<p><b>Albarède, F. (1998)</b> Time-dependent models of U-Th-He and K-Ar evolution and the layering of mantle convection. <i>Chem. Geol.</i>, <u>145</u>, 413-429.</p>
<p><b>Albarède, F. (2001)</b> Radiogenic ingrowth in systems with multiple reservoirs: applications to the differentiation of the mantle-crust system. <i>Earth Planet. Sci. Lett.</i>, <u>189</u>, 59-73.</p>
<p><b>Alfé, D.; Gillan, M.J.; Price, G.D. (2002)</b> Iron under Earth's core conditions: Liquid-state thermodynamics and high-pressure melting curve from ab initio calculations. <i>Phys. Rev. B</i>, <u>65</u>, 165118.</p>
<p><b>Allegre &amp; Turcotte (1986)</b> Implications of a two-component marble-cake mantle <i>Nature</i>, <u>323</u>, 123-127</p>
<p><b>Allegre, C.J.; Lewin, C. (1995)</b> Isotopic systems and stirring times of the Earth's mantle <i>Earth and Planetary Science Letters</i>, <u>136</u> ( 34) , 629-646</p>
<p><b>Allègre, C.J.; Hofmann, A.; O'Nions, K. (1996)</b> The argon constraints on mantle structure. <i>Geophys. Res. Lett.</i>, <u>23</u>, 3555-3557.</p>
<p><b>Anderson, D.L. (1993)</b> Helium-3 from the mantle: primordial signal or cosmic dust. <i>Science</i>, <u>261</u>, 170-176.</p>
<p><b>Anderson, O.L. (1998)</b> The Grüneisen parameter for iron at outer core conditions and the resulting conductive heat and power in the core. <i>Phys. Earth Planet. Int.</i>, <u>109</u>, 179-197.</p>
<p><b>Aref, H. (1984)</b> Stirring by chaotic advection. <i>J. Fluid Mech.</i> <u>143</u>, 1-21</p>
<p><b>Backus, G.E. (1975)</b> Gross thermodynamics of heat engines in deep interior of Earth. <i>Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.</i>, <u>72</u>, 1555-1558.</p>
<p><b>Baumgardner, J.R (1983):</b> A three-dimensional finite element model for mantle convection. <i>Thesis, Univ. of California, Los Angeles.</i></p>
<p><b>Baumgardner, J.R (1985):</b> Three-dimensional treatment of convective flow in the Earth's mantle. <i>J. Stat. Phys.</i>, <u>29</u>, 501-511</p>
<p><b>Baumgardner, J.R; Frederickson, P.O. (1985):</b> Icosahedral discretization of the 2-sphere. <i>Siam Journal on Numerical Analysis</i>, <u>22</u>(6), 1107-1115.</p>
<p><b>Becker, T.W.; Kellogg, J.B.; O'Connell, R.J. (1999)</b> Thermal constraints on the survival of primitive blobs in the lower mantle. <i>Earth Planet. Sci. Lett.</i>, <u>171</u>, 351-365.</p>
<p><b>Bercovici, D. (1998):</b> Generation of plate tectonics from lithosphere-mantle flow and void-volatile self-lubrication. <i>Earth and Planetary Science Letters</i>, <u>154</u>, 139-151.</p>
<p><b>Bercovici, D. (2003)</b> The mantle transition-zone water filter model. <i>Abstract; 8<sup>th</sup> European Workshop on Numerical Modeling of mantle convection and lithospheric dynamics, Hrubá Skála.</i></p>
<p><b>Biechele, P. (2000)</b> Stochastische Simulation der dreidimensionalen Turbulenz. <i>Dissertation an der Fakultät für Physik der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i.Br.</i></p>
<p><b>Blum, J.D. (1995)</b> Isotopic decay data. <i>In: Arhens, T.J. (ed.), Global Earth Physics. A Handbook of Physical Constants; AGU, Washington, DC, 271-282.</i></p>

## Literaturverzeichnis

<p><b>Boehler,R. (2000):</b> High-pressure experiments and the phase diagram of lower mantle and core materials. <i>Reviews of Geophysics</i>, <u>38</u>(2), 221-245.</p>
<p><b>Bolt,B.A. (1991):</b> The precision of density estimation deep in the Earth. <i>Q.Jl.R.AstrSoc</i>, <u>32</u>, 367-388.</p>
<p><b>Braginsky,S.I.; Roberts,P.H. (1995)</b> Equations governing convection in Earth's core and the geodynamo. <i>Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.</i>, <u>79</u>, 1-97</p>
<p><b>Breuer,D. (2003) :</b> Thermal evolution, crustal growth, and magnetic field history of Mars. <i>Habilitationsschrift an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster.</i></p>
<p><b>Bunge,H.-P.; Baumgardner,J.R. (1995):</b> Mantle convection modeling on parallel virtual machines. <i>Computers in Physics</i>, <u>9</u>(2), 207-215</p>
<p><b>Bunge,H.-P.; Richards,M.A. (1996)</b> The origin of large scale structure in mantle convection: effects of plate motions and viscosity stratification. <i>Geophysical Research Letters</i>, <u>23</u>(21), 2987-2990</p>
<p><b>Bunge,H.-P.; Richards,M.A.; Baumgardner,J.R. (1997):</b> A sensitivity study of three-dimensional spherical mantle convection at <math>10^8</math> Rayleigh number: Effects of depth-dependent viscosity, heating mode, and an endothermic phase change. <i>Journal of Geophysical Research</i>, <u>102</u>, B6, 11991-12007</p>
<p><b>Chopelas,A.; Boehler,R. (1989)</b> Thermal expansion measurements at very high pressure, systematics, and a case for a chemically homogeneous mantle. <i>Geophys. Res. Lett.</i>, <u>16</u>, 1347-1350.</p>
<p><b>Christensen,U. (1989)</b> Mixing by time dependent convection. <i>Earth and Planetary Science Letters</i>. 1989. <u>95</u>(34), pp 382394.</p>
<p><b>Christensen,U.R.; Hofmann,A.W. (1994)</b> Segregation of subducted oceanic crust in the convecting mantle. <i>J. Geophys. Res.</i>, <u>99</u>, 19867-19884.</p>
<p><b>Coltice,N.; Ferrachat,S.; Ricard,Y. (2000)</b> Box modeling the chemical evolution of geophysical systems: case study of the Earth's mantle. <i>Geophys. Res. Lett.</i>, <u>27</u>, 1579-1582.</p>
<p><b>Coltice,N.; Ricard,Y. (1999)</b> Geochemical observations and one layer mantle convection. <i>Earth and Planetary Science Letters</i>, <u>174</u>, 125-137</p>
<p><b>Davies,G.F. (1999)</b> Geophysically constrained mantle mass flows and the <math>^{40}\text{Ar}</math> budget: a degassed lower mantle? <i>Earth Planet. Sci. Lett.</i>, <u>174</u>, 125-137.</p>
<p><b>DeVolder,B.; Glimm,J.; Grove,J.; Kang,Y.; Lee,Y.; Pao,K.; Sharp,D.H.; Ye,K. (2002)</b> Uncertainty quantification for multiscale simulations. <i>J. Fluids Engineering</i>, <u>124</u>, 29-41; LANL Report No. LA-UR-01-4022.</p>
<p><b>Dziewonski,A.M.; Anderson,D.L. (1981):</b> Preliminary reference Earth model <i>Physics of the Earth and Planetary Interiors</i>, <u>25</u>, 297-356</p>
<p><b>Falcovich,G.; Gawedzki,K.; Vergassola,M. (2001)</b> Particles and fields in fluid turbulence <a href="http://gershwin.ens.fr/geomix">http://gershwin.ens.fr/geomix</a> oder <a href="http://de.arXiv.org/abs/cond-mat/0105199">http://de.arXiv.org/abs/cond-mat/0105199</a></p>
<p><b>Farley,K.A.; Neroda,E. (1998)</b> Noble gases in the Earth's mantle. <i>Annu. Rev. Earth Planet. Sci.</i>, <u>26</u>, 189-218.</p>
<p><b>Farnetani,C.G.; Samuel,H. (2003)</b> Lagrangian structures and stirring in the Earth's mantle. <i>Earth and Planetary Science Letters</i>, <u>206</u>, 335-348</p>
<p><b>Ferrachat,S.; Ricard,Y. (1998)</b> Regular vs. chaotic mantle mixing. <i>Earth and Planetary Science Letters</i>, <u>155</u>(12), 7586</p>
<p><b>Ferrachat,S.; Ricard,Y. (2001)</b> Mixing properties in the Earth's mantle: Effects of the viscosity stratification and of oceanic crust segregation. <i>Geochemistry Geophysics Geosystems</i>, paper number 2000GC000092</p>
<p><b>Forte,A.M.; Mitrovica,J.X.; Woodward,R.L. (1995)</b> <i>Geophys. Res. Lett.</i>, <u>22</u>, 1013</p>
<p><b>Fowler,C.M.R. (1990)</b> The solid Earth – An introduction to global geophysics. <i>Cambridge University Press</i></p>

## Literaturverzeichnis

<p><b>Gerya, T.V.; Yuen, D.A. (2002)</b> Rayleigh-Taylor instabilities from hydrous melting propel 'cold plumes' at subduction zones. <i>Earth and Planetary Science Letters</i>, submitted.</p>
<p><b>Gessman, C.K.; Wood, B.J. (2002)</b> Potassium in the Earth's core? <i>Earth and Planetary Science Letters</i>, <u>200</u>, 63-78.</p>
<p><b>Glatzmaier, G.A. (1988):</b> Numerical simulations of mantle convection: Time-dependent, three-dimensional, compressible, spherical shell. <i>Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.</i>, <u>43</u>, 223-264.</p>
<p><b>Glatzmaier, G.A.; Roberts, P.H. (1995):</b> A 3-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner-core and mantle. <i>Physics of the Earth and Planetary Interiors</i>, <u>91(1-3)</u>, 63-75.</p>
<p><b>Gordon, R.G. ; Jurdy, D.M. (1986):</b> Cenozoic global plate motions. <i>J. Geophys. Res.</i>, <u>91</u>, 12389-12406.</p>
<p><b>Grand, S.P.; van der Hilst, R.D.; Widiyantoro, S. (1997)</b> Global seismic tomography: a snapshot of convection in the Earth. <i>GSA Today</i>, <u>7</u>, 1-7.</p>
<p><b>Gurnis &amp; Davis (1986)</b> The effect of depth-dependent viscosity on convective mixing in the mantle and the possible survival of primitive mantle <i>Geophysical Research Letters</i>, <u>13(6)</u>, 541-544</p>
<p><b>Haller, G. (2001a)</b> Finite-time mixing and coherent structures <i>Vortrag beim 'Workshop on numerical modeling of mantle convection and lithospheric dynamics' in Aussois (F)</i></p>
<p><b>Haller, G. (2001b)</b> Distinguished material surfaces and coherent structures in three-dimensional fluid flows <i>Physica D: Nonlinear Phenomena</i>, <u>149(4)</u>, 248-277</p>
<p><b>Haller, G. (2001c)</b> Lagrangian coherent structures and the rate of strain in two-dimensional turbulence <i>Phys. Fluids A</i>, in press</p>
<p><b>Haller, G.; Yuan, G. (2000)</b> Lagrangian coherent structures and mixing in two-dimensional turbulence <i>Physica D</i>, <u>147</u>, 352-370</p>
<p><b>Haller, G.; Poje, A. (1998)</b> Finite time transport in aperiodic flows <i>Physica D</i>, <u>119</u>, 352-380</p>
<p><b>Hart (1984)</b> A large-scale isotope anomaly in the southern hemisphere mantle <i>Nature</i>, <u>309</u>, 753-757</p>
<p><b>Hart, S.; Zindler, A. (1989)</b> Constraints on the nature and development of chemical heterogeneities in the mantle <i>in 'Mantle convection'</i>, 261-387, ed. Peltier, W.R., Gordon and Breach science publishers S.A., Montreaux, Switzerland.</p>
<p><b>Hewitt, J.M.; McKenzie, D.P.; Weiss, N.O. (1975)</b> Dissipative heating in convective flows. <i>J. Fluid Mech.</i>, <u>68</u>, 721-738.</p>
<p><b>Hirose, K. (2002) :</b> Phase transitions in pyrolitic mantle around 670-km depth: Implications for upwelling of plumes from the lower mantle. <i>Journal of Geophysical Research</i>, <u>107</u>, B4, 10.1029/2001JB000597.</p>
<p><b>Hirth, G.; Kohlstedt, D.L. (1996)</b> Water in the oceanic upper mantle: implications for rheology, melt extraction and the evolution of the lithosphere. <i>Earth and Planetary Science Letters</i>, <u>144</u>, 93-108</p>
<p><b>Hiyagon, H.; Ozima, M. (1986)</b> Partition of noble gases between olivine and basalt melt. <i>Geochim. Cosmochim. Acta</i>, <u>50</u>, 2045-2057.</p>
<p><b>Hofmann, A.W. (1997)</b> Mantle geochemistry: the message from oceanic volcanism. <i>Nature</i>, <u>385</u>, 219-229</p>
<p><b>Hofmeister, A.M. (1999)</b> Mantle values of thermal conductivity and the geotherm from phonon lifetimes. <i>Science</i>, <u>283</u>, 1699-1706.</p>
<p><b>Honda, S.; Iwase, Y. (1996)</b> Comparison of the dynamic and parameterized models of mantle convection including core cooling. <i>Earth and Planetary Science Letters</i>, <u>139</u>, 133-145.</p>
<p><b>Honda, S.; Yuen, D.A. (1994)</b> Model for convective cooling of mantle with phase changes. <i>J. Phys. Earth</i>, <u>42</u>, 165-186.</p>

## Literaturverzeichnis

<p><b>Ishii,M.; Tromp,J. (1999)</b> Normal-mode and free-air gravity constraints on lateral variations in velocity and density of Earth's mantle. <i>Science</i>, <u>285</u>, 1231-1236.</p>
<p><b>Jarvis,G.T.; McKenzie,D.P. (1980)</b> Convection in a compressible fluid with infinite Prandtl number. <i>J. Fluid Mech.</i>, <u>96</u>, 515-583.</p>
<p><b>Jeanloz,R.; Lay,T. (1993)</b> The core-mantle boundary. <i>Scientific American</i>, <u>268</u>, 48-55.</p>
<p><b>Karato,S.-I. (2003)</b> Mapping water in the Earth's mantle. <i>Vortrag auf der 63. Jahrestagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft; Jena, 25.2.2003.</i></p>
<p><b>Karato,S.-I. ; Li,P. (1992) :</b> Diffusion creep in perovskite: implications for the rheology of the lower mantle. <i>Science</i>, <u>255</u>, 1238-1240.</p>
<p><b>Karato,S.-I.; Riedel,M.R.; Yuen,D.A. (2001):</b> Rheological structure and deformation of subducted slabs in the mantle transition zone: implications for mantle circulation and deep earthquakes. <i>Phys. Earth Planet. Int.</i>, <u>127</u>, 83-108</p>
<p><b>Karato,S.-I.; Wu,P. (1993):</b> Rheology of the upper mantle: A synthesis. <i>Science</i>, <u>260</u>, 771-778.</p>
<p><b>Kellogg, L.H.; Stewart, C.A. (1991)</b> Mixing by chaotic convection in an infinite Prandtl number fluid and implications for mantle convection <i>Physics of Fluids A [Fluid Dynamics], Vol: 3 Iss: 5, pt.2 p. 13748</i></p>
<p><b>Kellogg,L.H. (1992)</b> Mixing in the mantle. <i>in: Annual review of Earth and planetary sciences. Vol. 20. (Annual Reviews Inc.), 1992, pp 365388.</i></p>
<p><b>Kellogg,L.H.; Hager,B.H.; van der Hilst,R.D. (1999)</b> Compositional stratification in the deep mantle <i>Science</i>, <u>283</u>, 1881-1884</p>
<p><b>Kirby,S.H. (1983):</b> <i>Rev. Geophys. Space Phys.</i>, <u>21</u>, 1458.</p>
<p><b>Kluge,G. ; Neugebauer,G. (1994):</b> Grundlagen der Thermodynamik. <i>Spektrum Akademischer Verlag.</i></p>
<p><b>Kohlstedt,D.L.; Evans,B.; Mackwell,S.J. (1995)</b> <i>J. Geophys. Res.</i>, <u>100</u>, 17587.</p>
<p><b>Kolmogorov,A.N. (1941)</b> Theorie der universellen Gleichheit. <i>Dokl. Akad. Nauk SSSR</i>, <u>32</u>, 16.</p>
<p><b>Kreemer,C.; Holt,W.E.; Haines,A.J. (2002)</b> A integrated global model of present-day plate motions and plate boundary deformation. <i>Geophys. J. Int., in review, 2002.</i> <a href="http://sps.unavco.org/crustal_motion/dedt/">http://sps.unavco.org/crustal_motion/dedt/</a></p>
<p><b>Kurz,M.D.; Jenkins,W.J.; Hart,S.R.; Clague,D. (1983)</b> Helium isotopic variations in volcanic rocks from Loihi seamount and the island of Hawaii. <i>Earth Planet. Sci. Lett.</i>, <u>66</u>, 388-406.</p>
<p><b>Labrosse,S. (2003)</b> Thermal and magnetic evolution of the Earth's core. <i>Physics of the Earth and Planetary Interiors, submitted 30.05.2003</i></p>
<p><b>Labrosse,S.; Poirier,J.-P.; Le Mouél, J.-L. (2001)</b> The age of the inner core. <i>Earth and Planetary Science Letters</i>, <u>190</u>, 11-123.</p>
<p><b>Laio,A.; Bernard,S.; Chiarotti,G.L.; Scandolo,S.; Tosatti,E. (2000)</b> Physics of iron at Earth's core conditions. <i>Science</i>, <u>287</u>, 1027-1030.</p>
<p><b>Lay,T.; Williams,Q.; Garnero,E.J. (1998)</b> The core-mantle boundary layer and deep Earth dynamics. <i>Nature</i>, <u>392</u>, 461-468.</p>
<p><b>Li,P. ; Karato,S.-I. ; Wang,Z. (1996) :</b> High-temperature creep in fine-grained polycrystalline CaTiO<sub>3</sub>, an analogue material of (Mg,Fe)SiO<sub>3</sub> perovskite. <i>Earth Planet. Int.</i>, <u>95</u>, 19-36.</p>
<p><b>Manga, M. (1996)</b> Mixing of heterogeneities in the mantle: Effect of viscosity differences. <i>Geophysical Research Letters</i>, <u>23(4)</u> 403-406.</p>

## Literaturverzeichnis

<p><b>Masters,G.; Laske,G.; Bolton,H.; Dziewonski,A. (2000)</b> The relative behaviour of shear velocity, bulk sound speed, and compressional velocity in the mantle: implications for chemical and thermal structure. <i>In: Mineral physics and seismic tomography (ed. Karato,S.I); Washington, DC; AGU.</i></p>
<p><b>Matsuda,J.M.S.; Ozima,M.; Ito,K.; Ohtaka,O.; Ito,E. (1993)</b> Noble gas partitioning between metal and silicate under high pressures. <i>Science, 259, 788-790.</i></p>
<p><b>McCulloch,M.T.; Bennett,V.C. (1994)</b> Progressive growth of the Earth's continental crust and depleted mantle: Geochemical constraints. <i>Geochim. Cosmochim. Acta, 58, 4717-4738.</i></p>
<p><b>McNamara,A.K.; van Keken,P.E. (2000)</b> Cooling of the earth: A parameterized convection study of whole versus layered models. <i>Geochemistry Geophysics Geosystems, paper number 2000GC000045</i></p>
<p><b>Nolet,G. (2003):</b> Seeing plumes in a new (diffracted) light. <i>Vortrag auf der 63. Jahrestagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft; Jena, 26.2.2003.</i></p>
<p><b>O'Connell,R.J.; Gable,C.W.; Hager,B.H. (1991)</b> Toroidal-poloidal partitioning of lithospheric plate motion. <i>In: Sabadini,K.; Lambek,K.; Boschi,E. (eds.): Glacial isostasy, sea level, and mantle rheology.; 535-551; Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.</i></p>
<p><b>O'Nions,R.K.; Oxburgh,E.R. (1983)</b> Heat and helium in the Earth <i>Nature, 306, 429-431</i></p>
<p><b>Ohtani,E.; Suzuki,A.; Kato,T. (1998)</b> Floatation of olivine and diamond in mantle melt at high pressure: Implications for fractionation in the deep mantle and ultradeep origin of diamond. <i>In: 'Properties of Earth and planetary materials at high pressure and temperature' (eds. Manghnani,M.H.; Yagi,T.), pp. 227-239, Geophysical Monograph, 101, AGU, Washington.</i></p>
<p><b>Ottino (1989)</b> The kinematics of mixing: stretching, chaos and transport <i>Cambridge Univ. Press</i></p>
<p><b>Oversby,V.M.; Ringwood,A.E. (1972)</b> Potassium distribution between metal and silicate and its bearing on the occurrence of potassium in the Earth's core. <i>Earth and Planetary Science Letters, 14, 345-347.</i></p>
<p><b>Pierrehumbert, R.T. (1991)</b> Large-scale horizontal mixing in planetary atmospheres. <i>Phys. Fluids A., 3(5), 1250-1260</i></p>
<p><b>Poirier,J.-P.; Shankland,T.J. (1993)</b> Dislocation melting of iron and temperature of the inner core boundary, revisited. <i>Geophys. J. Int., 115, 147-151.</i></p>
<p><b>Pollack,H.N.; Hurter,S.J.; Johnson,J.R. (1993)</b> Heat flow from the Earth's interior: Analysis of the global data set. <i>Rev. Geophys., 31, 267-280.</i></p>
<p><b>Press,W.H.; Teukolsky,S.A.; Vetterling,W.T.; Flannery,B.P. (1992)</b> Numerical recipes in Fortran 77: The art of scientific computing. <i>Cambridge University Press, 2<sup>nd</sup> ed.</i></p>
<p><b>Rama Murthy,V.; van Westrenen,W.; Fei,Y. (2003)</b> Radioactive heat sources in planetary cores: Experimental evidence for potassium. <i>Nature, 423, 163-165</i></p>
<p><b>Ramage,A.; Walthan,A.J. (1992)</b> Iterative solution techniques for finite element discretizations of fluid flow problems. <i>In: Proceedings of the Copper Mountain Conference on Iterative Methods, Copper Mountain, Colorado, 1992, volume 1.</i></p>
<p><b>Regenauer-Lieb,K.; Kohl,T. (2003)</b> Water solubility and diffusivity in olivine: its role for planetary tectonics. <i>Mineralogical Magazine: Special issue in Honour of Kerry Rodgers (ed. Paul Hoskin), submitted 2003.</i></p>
<p><b>Regenauer-Lieb,K.; Yuen,D.A. (2003)</b> Modeling shear zones in geological and planetary sciences: solid- and fluid- thermal approaches. <i>submitted to Earth Science Reviews, January 27, 2003.</i></p>
<p><b>Reusken,A. (1993):</b> Multigrid with matrix-dependent transfer operators for a singular perturbation problem. <i>Computing, 50(3), 199-211.</i></p>

## Literaturverzeichnis

<p><b>Ricard, Y.; Vigny, C. (1989)</b> Mantle dynamics with induced plate tectonics. <i>J. Geophys. Res.</i>, <u>94</u>, 17543-17559.</p>
<p><b>Richards, M.A.; Yang, W.-S.; Baumgardner, J.R. (1999)</b> The effectiveness of finite yield stress in obtaining platelike surface velocities. <i>EOS, Fall99</i>, F962</p>
<p><b>Riedel, M. (2003)</b> Die aktive Rolle der Viskosität im oberen Mantel. <i>Vortrag im Geowissenschaftlichen Kolloquium, Jena, 13.10.2003.</i></p>
<p><b>Roberts, P.H.; Jones, C.A.; Calderwood, A.R. (2003)</b> Energy fluxes and ohmic dissipation in the Earth's core. <i>In: Earth's core and lower mantle. (Jones, C.A.; Soward, A.M.; Zhang, K. – eds.); Taylor &amp; Francis, London, in press.</i></p>
<p><b>Rüpke, L.; Phipps Morgan, J.; Hort, M.; Connolly, J.; Ranero, C. (2003b)</b> Serpentine and the chemical evolution of the Earth's mantle. <i>Geophysical Research Abstracts</i>, vol <u>5</u>.</p>
<p><b>Rüpke, L.; Phipps Morgan, J.; Morra, G.; Regenauer-Lieb, K.; Connolly, J.; Hort, M. (2003a)</b> Modeling the role of serpentinization and deserpentinization in bending and unbending slabs. <i>Geophysical Research Abstracts</i>, vol <u>5</u>.</p>
<p><b>Schmalzl, J. (1996)</b> Mixing properties of thermal convection in the Earth's mantle. <i>Geologica Ultraiectina</i>, <u>140</u>.</p>
<p><b>Schmalzl, J.; Hansen, U. (1994)</b> Mixing the Earth's mantle by thermal convection: a scale dependent phenomenon. <i>Geophysical Research Letters</i>, <u>21</u>(11), 987-990.</p>
<p><b>Schubert, G.; Turcotte, D.L.; Olson, P. (2001):</b> Mantle convection in the Earth and planets. <i>Cambridge University Press.</i></p>
<p><b>Schwarz, J.P.; Robertson, D.S.; Niebauer, T.M.; Faller, J.E. (1998)</b> A free-fall determination of the Newtonian constant of gravity. <i>Science</i>, <u>282</u>, 2230-2234.</p>
<p><b>Schwinner, R. (1919):</b> Vulkanismus und Gebirgsbildung. Ein Versuch. <i>Zeitschrift für Vulkanologie</i>, <u>5</u>, 175-230.</p>
<p><b>Sidorin, I.; Gurnis, M.; Helmberger, D.V. (1999)</b> Dynamics of a phase change at the base of the mantle consistent with seismological observations. <i>J. Geophys. Res.</i>, <u>104</u>, 15005-15024.</p>
<p><b>Silver, P.G.; Carlson, R.W.; Olson, P.L. (1988)</b> Deep slabs, geochemical heterogeneity, and the large-scale structure of mantle convection. <i>Annu. Rev. Earth Planet. Sci.</i>, <u>16</u>, 477</p>
<p><b>Smolarkiewicz, P.K. (1984):</b> A fully multidimensional positive definite advection transport algorithm with small implicit diffusion. <i>J. Comp. Physics</i>, <u>54</u>(2), 325-362.</p>
<p><b>Stacey, F.D. (1992) :</b> Physics of the Earth, 3<sup>rd</sup> ed. <i>Brookfield Press, Brisbane.</i></p>
<p><b>Stacey, F.D. (1993) :</b> Thermodynamics relationships and the properties of iron at Earth's core conditions. <i>In: Conference Proceedings for the Association for the International Advancement of High Pressure, Colorado Springs, Colorado.</i></p>
<p><b>Stegman, D.R.; Richards, M.A.; Baumgardner, J.R. (2002):</b> Effects of depth-dependent viscosity and plate motions on maintaining a relatively uniform mid-ocean ridge basalt reservoir in whole mantle flow. <i>Journal of Geophysical Research</i>, <u>107</u>, no. B6, 10.1029/2001JB000192</p>
<p><b>Stegman, D.R.; Jellinek, A.M.; Zatman, S.A.; Baumgardner, J.R.; Richards, M.A. (2003):</b> An early lunar core dynamo driven by thermochemical mantle convection. <i>Nature</i>, <u>421</u>, 143-146</p>

## Literaturverzeichnis

<p><b>Steinbach,V.; Yuen,D.A.; Zhao,W.L. (1993)</b> Instabilities from phase transitions and the timescales of mantle thermal evolution. <i>Geophysical Research Letters</i>, <u>20</u>, 1119-1122.</p>
<p><b>Stemmer,K. (2001)</b> Untersuchung von Mischungseigenschaften thermischer Konvektion in einer Kugelschale mittels numerischer Methoden. <i>Diplomarbeit am Institut für Geophysik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster.</i></p>
<p><b>Stevenson,D.J.; Spohn,T.; Schubert,G. (1983)</b> Magnetism and thermal evolution of the terrestrial planets. <i>Icarus</i>, <u>54</u>, 466-489.</p>
<p><b>Tackley,P.J. (1998)</b> Three-dimensional simulations of mantle convection with a thermochemical CMB boundary layer: D"? <i>In: The core-mantle boundary region (eds. Gurnis,M.; Wyssession,M.E.; Knittle,E.; Buffett,B.A.),</i> <u>28</u>, 231-253; <i>Washington, DC; AGU.</i></p>
<p><b>Tackley,P.J. (2000a)</b> Self-consistent generation of tectonic plates in time-dependent, three-dimensional mantle convection simulations. 1. Pseudoplastic yielding. <i>Geochem. Geophys. Geosyst.</i>, <u>1</u>, Paper no.2000GC000036.</p>
<p><b>Tackley,P.J. (2000b)</b> Self-consistent generation of tectonic plates in time-dependent, three-dimensional mantle convection simulations. 2. Strain weakening and asthenosphere. <i>Geochem. Geophys. Geosyst.</i>, <u>1</u>, Paper no.2000GC000043.</p>
<p><b>Tackley,P.J. (2000c)</b> Mantle convection and plate tectonics: toward an integrated physical and chemical theory. <i>Science</i>, <u>288</u>, 2002-2007.</p>
<p><b>Tackley,P.J. (2002)</b> Strong heterogeneity caused by deep mantle layering. <i>Geochem. Geophys. Geosyst.</i>, <u>3(4)</u>, 10.1029/2001GC000167 .</p>
<p><b>Tackley,P.J.; Xie,S. (2002)</b> The thermochemical structure and evolution of Earth's mantle: constraints and numerical models. <i>Phil. Trans. R. Soc. Lond. A</i>, <u>360</u>, 2593-2609.</p>
<p><b>Ten, A.A.; Podladchikov, Y.Y.; Yuen, D.A.; Larsen, T.B.; Malevsky, A.V. (1998)</b> Comparison of mixing properties in convection with the particle line method <i>Geophysical Research Letters</i>, <u>25</u> (16), 32058</p>
<p><b>Ten,A.A.; Yuen,D.A.; Podladchikov,Yu.Yu.; Larsen,T.B.; Pachevsky,E.; Malevsky,A.V. (1997)</b> Fractal features in mixing of nonNewtonian and Newtonian mantle convection. <i>Earth and Planetary Science Letters</i>, <u>146/34</u>, 401-414.</p>
<p><b>Trompert,R.A.; Hansen,U. (1998)</b> Mantle convection simulations with rheologies that generate plate-like behaviour. <i>Nature</i>, <u>395</u>, 686-689.</p>
<p><b>Turcotte,D.L.; Schubert,G. (2002):</b> Geodynamics, second edition. <i>Cambridge University Press.</i></p>
<p><b>van der Hilst,R.; Kárason,H. (1999)</b> Compositional heterogeneity in the bottom 1000 kilometers of Earth's mantle: toward a hybrid convection model <i>Science</i>, <u>283</u>, 1885-1888</p>
<p><b>van Keken,P. &amp; Shijie Zhong (1999)</b> Mixing in a 3D spherical model of present-day mantle convection <i>Earth and Planetary Science Letters</i>, <u>171</u>, 533-547</p>
<p><b>van Keken,P.; Ballentine,C.J.; Porcelli,D. (2001)</b> A dynamical investigation of the heat and helium imbalance <i>Earth and Planetary Science Letters</i>, <u>188</u>, 421-434</p>
<p><b>van Keken,P.; Hauri,E.H.; Ballentine,C.J. (2002)</b> Mantle mixing: The generation, preservation, and destruction of chemical heterogeneity. <i>Annu. Rev. Earth Planet. Sci.</i> 2002, <u>30</u>, 493-525</p>
<p><b>VanKekenP.E.; KingS.D.; SchmelingH.; ChristensenU.R.; NeumeisterD.; DoinM.P. (1997)</b> A comparison of methods for the modeling of thermochemical convection. <i>Journal of Geophysical Research</i>, <u>102(B10)</u>, 22477-22495</p>

## Literaturverzeichnis

<p><b>Vidale,J.E.; Schubert,G.; Earle,P.S. (2001)</b>          Unsuccessful initial search for a midmantle chemical boundary layer with seismic arrays.  <i>Geophys. Res. Lett.</i>, <u>28</u>, 859-862.</p>
<p><b>Walzer,U.; Hendel,R. (1997a)</b>          Tectonic episodicity and convective feed-back mechanisms.  <i>Physics of the Earth and Planetary Interiors</i>, <u>100</u>, 167-188.</p>
<p><b>Walzer,U.; Hendel,R. (1997b)</b>          Time-dependent thermal convection, mantle differentiation and continental crust growth.  <i>Geophys. J. Int.</i>, <u>130</u>, 303-325.</p>
<p><b>Walzer,U.; Hendel,R. (1999a)</b>          A new convection-fractionation model for the evolution of the principal geochemical reservoirs of the Earth's mantle.  <i>Physics of the Earth and Planetary Interiors</i>, <u>112</u>, 211-256.</p>
<p><b>Walzer,U.; Hendel,R.; Baumgardner,J. (2003a):</b>          Variation of non-dimensional numbers and a thermal evolution model of the Earth's mantle.  <i>In: Krause,E.; Jäger,W. (eds.), High Performance Computing in Science and Engineering '02, Springer-Verlag Berlin etc., 89-103</i></p>
<p><b>Walzer,U.; Hendel,R.; Baumgardner,J. (2003b):</b>          The effects of a variation of the radial viscosity profile on mantle evolution.  <i>Tectonophysics, submitted 19.9.2003</i></p>
<p><b>Walzer,U.; Hendel,R.; Baumgardner,J. (2004a):</b>          Viscosity stratification and a 3-D compressible spherical shell model of mantle evolution.  <i>In: Krause,E.; Jäger,W. (eds.), High Performance Computing in Science and Engineering '03, Springer-Verlag Berlin etc., 41 pp., accepted for publication</i></p>
<p><b>Walzer,U.; Hendel,R.; Baumgardner,J. (2004b):</b>          Generation of plate-tectonic behaviour and a new viscosity profile of the Earth's mantle.  <i>In: Wolf,D.; Münster,G.; Kremer,M. (eds.), NIC Symposion 2004, 10 pp., accepted for publication</i></p>
<p><b>Weis,D.; Bassias,Y.; Gautier,I.; Mennessier,J.-P. (1989)</b>          Dupal anomaly in existence 115 ma ago: Evidence from isotopic study of the Kerguelen plateau (South Indian Ocean).  <i>Geochim. Cosmochim. Acta</i> <u>53</u>, 2125-2131</p>
<p><b>Xie,S.; Tackley,P. (2003)</b>          Evolution of Helium and Argon Isotopes in a convecting mantle.  <i>Physics of the Earth and Planetary Interiors, submitted 8.03.2003.</i></p>
<p><b>Yang,W.-S. (1997)</b>          Variable viscosity thermal convection at infinite Prandtl number in a thick spherical shell..  <i>Thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, Department of Geology, 1997.</i></p>
<p><b>Yang,W.-S.; Baumgardner,J.R. (1999)</b>          A matrix-dependent transfer multigrid method for szrongly variable viscosity infinite Prandtl number thermal convection.  <i>Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, submitted 27.1.1999.</i></p>
<p><b>Yuen,D.A.; Balachandar,S.; Steinbach,V.C.; Honda,S.; Reuteler,D.M.; Smedsmo,J.J.; Lauer,G.S. (1995)</b>          Non-equilibrium effects of core-cooling and time-dependent internal heating on mantle flush events.  <i>Nonlinear Processes in Geophysics</i>, <u>2</u>, 206-221.</p>
<p><b>Zerr,A.; Boehler,R. (1993)</b>          Melting of (Mg,Fe)SiO<sub>3</sub>-perovskite to 625 kilobars: Indication of a high melting temperature in the lower mantle.  <i>Science</i>, <u>262</u>, 553-555.</p>
<p><b>Zerr,A.; Boehler,R. (1994)</b>          Constraints on the melting temperature of the lower mantle from high-pressure experiments on MgO and magnesiowüstite.  <i>Nature</i>, <u>371</u>, 506-508.</p>
<p><b>Zhang,Y.; Zindler,A. (1989)</b>          Noble Gas Constraints on the Evolution of the Earth's Atmosphere  <i>Journal of Geophysical Research</i>, <u>94</u> (B10), 13719-13737</p>
<p><b>Zindler, A.; Hart, S. (1986)</b>          Chemical geodynamics.  <i>Annu. Rev. Earth Planet. Sci.</i> <u>14</u>, 493-571</p>

## Dank

Prof. Dr. Uwe Walzer hat durch seine Pionierleistungen auf dem Gebiet der thermochemischen Evolution des Erdmantels meine Aufmerksamkeit auf dieses interessante und an Bedeutung gewinnende Forschungsfeld gelenkt. Durch seine Betreuung bekam ich viele wertvolle Hinweise, konnte aber trotzdem weitgehend selbständig arbeiten und so eine eigene Sicht der Dinge entwickeln. Die Ermöglichung meiner Teilnahme an verschiedenen Tagungen und Workshops war hier besonders wichtig. Danke.

Prof. Dr. Gerhard Jentzsch danke ich für die Übernahme des Koreferates. Er hatte besonders in der hektischen Endphase dieser Arbeit immer ein aufmunterndes Wort parat und er hat mich dazu angeregt, interessantere Fragen an TERRA zu stellen. Das waren kurze, aber entscheidende Hilfen. Danke.

Die Zusammenarbeit mit Roland Hendel war besonders angenehm. Er hatte immer ein offenes Ohr für kleine und große Probleme aller Art und er war oft der Vermittler in verfahrenen Diskussionen. Die große Zahl seiner Hinweise und Denkanstöße macht ihn eigentlich zum Mitautor dieser Arbeit. Danke Roland.

Dr. Thomas Burghardt hatte die rettende Idee, die Rechner des NIC Jülich für die Arbeit mit TERRA zu nutzen. Erst dadurch wurden für mich sinnvolle Rechnungen möglich, später auch auf anderen Rechnern. Seine Art, vieles zu hinterfragen, hat mich oft zum Nachdenken angeregt und dadurch auch wesentlich zur Verbesserung dieser Arbeit beigetragen. Danke.

Auch den anderen Kollegen der Arbeitsgruppe Geodynamik, mit denen ich länger als eine Woche zusammenarbeiten durfte, sei an dieser Stelle herzlich gedankt: Dr. Steffen Abe, Dr. Birgit Fechtner, Sigward Funke, Dr. Norbert Gründer, Markus Müller und Clemens Schmitz.

Prof. Dr. John R. Baumgardner hat als Autor von TERRA die Grundlage für diese Arbeit geschaffen. Bei Fragen zum Programm war er stets hilfsbereit. Thank you.

Dr. David R. Stegman hat mir sein fast fertiges Markermodul zur Verfügung gestellt, als ich gerade erst begonnen hatte, ein eigenes zu entwickeln. Dadurch habe ich viel Zeit gespart. Danke, auch für interessante Diskussionen und Hinweise.

Auch die Programmteile von Dr. Woo-Sun Yang waren eine Grundlage dieser Arbeit. Leider habe ich ihn noch nicht persönlich kennengelernt. Trotzdem vielen Dank.

David Fanning hat geholfen, wenn ich an IDL verzweifelte. Danke Coyote.

Sven Erlacher, Thomas Handke, Dr. Alexander Hemmann und besonders Andreas Hoffmann haben bei Rechnerproblemen geholfen. Danke.

Danke dem NIC Jülich und dem Rechenzentrum der TU Dresden für die Bereitstellung von Rechenzeit auf ihren Supercomputern und der DFG für die teilweise Finanzierung meines Gehaltes (WA 1035/5-1).

Für Diskussionen und kleine, aber wertvolle Hinweise rund um Geophysik und Geochemie danke ich Prof. Dr. Hans-Peter Bunge, Dr. Taras Gerya, Prof. Dr. George Haller, Dr. Mark Jellinek, Prof. Dr. Dan McKenzie, Dr. Klaus Regenauer-Lieb, Dr. Jörg Schmalzl, Kai Stemmer, Prof. Dr. Viereck-Götte, Prof. Dr. Steve Wiggins und Prof. Dr. Dave Yuen.

Netti und Sofie, jede Stunde für diese Arbeit war eine verlorene Stunde mit Euch. Netti, ich danke Dir für alles. Mums und Flurps, Leni und Rolli danke ich für die Unterstützung, die ich in all den Jahren erhalten habe. Ohne Euch wäre vieles schwerer gewesen. Ein ganz besonderer Dank geht auch an Dr. Emmrich. Christian, mit Deiner Großzügigkeit hast Du sehr zum Zustandekommen dieser Arbeit beigetragen. Danke. Nici und Katrin: danke für die gute Zeit mit Euch. Entomologen in Jena und Gera, Edi und Roland: es ist einfach schön, eine Gemeinschaft zum Ausspannen zu haben. Danke.

## Lebenslauf

### **Persönliche Daten**

.....

Name	Gottschaldt, Klaus-Dirk
Geburtsdatum	15.07.1970
Geburtsort	Schwerin
Eltern	Gottschaldt, Fridolf Gottschaldt, Anna-Katrin (geb. Bolle)
Familienstand	ledig Tochter Sofie Helene Baierl

### **Schulbildung**

.....

1977 – 1981	Grundschule Röpsen bei Gera
1981 - 1987	Polytechnische Oberschule „Wilhelm- Pieck“ Brahmenau
1987 – 1989	Erweiterte Oberschule „Otto Grotewohl“ Gera (Abitur „Mit Auszeichnung“)

### **Studium**

.....

März 1991	Immatrikulation an der Friedrich-Schiller- Universität Jena
Oktober 1994 bis Juni 1995	Heriot-Watt University Edinburgh
29. September 1997	Diplom in Physik, Note „sehr gut“, Thema der Diplomarbeit: „Periodische Randbedingungen bei der zweidimensionalen numerischen Modellierung von Konvektion im Erdmantel“
seit Oktober 1997	Wissenschaftlicher Mitarbeiter und Doktorand am Lehrstuhl für Geodynamik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

### **Sonstige Tätigkeiten**

.....

September und Oktober 1989	Montagearbeiter beim VEB Elektronik Gera
November 1989 bis Mai 1990	Wehrdienst
Mai bis Oktober 1990	Zivildienst
Oktober 1990 bis Februar 1991	Montagearbeiter bei Electronicon GmbH Gera

Jena, den 28. November 2003

---

Klaus-Dirk Gottschaldt

## **Selbständigkeitserklärung**

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel, persönlichen Mitteilungen und Quellen angefertigt habe.

Jena, den 28. November 2003;  
leicht verändert: 3. März 2004